PHYSIK DES RADES

19. MAI 2023

JOSEF HINGSAMMER

Vorwort

Durch den Fahrradboom der letzten Jahre hat sich das Berufsbild des Fahrradmechatronikers gebildet, was in Österreich bereits mit großem Zulauf gelehrt wird. Dabei kommt es nicht nur auf rein mechanische und technische Anwendungen an, sondern auch auf theoretisches Wissen aus Physik und Technischer Mechanik im Zusammenhang mit dem Fahrrad. Der folgende Artikel soll dazu Beispiele und Anregungen geben.

Energieerhaltung

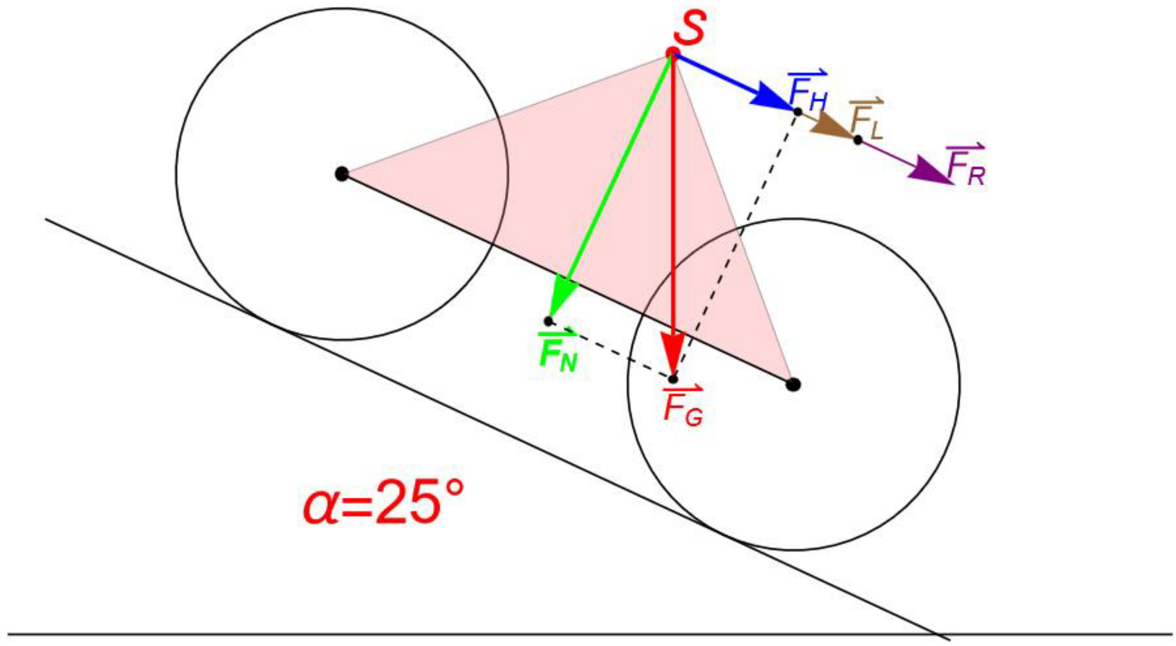


Abb.: 1, S= Schwerpunkt, S.34 siehe Freischaltbild nach d´Alembert.

Die Energie E_F und Leistung P_F, die beim Radfahren gegen die Reibungskraft F_R, Luftwiderstand F_L und Hangabtriebskraft F_H aufgebracht werden muss, erreicht man durch das Treten der Kurbel mit einem Drehmoment M und der Energie E_K, wobei die senkrechteTretkraft F_P auf die Tangentialkraft F_T der Kurbel übertragen wird. Der Energiesatz lautet:

$$\boxed{E_K = E_F}$$

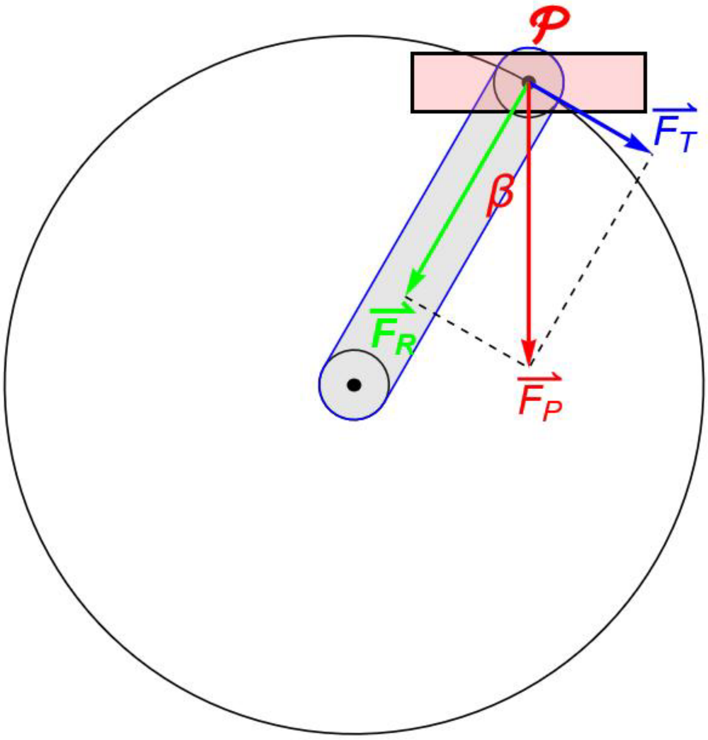


Abb.: 2

Energieverbrauch E_F und Leistung P_F beim Fahren:

Die Hangabtriebskraft F_H ergibt sich nach Abb. 1 zu

$$F_H = m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$$

m= Masse von Mensch und Fahrrad; g=9,81 $\frac{m}{s^2}$; α=Neigungs-winkel. Der Luftwidertand ist

$$F_L = c_W \cdot \frac{\rho}{2} \cdot A \cdot v^2$$

A= Querschnittsfläche des Fahrers (0,3 m² - 0,6 m²)

v= Geschwindigkeit, c_W = dimensionsloser Widerstandsbeiwert ~ 0,8 ...0,9.

$\rho_L = 1{,}3\,\frac{kg}{m^3}$ = Dichte der Luft.

F_K (Kette, Lager, Reifen) ~ 1/3 vom Luftwiderstand F_L,

die Reibungskraft F_R ist

$$F_R = F_N \cdot \mu = m \cdot g \cdot \mu \cdot \cos(\alpha);$$

μ = Rollreibungszahl, sehr klein ~ 0,001, vernachlässigbar, außer bei Gelände.

Mit s als zurückgelegter Wegstrecke und v als Geschwindigkeit erhält man

$$\boxed{\begin{array}{l} E_F = (F_H + F_R + F_K + F_L) \cdot s = \\ \left\{ m \cdot g \cdot \left[\mu \cdot \cos(\alpha) \overset{\text{aufwärts}}{\underset{\text{abwärts}}{\pm}} \sin(\alpha) \right] + \frac{2}{3} \cdot c_W \cdot \rho_L \cdot A \cdot v^2 \right\} \cdot s \\ P_F = (F_H + F_R + F_K + F_L) \cdot v = \\ \left\{ m \cdot g \cdot \left[\mu \cdot \cos(\alpha) \overset{\text{aufwärts}}{\underset{\text{abwärts}}{\pm}} \sin(\alpha) \right] + \frac{2}{3} \cdot c_W \cdot \rho_L \cdot A \cdot v^2 \right\} \cdot v \end{array}}$$

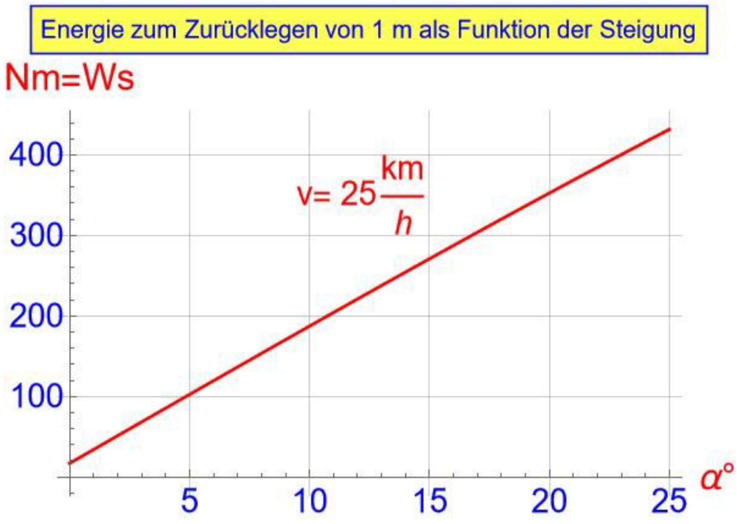
<u>*Beispiel (siehe auch Aufgabe 5 am Schluss) :*</u>

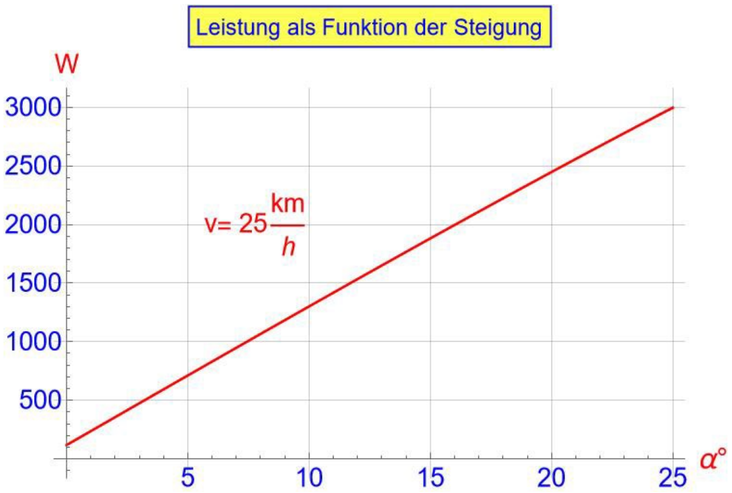
v=25 km/h = 6,94 m/s; s= zurückgelegte Wegstrecke = 1 m;

A=0,45 m²; α=0 ; c_W = 0,9; Reibungsverluste werden vernachlässigt.

$F_K = \frac{1}{3} F_L$; m= 80 kg; $E_F \approx 17$ Nm (= Ws) ; $P_F \approx 117$ W ;

Die Bilder 3 und 4 zeigen die Abhängigkeit von der Neigung α.





Aufgabe:

Wie lange muss man mit 25 km/h fahren, um die Energie einer Tafel Schokolade von 500 Kilokalorien ($2{,}1\cdot 10^6$ J) zu verbrauchen. Der Wirkungsgrad der Muskeln beträgt $\eta = 20\%,\ A = 0{,}45\ \mathrm{m}^2, \alpha = 0,\ \mu = 0$;

$$P_F = \frac{2}{3}\cdot c_W \cdot \rho_L \cdot A \cdot v^3 = 117{,}5\ \mathrm{W};\ P_{\text{Körper}} = 5\cdot P_F = 585\ \mathrm{W};\ \frac{2{,}1\cdot 10^6\ \mathrm{J}}{585\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}} = 3590\ \mathrm{s} = 1\ \mathrm{h}$$

Siehe Fr. Kuypers, Physik für Ingenieure, Wiley-VCH, S. 231

Energieverbrauch E_K und Leistung P_K beim Drehen der Kurbel:

Mit der Tangentialkraft F_T (Abb.2) und der Pedalkraft F_P

$$F_T = F_P \cdot \sin(\beta);\ \delta E_K = \delta s \cdot F_T = \delta\beta \cdot R_{Kurbel} \cdot F_P \cdot \sin(\beta)$$

$$E_K(\text{halbe Umdrehung}) = \int_{\beta=0}^{\beta=\pi} R_{Kurbel} \cdot F_P \cdot \sin(\beta) \cdot d\beta = 2 \cdot F_P \cdot R_{Kurbel}$$

$$E_K(\text{halbe Umdrehung links} + \text{halbe Umdrehung rechts}) =$$

$4 \cdot F_P \cdot R_{Kurbel}$ = notwendig Energie für eine komplette Pedalumdrehung.

$$\boxed{E_{K\,\text{für eine Umdrehung}} = 4 \cdot F_P \cdot R_{Kurbel}}$$

Übersetzung mit den Zahnrädern:

Zurückgelegter Weg s als Funktion des Kurbelwinkels ß. Es gilt:

$$\delta\beta \cdot r_{\text{Zahnrad vorne}} = \delta\varphi \cdot r_{\text{Zahnrad hinten}};\ \delta\varphi \cdot R_{\text{Hinterrad}} = \delta s, \text{ damit}$$

$$\delta s = R_{\text{Hinterrad}} \cdot \frac{r_{\text{Zahnrad vorne}}}{r_{\text{Zahnrad hinten}}} \cdot \delta\beta \quad \text{oder}$$

$$\boxed{s = R_{\text{Hinterrad}} \cdot \frac{r_{\text{Zahnrad vorne}}}{r_{\text{Zahnrad hinten}}} \cdot \beta}$$

Trittfrequenz u :

Mit der Formel S.6 gilt

$$\frac{ds}{dt} = R_{Hinterrad} \cdot \frac{r_{Zahnrad\,vorne}}{r_{Zahnrad\,hinten}} \cdot \frac{d\beta}{dt} \rightarrow \boxed{v = R_{Hinterrad} \cdot \frac{r_{Zahnrad\,vorne}}{r_{Zahnrad\,hinten}} \cdot 2 \cdot \pi \cdot u}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \text{Kreisfrequenz } \omega = 2 \cdot \pi \cdot u \text{ ; } u = \text{Trittfrequenz,}$$

$$\text{hier Dimension } 1/s = 60 \, \frac{\text{Umdrehungen}}{\text{min}}$$

Bem.: Die „Rollbedingung“ (siehe S.47) muss erfüllt sein dh. kein Gleiten.

Beispiel:

v= 25 km/h ; $R_{Hinterrad}$=0,7366 m/2 ; $r_{Zahnradvorne}$=0,10 m ;

$r_{Zahnradhinten}$=0,05 m ► u ~ 1,5/s ~ 90 Umdrehungen/min

Leistung P_K:

Nach Seite 5 ist

$$\Delta s(\text{eine Kurbelumdrehung}) = R_{Hinterrad} \cdot \frac{r_{Zahnradvorne}}{r_{Zahnradhinten}} \cdot 2\pi$$

Damit

$$P_K = \frac{v \cdot 4 \cdot F_p \cdot R_{Kurbel}}{\Delta s(\text{eine Kurbelumdrehung})}$$

$$\boxed{P_K = \frac{R_{Kurbel}}{R_{Hinterrad}} \cdot \frac{r_{Zahnradhinten}}{r_{Zahnradvorne}} \cdot \frac{2 \cdot F_P \cdot v}{\pi}}$$

Beispiel:

$R_{Hinterrad}$= 29´´/2 = 0,7366 m/2 ; $r_{Zahnrad\ vorne}$= 0,1 m ; $r_{Zahnrad\ hinten}$= 0,05 m ; R_{Kurbel}=0 ,17 m

Welche Wegstrecke Δs wird bei einer Kurbelumdrehung zurückgelegt ?

Nach Formel S. 5 Δs = 4,628 m, das entspricht einer Energie von

0,68 $F_p \cdot m$, auf 1 m kommt dann eine Energie von

$$\frac{1m \cdot 0,68 \cdot F_p \cdot m}{4,628 \cdot m}$$

Mit welcher Pedalkraft F_P muss man treten, um die Fahrtenergie E_F= 16,9 Nm nach Beispiel S.3 zu erreichen ?

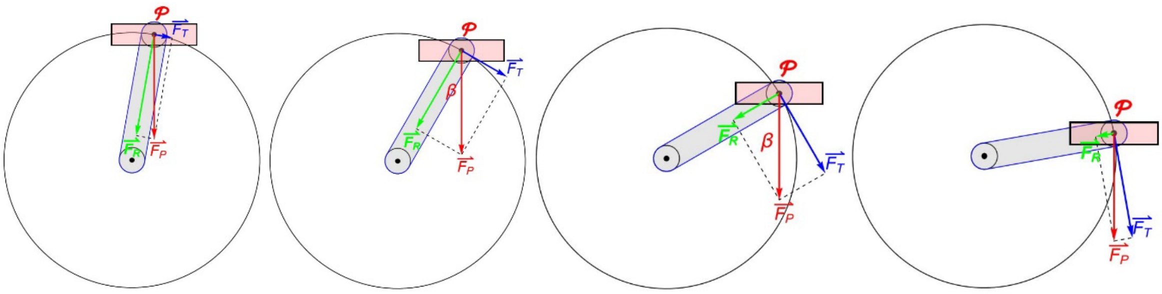
Nach dem Energiesatz erhält man

$$\frac{1\,\mathrm{m} \cdot 0{,}68 \cdot F_p \cdot \mathrm{m}}{4{,}628 \cdot \mathrm{m}} = 16{,}9\,\mathrm{N\,m} \rightarrow F_P = 115\,\mathrm{N}$$

Welche Leistung muss bei einer Geschwindigkeit von 25 km/h = 6,94 m/s erbracht werden ?

Nach Formel S.6 mit F_P= 115 N ist P_K~ 117 W

Drehmoment M_K an der Kurbel:



Das Drehmoment an der Kurbel ergibt sich nach den Bildern zu

$$M_K(\beta) = F_T \cdot R_{Kurbel} = F_P \cdot \sin(\beta) \cdot R_{Kurbel};\; M_{K\,max} = F_P \cdot R_{Kurbel};$$

dh. das Drehmoment ist abhängig vom Kurbelwinkel ß. Das mittlere Drehmoment $\overline{M}$ ist

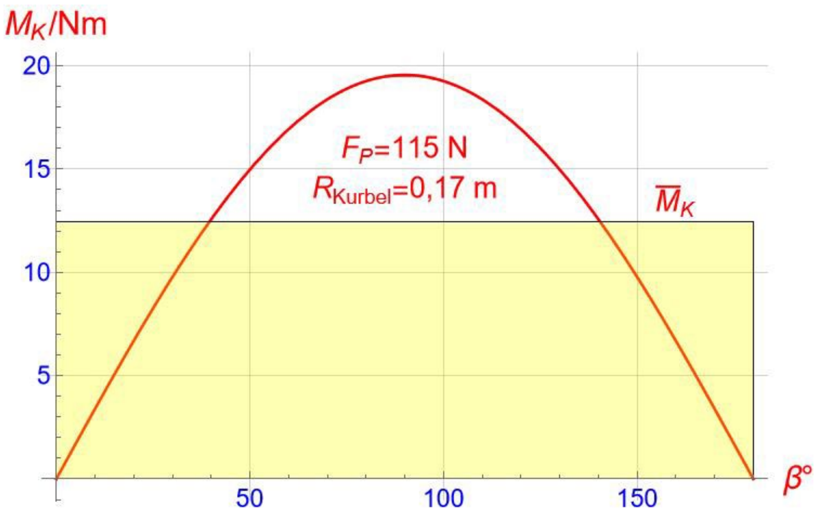
$$\boxed{\overline{M_K} = \frac{\int_0^{\pi} F_P \cdot R_{Kurbel} \cdot \sin(\beta)\, d\beta}{\pi} = \frac{2 \cdot F_P \cdot R_{Kurbel}}{\pi}}$$

Mit F_P =115 N und R_{Kurbel}=0,17 m ist $\overline{M}$ =12,4 Nm und M_{max}=19,6 Nm.

Die Leistung des Fahrers ist (ω_{Kurbel} = Kreisfrequenz der Kurbel)

$$\overline{P}_{Fahrer} = \overline{M}_K \cdot \omega_{Kurbel} = 4 \cdot F_P \cdot R_{Kurbel} \cdot u_{Kurbel}$$

$$\text{mit } \omega_{Kurbel} = 2 \cdot \pi \cdot u_{Kurbel};\ u_{Kurbel} = \text{Trittfrequenz} \leq \frac{2}{s}$$



Kettenzugkraft und Kraft auf das Hinterrad :

Welche maximale Kettenzugkraft erhält man bei F_P=115 N, R_{Kurbel}=0,17 m und $r_{Zahnradvorne}$ =0,1 m ?

$$M_{K\,max} = F_{Kette\,max} \cdot r_{Zahnradvorne} = F_P \cdot R_{Kurbel} \rightarrow \boxed{F_{Kette\,max} = F_P \cdot \frac{R_{Kurbel}}{r_{Zahnradvorne}}}$$

Antwort: 195,5 N

Welche maximale Kraft wirkt auf das Hinterrad, Reibungsverluste werden vernachlässigt ?

Es gilt nach S. 8

$$F_{Kette\,max} \cdot r_{Zahnradhinten} = F_{Hinterrad} \cdot R_{Hinterrad};$$

$$F_{Hinterrad} = \frac{F_{Kette\,max}}{R_{Hinterrad}} \cdot r_{Zahnradhinten}$$

$$\boxed{F_{Hinterrad} = F_P \cdot \frac{R_{Kurbel}}{R_{Hinterrad}} \cdot \frac{r_{Zahnradhinten}}{r_{Zahnradvorne}}}$$

Dabei gilt

$$\frac{z_{ZähneZahnradhinten}}{z_{ZähneZahnradvorne}} = \frac{\text{Trittfrequenz}}{\text{Frequenz}_{Zahnradhinten}} \approx \frac{r_{Zahnradhinten}}{r_{Zahnradvorne}}$$

Oder mit dem d´Alembert´sches Prinzip der virtuellen Verrückungen

$$\delta s = R_{Hinterrad} \cdot \frac{r_{Zahnradvorne}}{r_{Zahnradhinten}} \cdot \delta\beta$$

$$F_{Hinterrad} \cdot \delta s = F_T \cdot R_{Kurbel} \cdot \delta\beta = F_P \sin(\beta) \cdot R_{Kurbel} \cdot \delta\beta$$

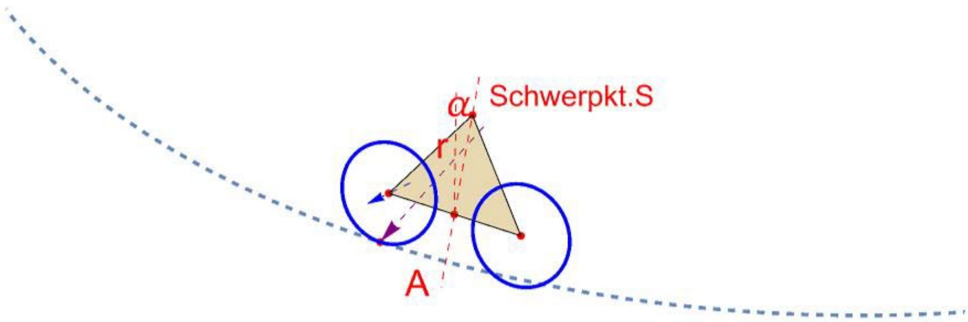
$$F_{Hinterrad} \cdot R_{Hinterrad} \cdot \frac{r_{Zahnradvorne}}{r_{Zahnradhinten}} \cdot \delta\beta = F_T \cdot R_{Kurbel} \cdot \delta\beta =$$

$$= F_P \sin(\beta) \cdot R_{Kurbel} \cdot \delta\beta$$

$$\boxed{F_{Hinterradmax} = F_P \cdot \frac{R_{Kurbel}}{R_{Hinterrad}} \cdot \frac{r_{Zahnradhinten}}{r_{Zahnradvorne}}}$$

Mit den Daten in Beispiel S. 6 $F_{Hinterradmax} = 26{,}54$ N

Zentrifugalkräfte

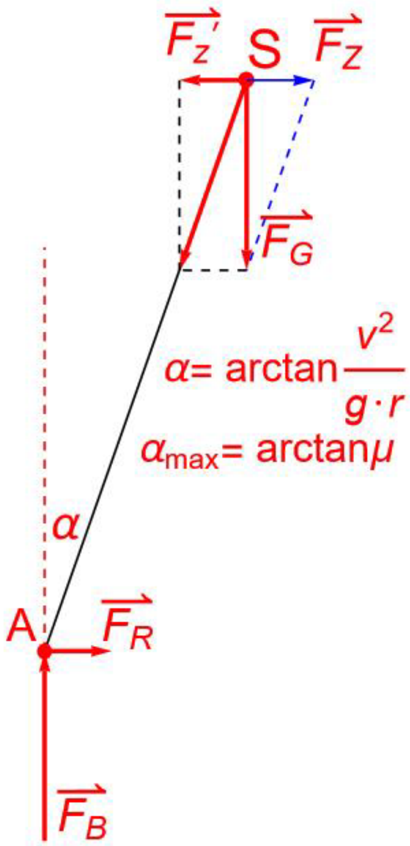


Beim Kurvenfahren in eine Kurve mit Radius r genügt es nicht, nur den Lenker zu drehen, man muss sich um den Winkel α neigen, um die Zentrifugalkraft $\vec{F}_z' = -\frac{m \cdot v^2}{r} \cdot \vec{e}_r$ zu kompensieren, $\vec{e}_r$ ist der Einheitsvektor in Richtung r. Der Neigungswinkel ergibt sich aus der Bedingung

$m \cdot g \cdot \tan(\alpha) = \text{Zentripetalkraft } F_Z \text{ nach innen} = \frac{m \cdot v^2}{r} =$

Zentrifugalkraft $F_{z'}$ nach außen zu

$$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{v^2}{r \cdot g} \text{ oder } \alpha = \arctan\left(\frac{v^2}{r \cdot g}\right)}$$



α = Neigungswinkel,

S = Schwerpunkt,

g= Erdbeschleunigung,

F_G = Gewichtskraft= mg

A=Auflagepunkt des Rades.

F_R=Reibungskraft $\geq mv^2/r$

F_B=Gegenkraft vom Boden.

Je größer die Geschwindigkeit v und je kleiner der Radius r ist, desto größer muss der Neigungswinkel α sein. Eine Straße mit dem Neigungswinkel α verhindert dabei das Rutschen nach außen oder innen. (*Sechstagerennen*…)

Beispiel:

Ein Radfahrer neigt sich bei einer Geschwindigkeit v= 25 km/h um 30°, welchen Radius muss die eingeschlagene Kurve haben, damit er nicht umkippt ?

$$r = \frac{v^2}{g \cdot \tan(\alpha)} = 8{,}5\,\text{m}$$

Damit der Fahrer nicht seitlich wegrutscht, muss

$$F_r = m \cdot g \cdot \mu_{Haft} \geq m \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow \mu_{Haft} \geq \frac{v^2}{r \cdot g} = \tan(\alpha)$$

$$\boxed{\arctan(\mu_{Haft}) = \alpha_{max}}$$

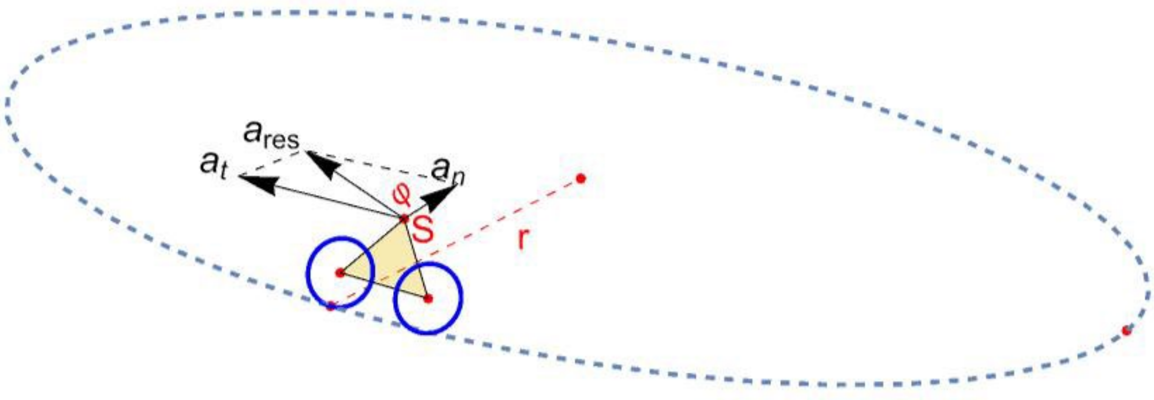
Ab dem Winkel a_{max} besteht seitliches Wegrutschen.

Material	μ	α_{max} °
Eis	0,1	5.7
〃	0,2	11.3
Loser Sand	0,3	16.7
〃	0,4	21.8
Rollsplit	0,7	26.6
Beton, Asphalt naß	0,4	31.0
〃	0,7	35.0
Beton, Asphalt trocken	0,8	38.7
〃	0,9	42.0

Eine Bahnüberhöhung kann das Wegrutschen verhindern.

Beispiel :

Ein Radfahrer soll aus dem Stand in 20 Sekunden reibungsfrei auf einer runden Bahn vom Radius 30 m eine Geschwindigkeit von 25 km/h erreichen. Mit welcher konstanten Beschleunigung in tangentialer Richtung a_t muss er dazu antreten, welche Zentripetalbeschleunigung a_n in normaler Richtung und welche resultierende Beschleunigung a_{res} ist dann nach 20 Sekunden vorhanden, wie groß ist der Winkel φ ?



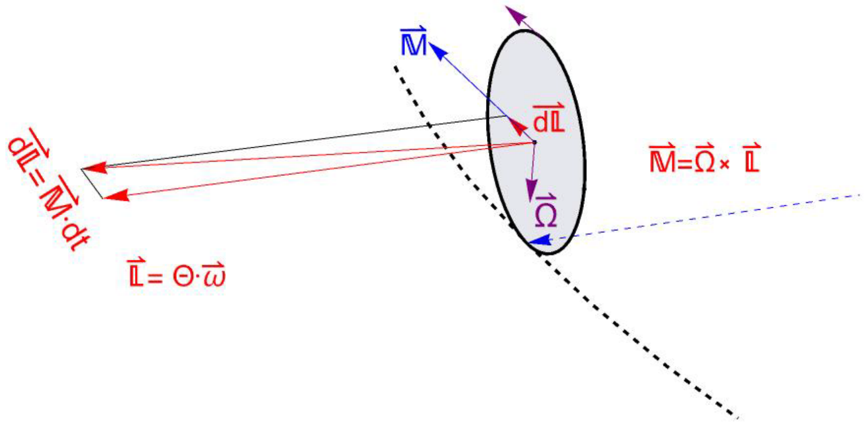
$$v = v_0 + a_t \cdot t \rightarrow a_t = \frac{(125/18) \cdot \frac{m}{s}}{20 \cdot s} \approx 0,35 \frac{m}{s^2}$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(125/18)^2 \cdot m^2 / s^2}{30 \cdot m} \approx 1,6 \frac{m}{s^2}$$

$$\vec{a}_{res} = \vec{a}_n + \vec{a}_t \,; a_{res} = \sqrt{a_n{}^2 + a_t{}^2} \approx 1,64 \frac{m}{s^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{a_t}{a_n} \approx 12,2°$$

Drehimpuls



Auf die rotierenden Räder wirken Kreiselkräfte („geführter Kreisel“), sie haben einen Drehimpuls in Richtung der Achse (Abb.) von

$\vec{L}=\Theta\cdot\vec{\omega}$ in Analogie zum Impuls $\vec{p}=m\cdot\vec{v}$ bei der Translation

und es gilt $\vec{M}=\dfrac{d\vec{L}}{dt}$ in Analogie zu $\vec{F}=\dfrac{d\vec{p}}{dt}=\dot{\vec{p}}=\dfrac{d(m\vec{v})}{dt}$

Θ ist das Trägheitsmoment mit einem Betrag von

~0,24 kgm^2 beim Fahrrad etwa und $\vec{\omega}$ die Kreisfrequenz, ein Vektor in Richtung der Drehachse mit dem Betrag der Winkelgeschwindigkeit $\omega=\dfrac{d\varphi}{dt}=\dot{\varphi}$.

Beispiel:

$v = 25$ km/h = 6,94 m/s; $R_{Vorderrad} = 29''/2 = 0{,}7366$ m/2 = 0,368 m;
Umfang der Vorderrades U =

$$U = 2 \cdot R_{Vorderrad} \cdot \pi \rightarrow \omega = 2\pi \cdot \frac{v}{U} = \frac{18{,}85}{s}$$

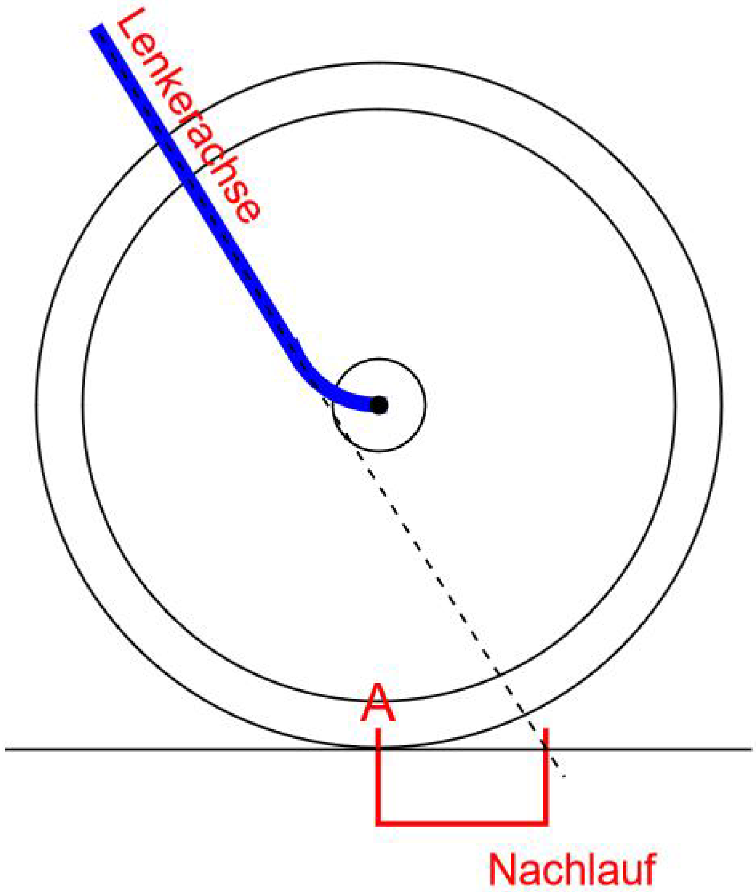
$$L = \Theta \cdot \omega = 0{,}24\ kgm^2 \cdot \frac{18{,}85}{s} = 4{,}52 \frac{kgm^2}{s}$$

Neigt sich der Fahrer z.B. nach rechts, erfährt das Rad eine Kippung nach rechts und ein Drehmoment M (Abb.) und dadurch einen Zusatzdrehimpuls dL, dem es als Kreisel durch Drehung nach rechts ausweicht, also in die richtige Richtung zum Stabilisieren beim Freihändigfahren. Allerdings ist der Effekt relativ gering, es ergibt sich nach (Ableitung S.28)

$$\boxed{M = \Theta \cdot \omega \cdot \Omega = \Theta \cdot \frac{v}{r_{Rad}} \cdot \frac{v}{r}}$$

r ist der Radius der Kurve. Je größer die Geschwindigkeit ist, desto leichter geht das Freihändigfahren.

Der eigentliche Effekt für das Freihändigfahren ist aber der Nachlauf nach Abb. Neigt sich der Fahrer nach rechts, dreht sich das Rad um A auch nach rechts.



<u>Beispiel:</u>

$r_{Vorderrad}$= 0,368 m, v= 25 km/h= 6,95 m/s, r= 30 m, θ= 0,25 kgm²

$M_{Kipp} \sim 1\ kg\ m^2/s^2 \sim 1\ N\ m$

Steigungen

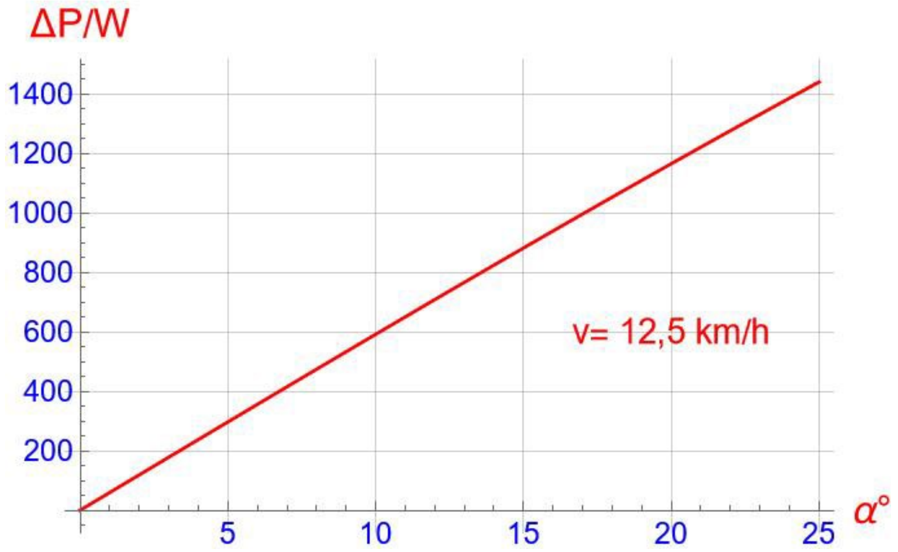
Bisher wurden meist mit α= 0° Steigungen nicht berücksichtigt. Vernachlässigt man die Rollreibung und den Luftwiderstand in den Formeln S. 3, so erhält man als Zusatzbeitrag für die Überwindung von Steigungen

$$\Delta E = m \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot s \quad \text{bzw.}\ \Delta P = m \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot v$$

<u>Beispiel:</u>

m=100 kg (Fahrrad und Fahrer), v= 12,5 km/h = 3,47 m/s, α= 15°

ΔP= 881,6 W; $\Delta E_{1\,m}$= 253,9 Nm ; siehe auch S. 4



Aufgabe:

Der Fahrer (100 kg Gesamtmasse) fährt mit einer konstanten Leistung von 900 W einen Berg mit einer Neigung von $\alpha=15°$ reibungsfrei hinauf. Welche Geschwindigkeit v muss er einhalten ?

$$P = m \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot v \rightarrow v = \frac{P}{m \cdot g \cdot \sin(\alpha)} = \frac{900\,\mathrm{W}\left(= \mathrm{kgm^2/s^3}\right)}{100\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \sin(15°)}$$

$$\approx 12{,}74\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Zusätzliche Energie bei Höhendifferenz h :

sin(α)·s in der Formel S.16 ist die Höhendifferenz h, die beim Zurücklegen der Strecke s erreicht wird. Damit ist

$$\boxed{\Delta E_{\text{Höhe}} = m \cdot g \cdot h}$$

Beispiel:

h=100 m; m= 100 kg (Masse Fahrer + Rad); g= 9,81 m/s²;

ΔE=98100 Nm= 98100 Ws = (98100/3600) Wh = 27,25 Wh

Dazu kommt der Verbrauch der Energie durch Reibung und Luftwiderstand (S.2) und der Abzug der Energie durch eigenes Treten, wenn diese Energie ΔE einer Batterie entnommen wird (300 – 700 Wh im allgemeinen)

Drehmoment an der Kurbel

Aus den Formeln S.3, 5 und 7 lässt sich das mittlere Drehmoment und die Pedalkraft F_P an der Kurbel berechnen:

$$\left\{m\cdot g\cdot\left[\mu\cdot\cos(\alpha)+\sin(\alpha)\right]+\frac{2}{3}\cdot c_W\cdot\rho_L\cdot A\cdot v^2\right\}\cdot s\,;\overline{M}_K=\frac{\int_0^{\pi}F_P\cdot R_{Kurbel}\cdot\sin(\beta)\,d\beta}{\pi}=\frac{2\cdot F_P\cdot R_{Kurbel}}{\pi}$$

$$E_{K\text{für eine Umdrehung}}=4\cdot F_P\cdot R_{Kurbel};\ s=R_{Hinterrad}\cdot\frac{r_{Zahnrad\,vorne}}{r_{Zahnrad\,hinten}}\cdot\beta$$

In die Formel für E_F Seite 3 wird $s=R_{Hinterrad}\cdot\frac{r_{Zahnrad\,vorne}}{r_{Zahnrad\,hinten}}\cdot 2\cdot\pi$

eingesetzt, das ist der Weg, den das Rad bei einer vollen Umdrehung der Kurbel zurücklegt; auf der rechten Seite wird die dazu notwendige Energie an der Kurbel für eine volle Umdrehung = $4\cdot F_P\cdot R_{Kurbel}$ (Seite 5 und 6) eingesetzt. Nach einigen Zwischenrechnungen erhält man die folgenden Formeln für die notwendige Pedalkraft und Drehmoment an der Kurbel:

$$\boxed{F_P=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{r_{Zahnradvorne}}{r_{Zahnradhinten}}\cdot\frac{R_{Hinterrad}}{R_{Kurbel}}\cdot\left[2\cdot c_W\cdot\rho_L\cdot A\cdot v^2+3\cdot m\cdot g\cdot\left(\mu\cos\alpha\underset{abwärts}{\overset{aufwärts}{\pm}}\sin\alpha\right)\right]}$$

$$\boxed{\overline{M}_K=\frac{1}{3}\cdot\frac{r_{Zahnradvorne}}{r_{Zahnradhinten}}\cdot R_{Hinterrad}\cdot\left[2\cdot c_W\cdot\rho_L\cdot A\cdot v^2+3\cdot m\cdot g\cdot\left(\mu\cos\alpha\underset{abwärts}{\overset{aufwärts}{\pm}}\sin\alpha\right)\right]}$$

$$\overline{M}_K\cdot\omega=\overline{M}_K\cdot 2\cdot\pi\cdot u=P=\text{erbrachte Leistung am Pedal};\ u=\text{Trittfrequenz},$$
$$\omega=\text{Kreisfrequenz};\ \boxed{F_P=\frac{P}{4\cdot R_{Kurbel}\cdot u}}\ \text{mit}\ \overline{M}_K=\frac{2\cdot F_P\cdot R_{Kurbel}}{\pi};\ u\left(\frac{1}{s}\right)\rightarrow\text{S.7}$$

Mit Beschleunigung $a_S(t)$:

$$\boxed{F_P(t) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r_{Zahnradvorne}}{r_{Zahnradhinten}} \cdot \frac{R_{Hinterrad}}{R_{Kurbel}} \cdot \left[2 \cdot c_W \cdot \rho_L \cdot A \cdot \left(\int_0^t a_S(t')\,dt' \right)^2 + m \cdot g \cdot \left(\mu \cos\alpha \underset{abwärts}{\overset{aufwärts}{\pm}} \sin\alpha \right) + m \cdot a_S(t) \right]}$$

Aufgabe:

Ein Radfahrer mit Gesamtmasse 100 kg soll aus dem Stand in 20 s auf eine Geschwindigkeit von 25 km/h kommen (a_S = const), mit welcher Kraft F_P muss er in die Pedale treten und welches mittlere Drehmoment wird an der Kurbel benötigt ?

($r_{Zahnradvorne}$= 0,15 m, $r_{Zahnradhinten}$= 0,1 m, $R_{Hinterrad}$= 0,36 m,

R_{Kurbel}= 0,17 m, μ = 0,1 , α= 0, kein Luftwiderstand)

$$\rightarrow v(t) = \int_0^{\Delta t} a_S dt' = v_0 + a_S \cdot \Delta t \rightarrow 0 + a_S \cdot 20\,s = \frac{125}{18} \cdot \frac{m}{s}$$

$$a_S \approx 0{,}35\,\frac{m}{s^2} \qquad \rightarrow F_P \approx 663\text{ N} \approx 84\%\text{ des Fahrergewichts}$$

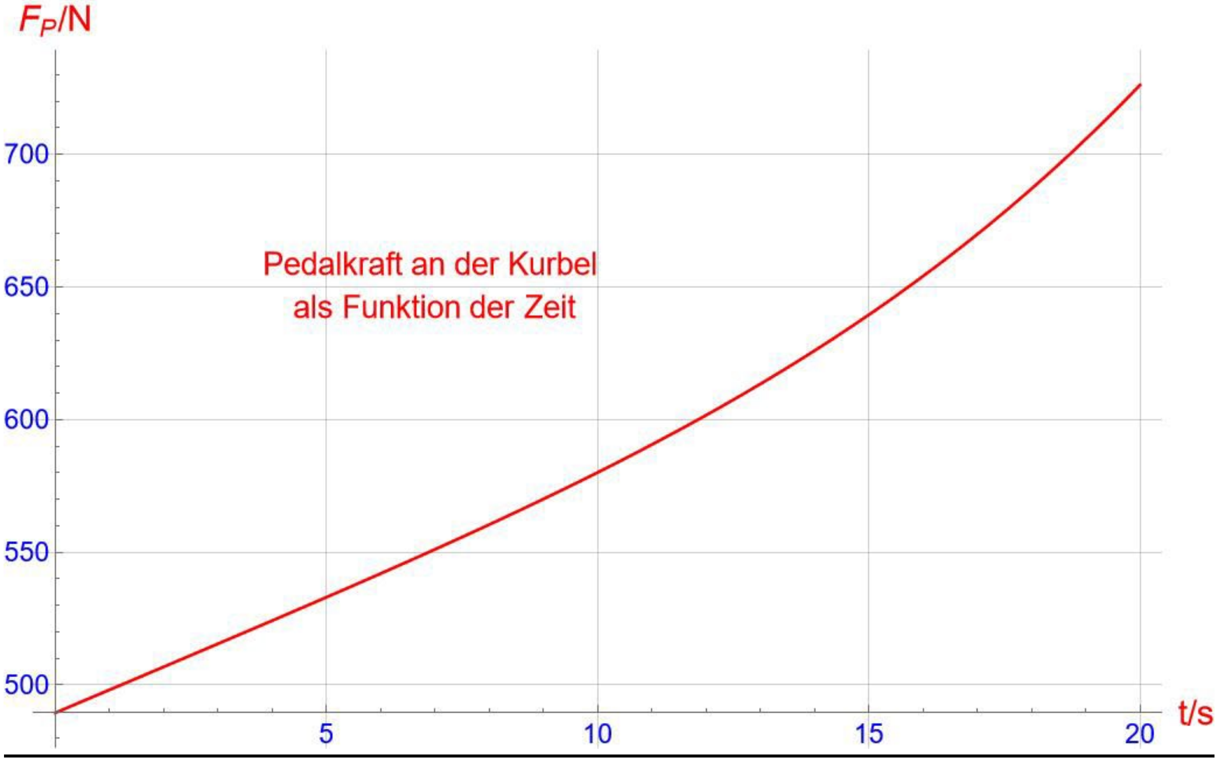
$$\text{bei 80 kg Masse des Fahrers. } \bar{M} \overset{S.7}{=} \frac{2 \cdot F_P \cdot R_{Kurbel}}{\pi} \approx 72\text{ Nm}$$

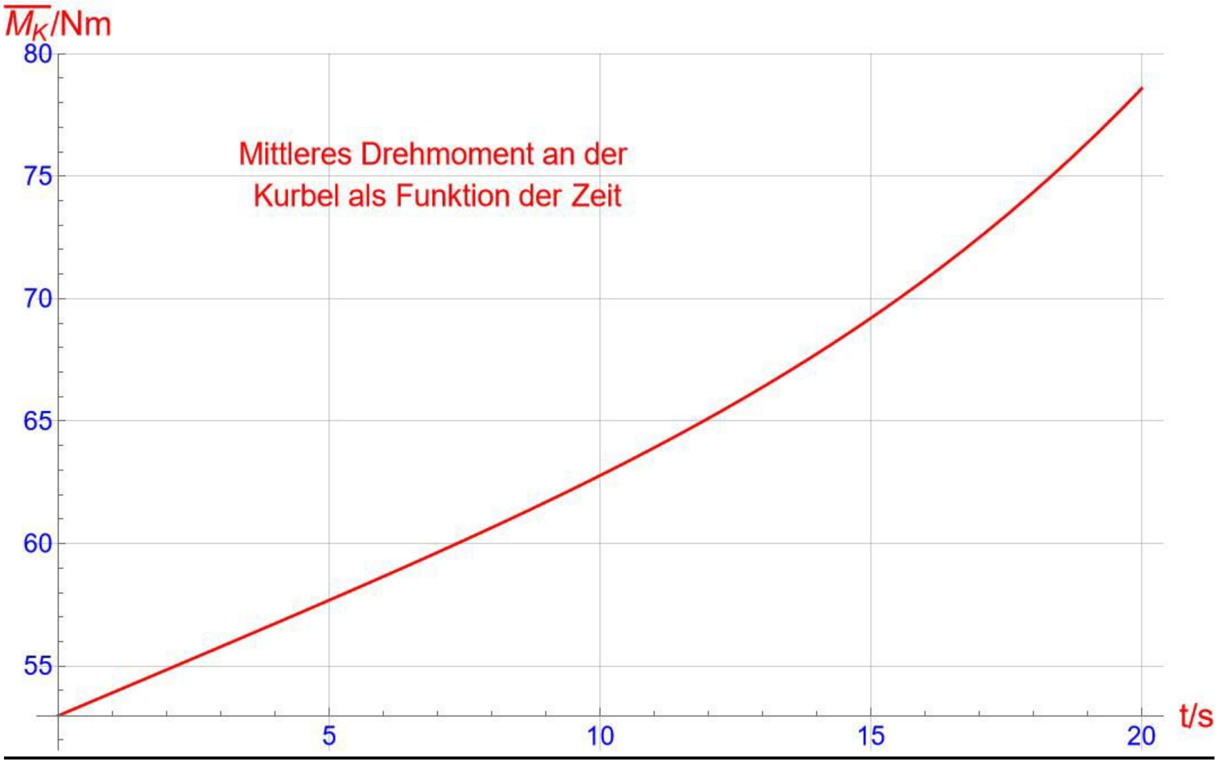
Beispiel mit zeitabhängiger Beschleunigung aus dem Stand:

c_W= 0,9; ρ_L =1,3 kg/m³; A= 0,45 m²; M=100 kg, sonst wie oben

$$a_S(t) = \frac{0.01736 \cdot m}{s^3} \cdot t\,; \int_0^t a_S(t')\,dt' \approx 0{,}0087 \cdot \frac{m}{s^3} \cdot t^2\,; F_P(t) \approx \frac{\left(489{,}5 \cdot s^4 + 8{,}66 \cdot s^3 \cdot t + 0{,}000395 \cdot t^4\right)}{s^6} \cdot kg \cdot m$$

$$\bar{M}(t) \approx \frac{\left(52{,}97 \cdot s^4 + 0{,}937 \cdot s^3 \cdot t + 0{,}000043 \cdot t^4\right)}{s^6} \cdot kg \cdot m^2$$


F_P/N
700
650
600
550
500
Pedalkraft an der Kurbel
als Funktion der Zeit
5
10
15
20
t/s


$\overline{M_K}$/Nm
80
75
70
65
60
55
Mittleres Drehmoment an der
Kurbel als Funktion der Zeit
5
10
15
20
t/s

Mit Anhänger:

In die erste Formel für F_P wird die Kraft F_A für den Anhänger (Index A) nach S. 3 eingetragen mit entsprechendem Haftreibungskoeffizienten μ_A, m_A und A_A

$$F_A = \frac{2}{3} \cdot c_W \cdot \rho_L \cdot A_A \cdot v^2 + m_A \cdot g \cdot \left(\mu_A \cos\alpha \underset{\text{abwärts}}{\overset{\text{aufwärts}}{\pm}} \sin\alpha \right)$$

$$F_{PA} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{r_{\text{Zahnradvorne}}}{r_{\text{Zahnradhinten}}} \cdot \frac{R_{\text{Hinterrad}}}{R_{\text{Kurbel}}} \cdot$$
$$\left\{ 2 \cdot (A + A_A) \cdot c_W \cdot \rho_L \cdot v^2 + 3 \cdot g \cdot \left[(m \cdot \mu + m_A \cdot \mu_A) \cos\alpha \underset{\text{abwärts}}{\overset{\text{aufwärts}}{\pm}} (m + m_A) \sin\alpha \right] \right\}$$

Beispiel:

Haftreibung $\mu, \mu_A = 0{,}4$, m=100 kg, Masse des Anhängers mit Zuladung m_A=50 kg, α=0, $r_{\text{Zahnrad vorne}}$= 0,10 m ; $r_{\text{Zahnrad hinten}}$= 0,25 m ;

$R_{\text{Hinterrad}}$= 0,36 m ,R_{Kurbel}= 0,17 m, α= 0° , die Luftreibung wird vernachlässigt.

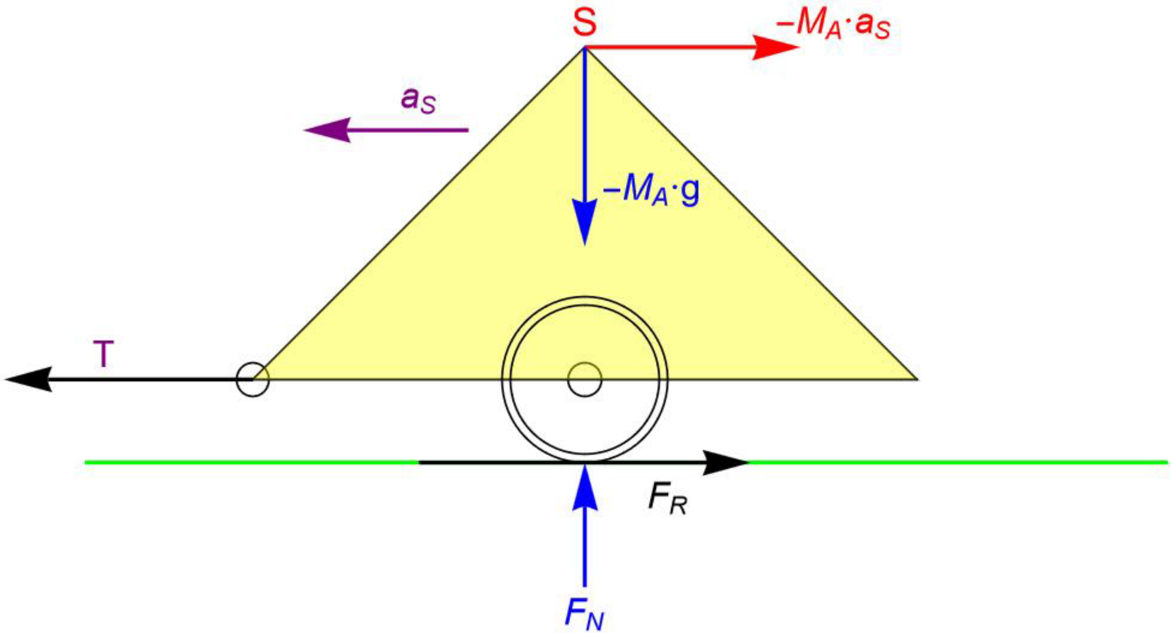
►Notwendige Pedalkraft F_{PA}~783 N, Anhänger allein F_A~261N

Anteil etwa 1/3. Notwendiges Drehmoment an der Kurbel

$$\bar{M}_{KA} = \frac{2 \cdot F_{PA} \cdot R_{\text{Kurbel}}}{\pi} \sim 84{,}8 \text{ Nm}$$

Kraft auf die Kupplung:

Die Kraft T auf die Kupplung und die Normalkraft F_N bei konstanter Beschleunigung a_S lässt sich anhand des Freikörperbildes des Anhängers bestimmen:



$$T - m_A \cdot a_S - F_R = 0; F_R = \mu \cdot F_N ; F_N - m_A \cdot g = 0 ;$$

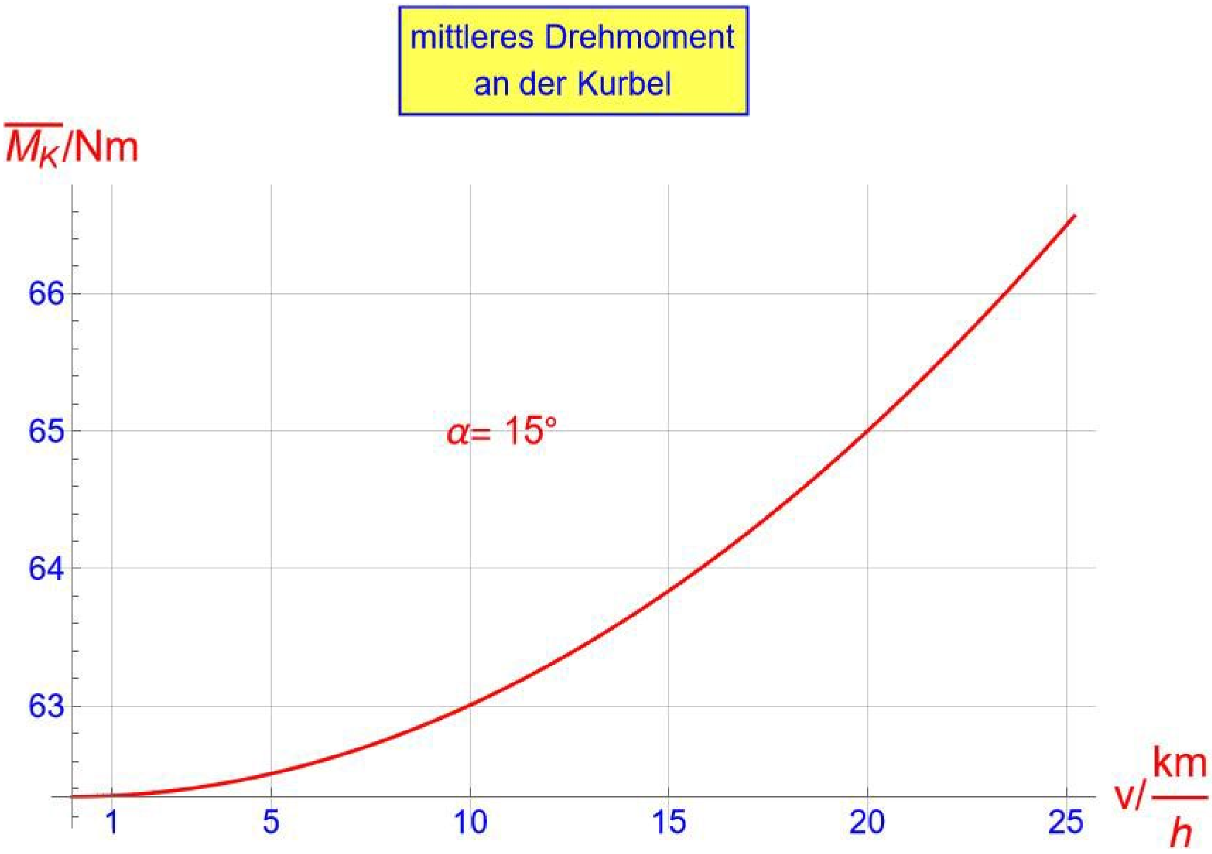
Mit den obigen Werten und $a_S \sim 0{,}35$ m/s² ergibt sich

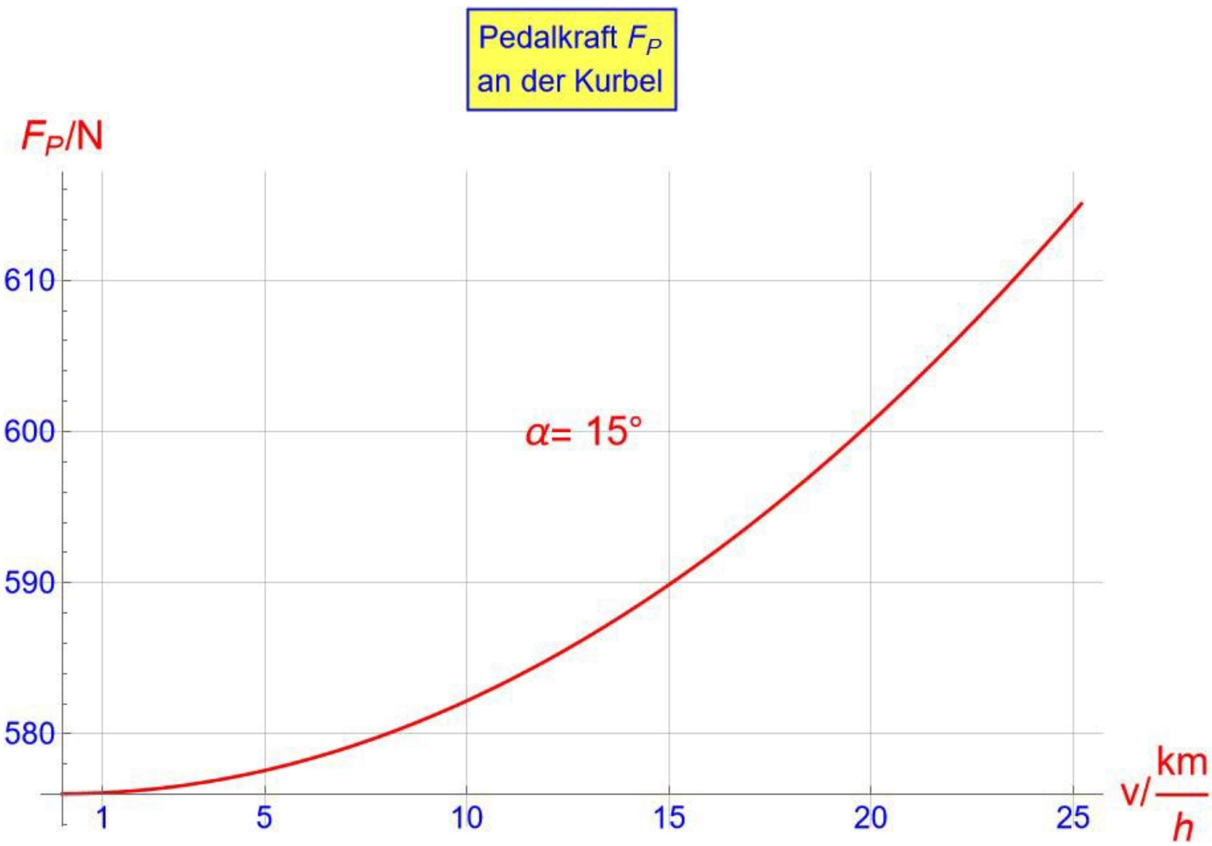
T~ 214 N und F_N~ 490,5 N

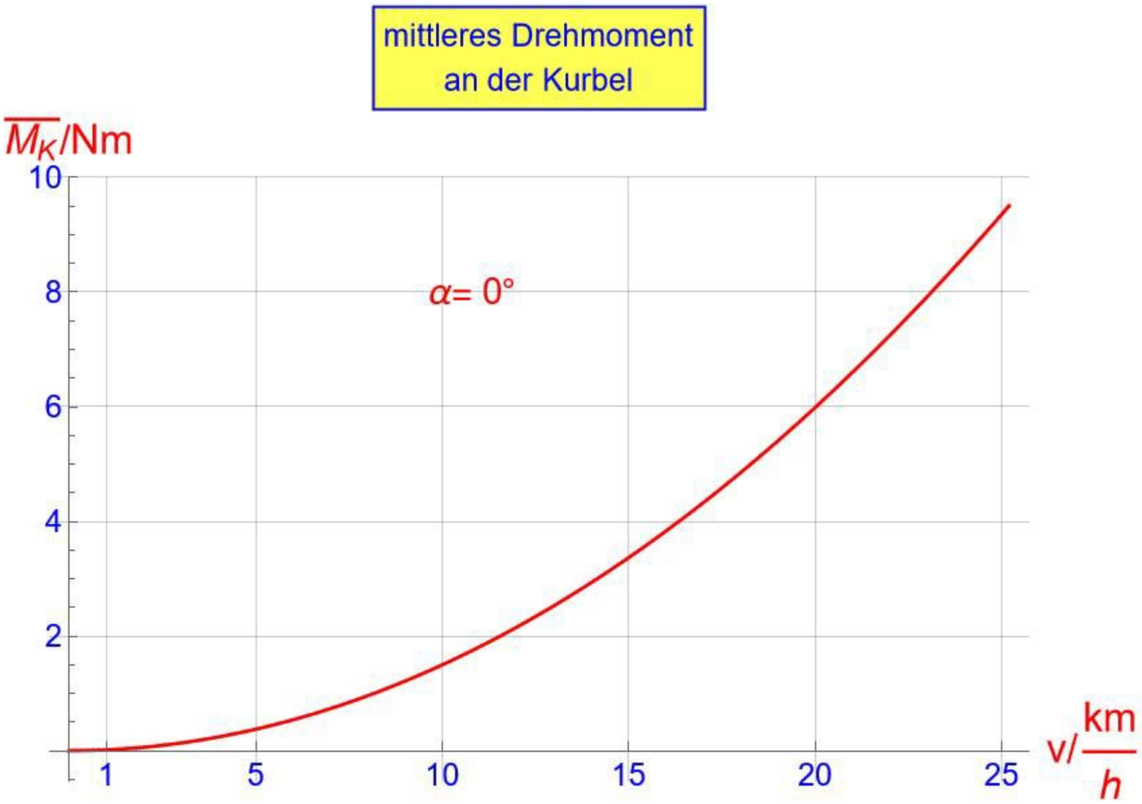
<u>*Beispiele anhand der folgenden Abbildungen* :</u>

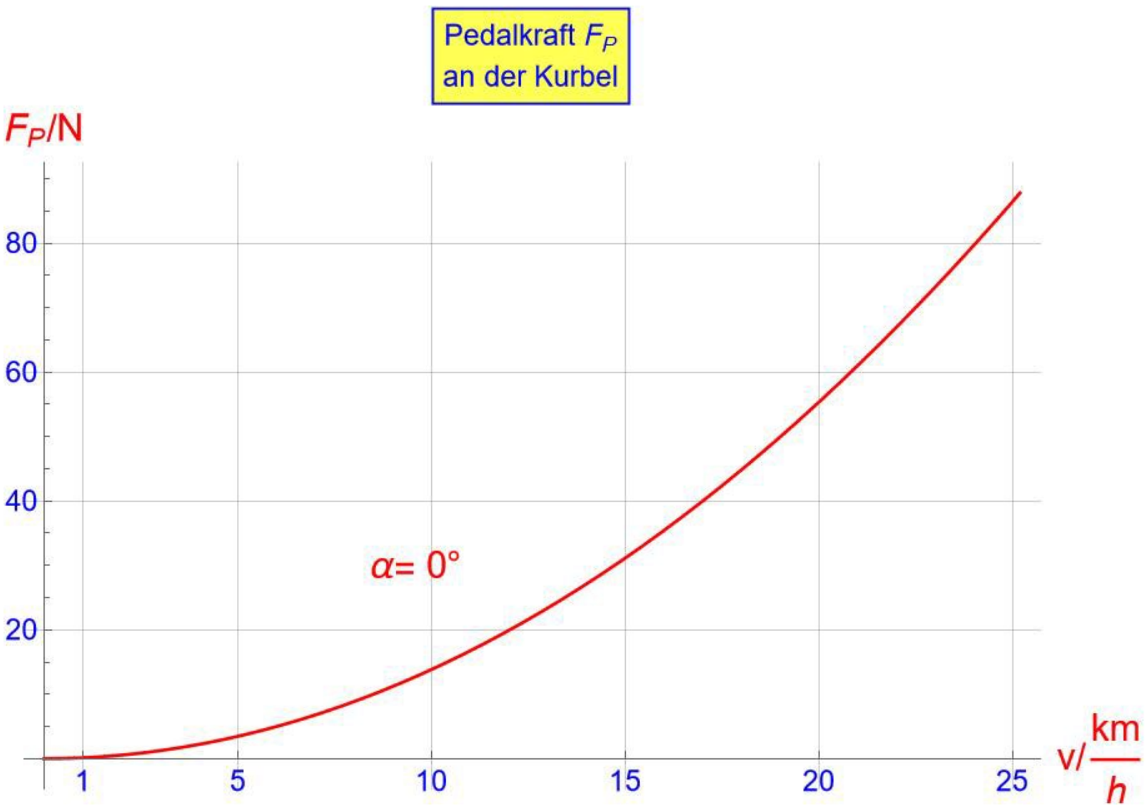
Daten von Beispiel S.6, $R_{Hinterrad}$= 29´´/2 = 0,7366 m/2 ; $\mu = 0$

$r_{Zahnrad\ vorne}$= 0,10 m ; $r_{Zahnrad\ hinten}$= 0,15 m ; R_{Kurbel}=0 ,17 m, α= 15° ►


mittleres Drehmoment
an der Kurbel
$\overline{M_K}$/Nm
66
65
64
63
α= 15°
1
5
10
15
20
25
v/ km/h


Pedalkraft F_P
an der Kurbel
F_P/N
610
600
590
580
α= 15°
1
5
10
15
20
25
v/ km/h





Dabei wurde $r_{Zahnradvorn}$= 0,15 m und $r_{Zahnradhinten}$= 0,1 m verwendet.

Die Abhängigkeit von der Übersetzung mit vorderem und hinterem Zahnrad sieht man in den folgenden Abbildungen:

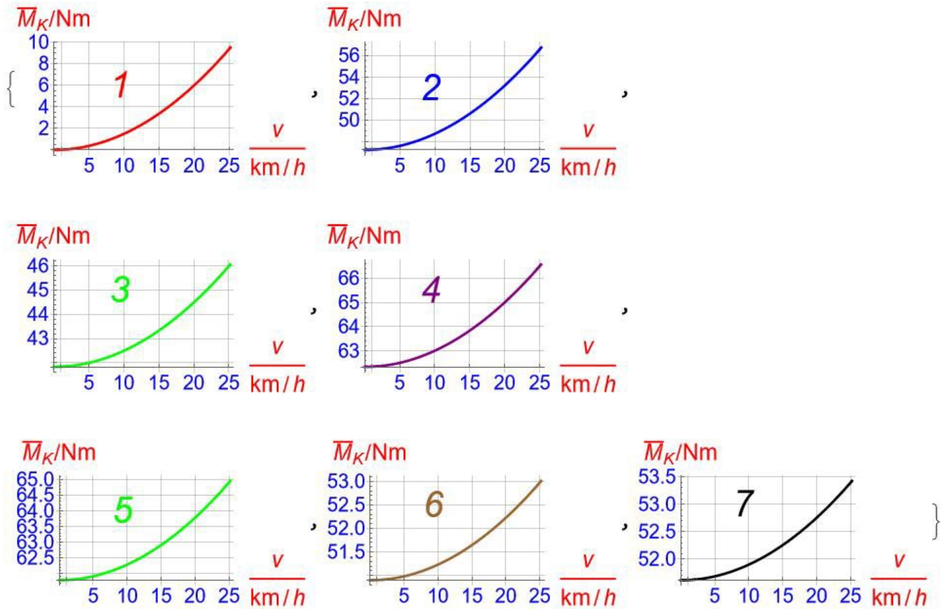


Bild-Nr.	1	2	3	4	5	6	7
Steigung	0	5 °	10 °	15 °	20 °	25 °	30 °
$r_{Zahnradvorne}$	0.15	0.15	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$r_{Zahnradhinten}$	0.1	0.1	0.15	0.15	0.2	0.3	0.35

Maximale mögliche Steigung mit Gewichtskraft

Setzt man für F_P in Formel S.20 ► 80kg·g= Gewichts-

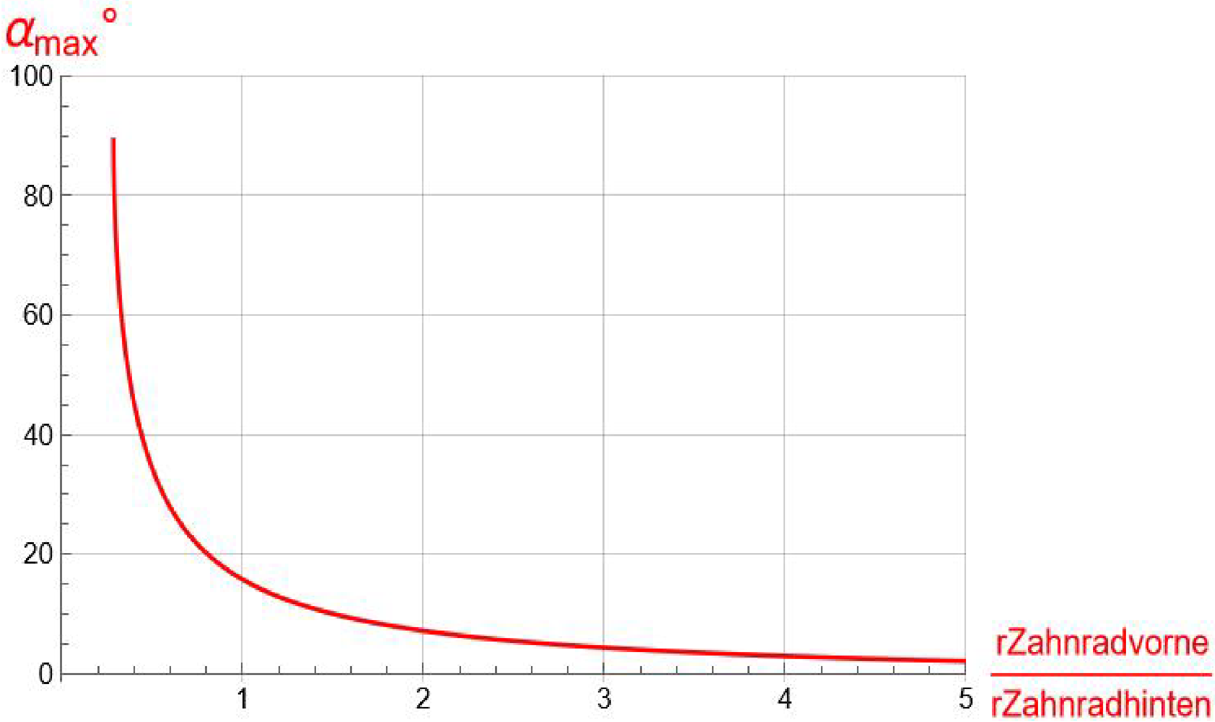
kraft mit g als Erdbeschleunigung ein, erhält man den maximalen Steigungswinkel α_{max} , der ohne Motor mit dieser Gewichtskraft erreicht werden kann

($\mu \approx 0$, $R_{Hinterrad}$ = (0,7366/2) m, R_{Kurbel} =0,17 m, c_W=0,9, $\rho_L = 1{,}3 \frac{kg}{m^3}$, A=0,45 m²)

$$\boxed{\alpha_{max} = \arcsin\left(\frac{0{,}294 \cdot r_{Zahnradhinten}}{r_{Zahnradvorne}} - \frac{0{,}0004472 \cdot s^2 \cdot v^2}{m^2}\right)}$$

Beispiel:

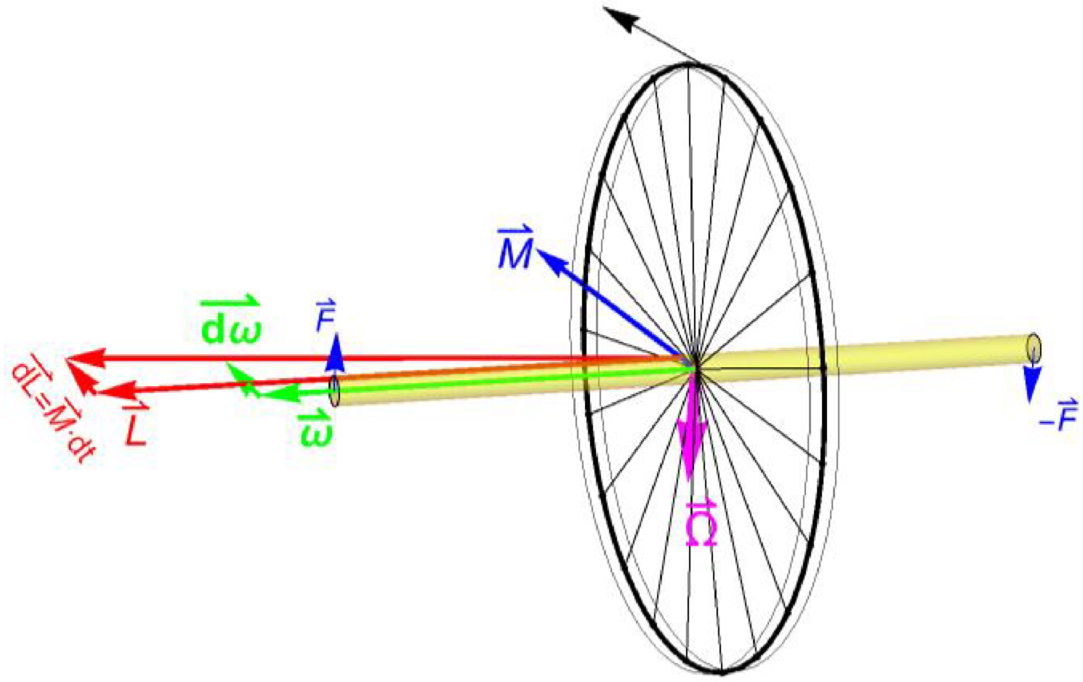
$r_{Zahnradvorne}$=0,1 m; $r_{Zahnradhinten}$=0,05 m; v= 12,5 km/h ; α_{max} ~ 8,14°



mit den Daten von oben.

Ableitungen:

Formel Seite 14,15



Versuch: *Man nimmt das Vorderrad und kippt es nach Abbildung mit F und – F mit dem Drehmoment M= 2·l_{Stange}·F , das Rad weicht nach rechts mit einer Präzessionsfrequenz aus, es gilt mit dem Einheitsvektor* $\vec{e}_\omega$ *in Richtung* $\vec{\omega}$

$$\vec{L} = \Theta \cdot \vec{\omega} = \Theta \cdot \omega \cdot \vec{e}_\omega$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\Theta}{dt} \cdot \omega \cdot \vec{e}_\omega + \Theta \cdot \vec{e}_\omega \cdot \frac{d\omega}{dt} + \Theta \cdot \omega \cdot \frac{d\vec{e}_\omega}{dt}$$

Die ersten beiden Glieder sind uninteressant, weder Das Trägheitsmoment noch die Winkelgeschwindigkeit ändern sich, dh.

$$\vec{M} = \Theta \cdot \omega \cdot \frac{d\vec{e}_\omega}{dt}; \; d\vec{e}_\omega \text{ und } d\vec{L} \text{ sind wegen } \vec{L} = \Theta \cdot \vec{\omega}$$

$$\text{parallel zu } \vec{M}\,; \; \frac{\left|d\vec{e}_\omega\right|}{dt} = \Omega = \text{Präzessionskreisfrequenz}$$

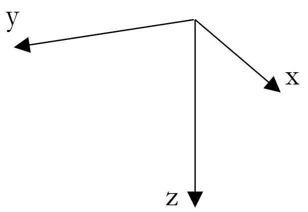
$$\Omega = \frac{M}{L} = \frac{M}{\Theta \cdot \omega} \text{ oder nach Abbildung}$$

$$\boxed{\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L} = \vec{\Omega} \times \Theta \cdot \vec{\omega}\,;\, \vec{\Omega} = \text{Präzessionskreisfrequenz}}$$

$$\vec{\omega} \perp \vec{\Omega} \text{ daher } M = \Theta \cdot \omega \cdot \Omega$$

Das Rad vollführt bei konstantem Einwirken des Drehmomentes M eine Drehung = Präzession mit der Kreisfrequenz Ω *(„geführter Kreisel“).*

Siehe Hans J. Paus, Physik in Experimenten und Beispielen, Hanser, S.106



$$\frac{d\vec{e}_\omega}{dt} = \dot{\vec{e}}_y = \overbrace{\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_z \times \vec{e}_y}^{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}} = \overbrace{\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_{-x}}^{\vec{e}_z \perp \vec{e}_y} = \Omega \cdot \vec{e}_{-x}$$

$$\frac{\left|d\vec{e}_\omega\right|}{dt} = \Omega$$

Aufgabe:

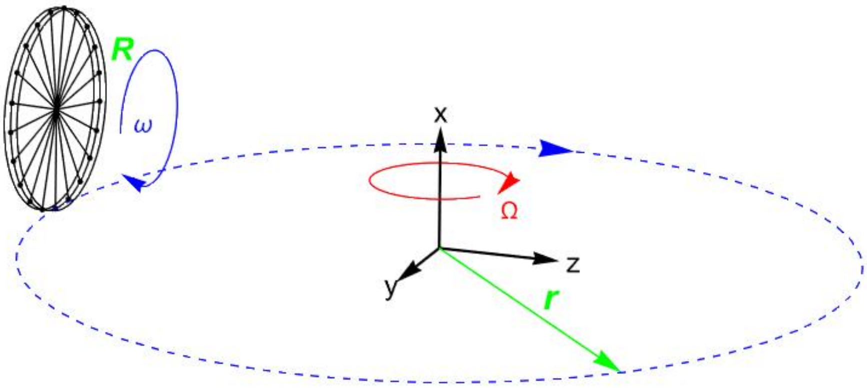
Ein Fahrer fährt mit v= 25 km/h in eine Kurve mit r= 20 m, das Vorderrad hat einen Durchmesser von 0,7 m und ein Trägheitsmoment von θ= 0,15 kg m². Wie groß ist das kippende Drehmoment M ?

$$M = \Theta \cdot \omega \cdot \Omega = \Theta \cdot \frac{v}{R_{\text{Vorderrad}}} \cdot \frac{v}{r}$$

$$= 0{,}15\ \text{kgm}^2 \cdot \frac{6{,}94\ \text{m/s}}{0{,}35\ \text{m}} \cdot \frac{6{,}94\ \text{m/s}}{20\ \text{m}} \approx 1\ \text{Nm}$$

Ein relativ geringes Kippmoment als Hilfe zum Freihändig Fahren gegenüber dem Nachlauf S.15.

Vektorielle Darstellung: Nach den umrandeten Formeln (S.24, S.27) und der Abbildung gilt:



$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L} = \begin{pmatrix} -\Omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Theta_x & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_y & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Omega \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\Theta_z \cdot \omega \cdot \Omega \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\Theta_z \cdot \Omega^2 \cdot \frac{r}{R} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{M}$ zeigt in die -y-Richtung mit einem Betrag (siehe auch F. Kuypers, Klassische Mechanik) $\Theta_z \omega \cdot \Omega = \Theta_{Rad} \omega \cdot \Omega = \Theta_{Rad} \cdot \Omega^2 \cdot \frac{r}{R}$ wegen $\omega = \frac{r}{R} \cdot \Omega$

Das Drehmoment $\vec{M}$ wird realisiert durch $\vec{R} \times \vec{F}_{RH}$, $\vec{R}$ ist der Vektor vom Radmittelpunkt zum Auflagepunkt des Rades und $\vec{F}_{RH}$ die Haftreibungskraft.

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_{RH} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_{RH} \cdot R \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\Theta_z \cdot \omega \cdot \Omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

dh. die Haftreibungskraft ist $F_{RH} = \dfrac{\Theta_z \cdot \omega \cdot \Omega}{R}$

Aufgabe:

Das abgebildete Rad hat eine Masse von 1,5 kg und ein Trägheitsmoment θ = 0,15 kg m². Die masselose Radstange lässt sich um A drehen, der Abstand A-Radmitte beträgt 1 m. Mit welcher Frequenz und in welcher Richtung präzessiert das Rad, wenn es sich mit u = 3 Umdrehungen pro Sekunde dreht ?

Lösung:

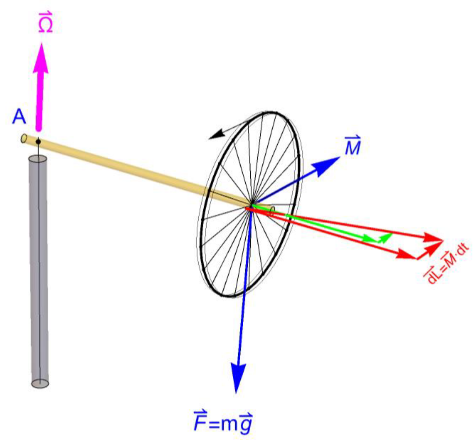
$m \cdot g \cdot l = \Theta \cdot \omega \cdot \Omega \; ; \; \omega = u \cdot 2 \cdot \pi$

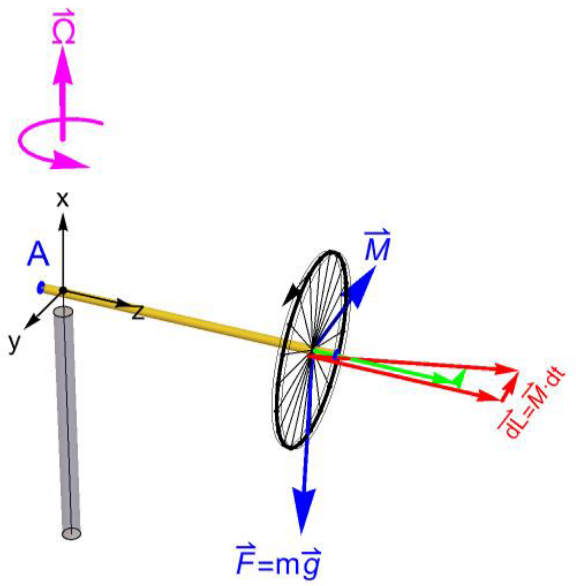
$\Omega = \dfrac{5,2}{s} \; ; \; u_\Omega = \dfrac{0,83}{s} \; ;$

Vektoriell:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -mgl \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Theta_x & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_y & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{Rad} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Omega \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mgl \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\Theta_{Rad} \omega \Omega \\ 0 \end{pmatrix}$$



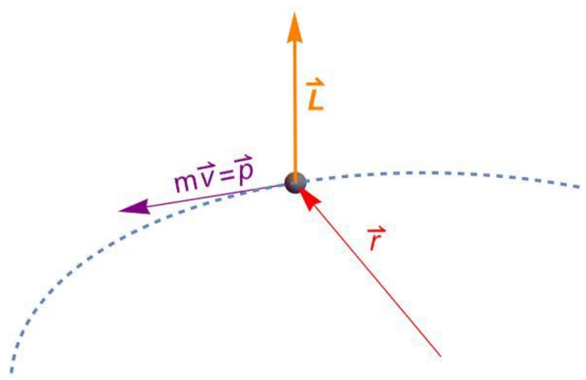


Formel S. 13,14

$$\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}$$

Definition des

Drehimpulses L :



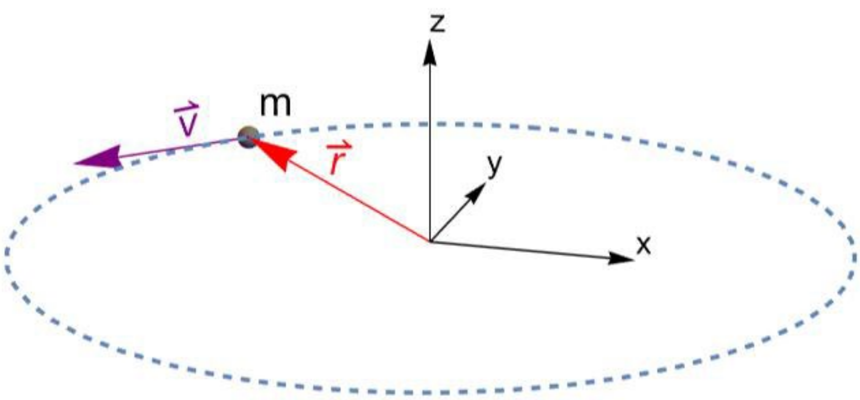
$$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}}$$

L steht senkrecht
auf dem Ortsvektor r und dem Impuls p.

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p}) = \dot{\vec{r}}\times\vec{p} + \vec{r}\times\dot{\vec{p}} = \overbrace{\vec{v}\times(m\cdot\vec{v})}^{0 \text{ da } \vec{v}\|\vec{v}} + \vec{r}\times\vec{F}$$

$$\rightarrow \boxed{\dot{\vec{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$

<u>Aufgabe:</u>



Nach Abbildung führt die Masse m = 0,2 kg eine Kreisbewegung mit dem Radius r = 1 m und der Geschwindigkeit 0,2 m/s aus. Bestimmen Sie vektoriell den Drehimpuls L mit Richtung und Betrag.

Lösung: vereinfacht, da bei der Kreisbewegung $\vec{r}\perp\vec{v}$ ▶ L = r·m·v =

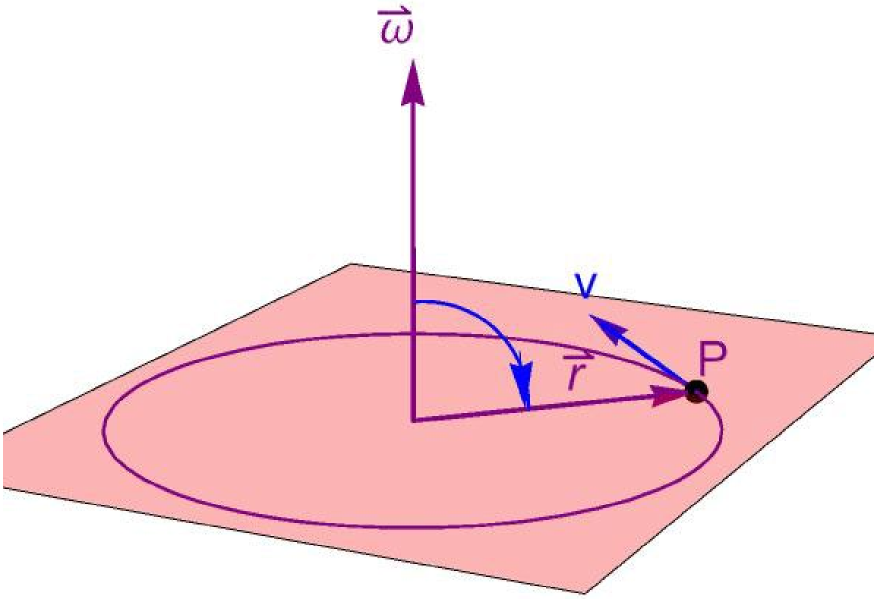
0,04 kg m²/s =0,04 Nms senkrecht nach oben weisend.

Vektoriell:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{v} = \begin{pmatrix} -v\sin(\omega t) \\ v\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}; \omega = \text{Kreisfrequenz} = \frac{v}{r}$$

$$\vec{L} = \vec{r}\times m\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m\cdot r\cdot v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,04\text{Nms} \end{pmatrix} \quad \text{in } z-\text{Richtung}$$

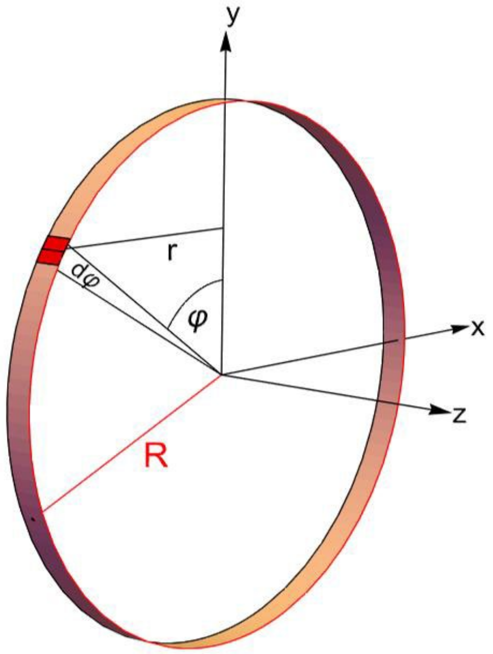
$$\boxed{\vec{\omega}\times\vec{r}=\vec{v}}$$



Die Balance beim normalen Fahren wird durch ständiges „Pendeln“ erreicht, dh. beim Kippen wird durch die Lenkung der Schwerpunkt in Richtung Verbindungslinie Vorder-Hinterrad verschoben.

Trägheitsmoment Θ

Ausgehend vom Trägheitsmoment einer Masse m auf einer Kreisbahn mit Radius r (S.27) $\Theta = m \cdot r^2$ nähert man das Rad einem schmalen Ring der Gesamtmasse m am Umfang an. (Abb.) Die Masse des roten Wegelements in der Abb. ist $\frac{m}{2 \cdot \pi \cdot R} \cdot R \cdot d\varphi$. Wird das Rad um die z-Achse gedreht, ist R der konstante Abstand zur Drehachse und damit



$$\Theta_{zz} = \frac{m}{2\pi R}\int_0^{2\cdot\pi} R^2 \cdot R d\varphi =$$

$$m \cdot R^2$$

Bei Drehung um die x – oder y – Achse ist der Abstand zur Drehachse $r = R \cdot \sin\varphi$ und damit $\Theta_{xx} = \Theta_{yy} =$

$$\frac{m}{2\pi R}\int_0^{2\cdot\pi} (R\sin\varphi)^2 \cdot R \cdot d\varphi =$$

$$\frac{m \cdot R^2}{2 \cdot \pi}\int_0^{2\cdot\pi} \sin^2\varphi \cdot d\varphi$$

$$= \frac{m \cdot R^2}{2}$$

<u>Aufgabe:</u> Das abgebildete Rad wird mit der Kreisfrequenz ω um die y-Achse gedreht. Stellen Sie allgemein den Vektor Drehimpuls dar.

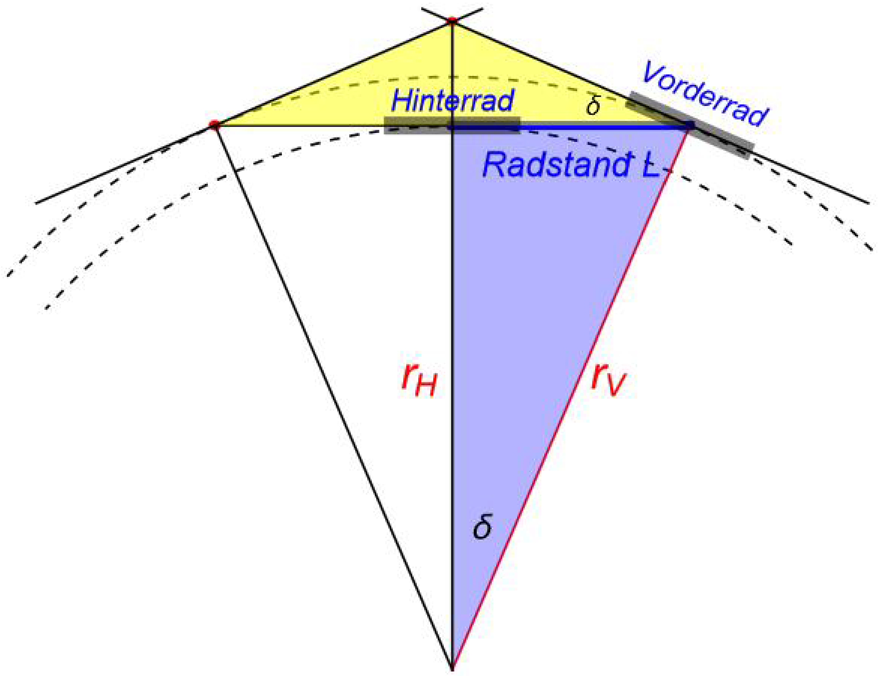
Lösung:

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} \frac{m}{2}R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{2}R^2 & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{m}{2}R^2\omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gemessen kann das Trägheitsmoment durch Aufhängen des Rades an einer Schneide und Beobachtung der Pendelbewegungen, siehe

https://hingsammer.de/phpraktikum/phpraktikum.html

Lenkeinschlag δ



Der *Lenkeinschlagwinkel* (Drehwinkel der Lenkstange) ergibt sich nach der Abbildung zu

$$\sin\delta = \frac{L}{r_V} \text{ oder } \delta = \arcsin(\frac{L}{r_V}) \text{ bez. } \delta = \arctan(\frac{L}{r_H})$$

$$r_H \approx r_V \text{ bei größeren Kurvenradien r, } \delta \approx \frac{L}{r_V} \approx \frac{L}{r_H} \approx \frac{L}{r}$$

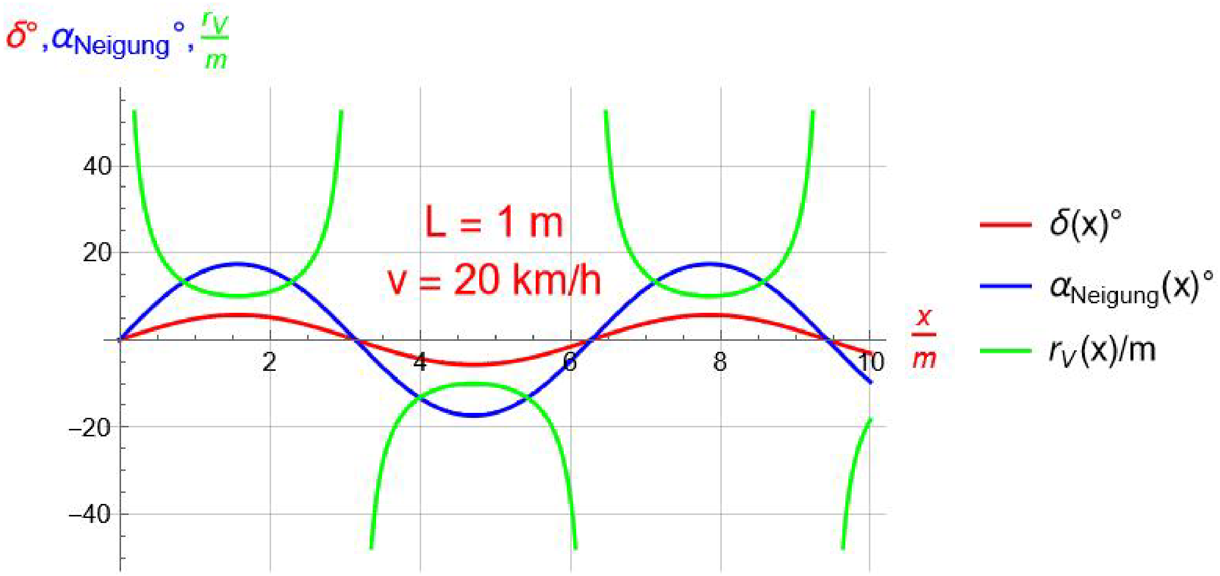
L ist der Radstand, der Abstand von Vorder- und Hinterradachse. Eingesetzt in die Formel für den Neigungswinkel α Seite 10, ergibt sich

$$\tan\alpha = \frac{v^2 \cdot \delta}{g \cdot L} \text{ oder } \alpha = \arctan(\frac{v^2 \cdot \delta}{g \cdot L})$$

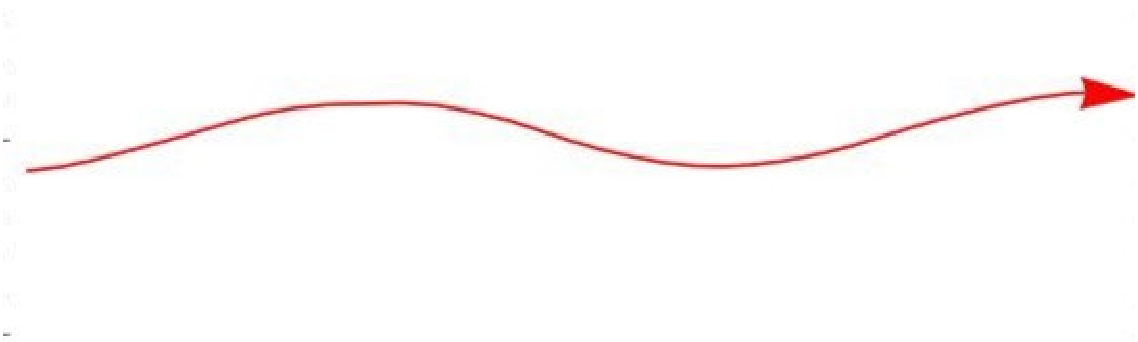
Der notwendige Neigungswinkel hängt auch vom Radstand ab.

Beispiel S. 11: v=25 km/h, α=30°, r = 8.5 m, L=1 m ▶ $\delta \approx 6°$

Verwendet man als näherungsweisen Lenkeinschlag in Abhängigkeit vom zurückgelegtem Weg x beim „Pendeln“ eine Sinuskurve, so erhält man als Zusammenhang von Lenkeinschlag δ, Neigungswinkel α und Kurvenradius r den folgenden Verlauf.



Beim Fahren in Sand lassen sich die Schlangenlinie des Vorderrades und die kleinere des Hinterrades erkennen.



Bremsweg

Ein Radfahrer fährt einen Berg mit der Neigung α herunter und legt eine Vollbremsung mit blockierenden Rädern hin. Wie weit rutscht er, sofern er einen Sturz vermeiden kann ?

Zur kinetischen Energie $\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2$ ist noch die Energie des Hangabtriebes auf dem Weg zu addieren und das gleichzusetzen der Gleitreibungskraft mal dem Rutschweg s.

$$E_{kin} + F_H \cdot s = F_R \cdot s$$

$$\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 + m\cdot g\cdot \sin(\alpha)\cdot s = \mu\cdot m\cdot g\cdot \cos(\alpha)\cdot s$$

$$\boxed{s = \frac{v^2}{2\cdot g\cdot[\mu\cdot\cos(\alpha)-\sin(\alpha)]}}$$

<u>Beispiel</u> : v=25 km/h, $\mu = 0{,}4$, α= 10°, g =9,81 m/s², s ~ 11 m

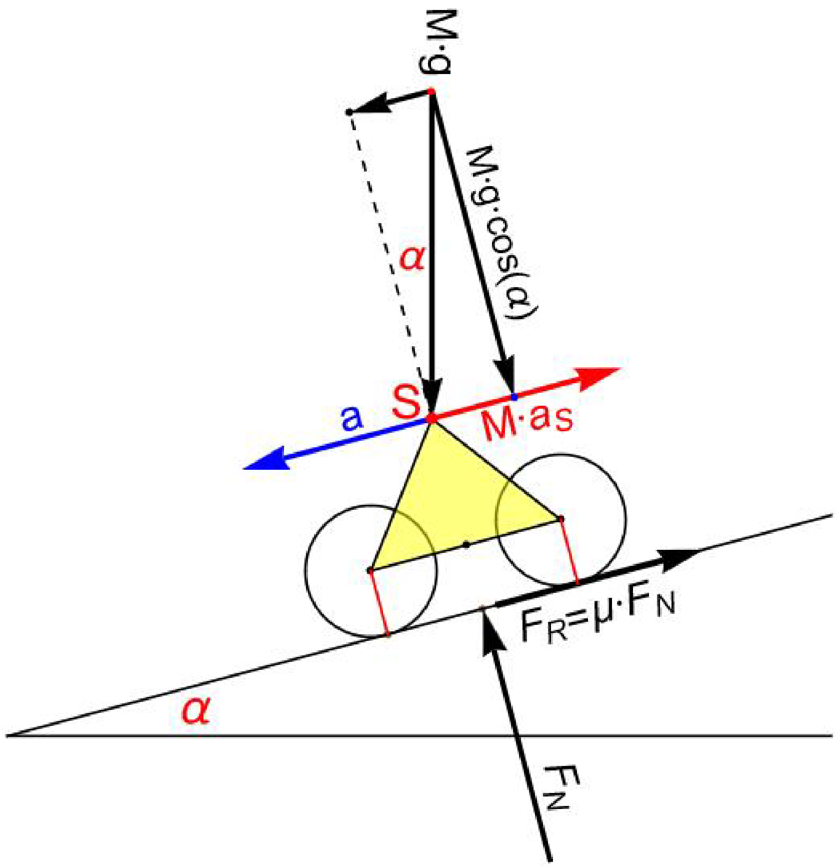
Der minimale Bremsweg ergibt sich, wenn die Räder so stark abgebremst werden, dass sie sich gerade noch drehen, also haften. Dann kann die größere Haftreibung z.B. $\mu = 0{,}9$ eingesetzt werden ► s= 3,5 m ;

Bei den relativ schweren Pedelecs kann man eventuell die Rotationsenergie der Räder T dazunehmen (ca. 5 % der kin. Energie)

$$T = \frac{1}{2}\cdot\Theta\cdot\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\cdot\Theta\cdot\frac{v^2}{R^2} \quad \text{(Rollbedingung } x = R\cdot\varphi \rightarrow v = R\cdot\dot{\varphi}\text{)}$$

$$s = \frac{v^2\cdot(m\cdot R^2 + 2\cdot\Theta)}{2\cdot g\cdot m\cdot R^2\cdot[\mu\cdot\cos(\alpha)-\sin(\alpha)]} \quad \text{für zwei Räder}$$

Alternative Berechnung mit Kräftegleichgewicht nach dÀlembert:



Danach wird die Trägheitskraft $M \cdot a_S$ entgegen der Beschleunigung a rot eingetragen und das Kräftegleichgewicht in Richtung der schiefen Ebene (Index s) und senkrecht dazu (n) berechnet:

$$\sum F_n = 0 \rightarrow F_N - M \cdot g \cdot \cos(\alpha) = 0$$

$$\sum F_s - M \cdot a_s = 0 \rightarrow M \cdot g \cdot \sin(\alpha) - M \cdot a_S - \mu \cdot F_N = 0$$

$$\text{Lösung}: a_S \approx -2{,}16\frac{m}{s^2}, F_N \approx 966\ N$$

$$v(t) = \int_0^t a_S dt' = v_0 + a_S \cdot t = \frac{125}{18}\frac{m}{s} - 2{,}16 \cdot t$$

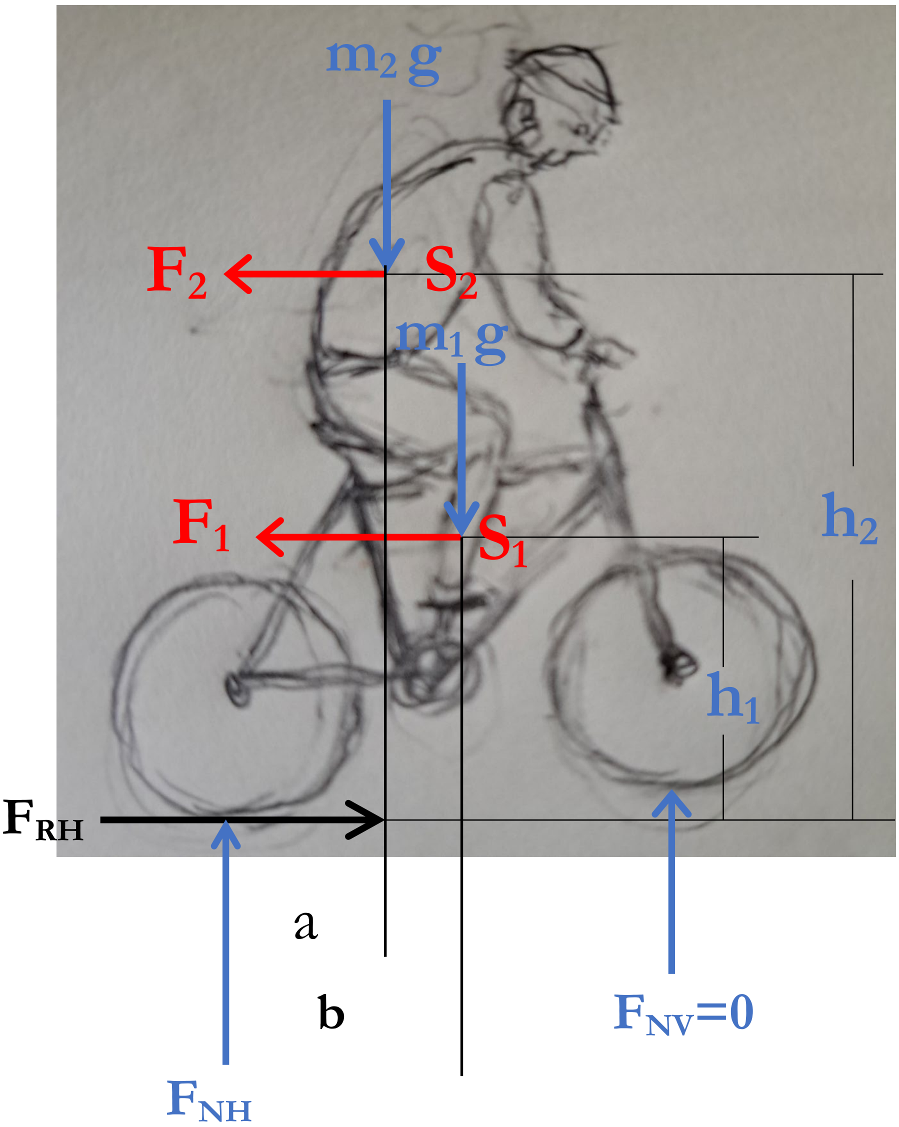
$$v(t) = 0 \rightarrow t \approx 3{,}21 s$$

$$s(t) = \int_0^t v(t')dt' + x_0 = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{a_S}{2} \cdot t^2 =$$

$$= 0 + \frac{125}{18}\frac{m}{s} \cdot 3{,}21 s - \frac{1}{2} \cdot 2{,}16\frac{m}{s^2} \cdot (3{,}21 \cdot s)^2 \approx 11{,}16 m$$

Start mit abhebendem Vorderrad

Das Vorderrad soll vom Boden abheben. Welche Beschleunigung a_x ist notwendig?



Die Masse vom Rad beziehungsweise Fahrer beträgt m_1 und m_2, der jeweilige Schwerpunkt S_1 und S_2, die Räder sollen masselos sein. Bei der Startbeschleunigung spritzen Sand und Steine vom Hinterrad nach hinten, das heißt der Boden muss die

Reibungskraft F_{RH} nach rechts in der Abbildung aufbringen, ansonsten ist der „Kavalierstart“ nicht möglich. Von außen sind keine Drehmomente und Kräfte angelegt, sodass der Schwerpunk- und Drehimpulssatz gilt, also das Dynamische Gleichgewicht der Kräfte und Drehmomente.

$$F_{RH} - (m_1 + m_2) \cdot a_x = 0\,;$$
$$F_{NH} - g \cdot (m_1 + m_2) = 0\,;$$
$$-m_1 g \cdot b - m_2 g \cdot a + h_1 \cdot \overbrace{m_1 \cdot a_x}^{F_1 = \text{Trägheitskraft}} + h_2 \cdot \overbrace{m_2 \cdot a_x}^{F_2\,(\text{Trägheitskraft})} = 0\,;$$

Die Lösung des Gleichungssystems ergibt

$$a_x = g \cdot \frac{a \cdot m_2 + b \cdot m_1}{m_1 \cdot h_1 + m_2 \cdot h_2}\,; F_{NH} = (m_1 + m_2) \cdot g\,;$$

$$F_{RH} = (m_1 + m_2) \cdot a_x = g \cdot \frac{(m_1 + m_2) \cdot (a \cdot m_2 + b \cdot m_1)}{m_1 \cdot h_1 + m_2 \cdot h_2}$$

Der Haftreibungskoeffizient muss mindestens $\mu_H = \dfrac{F_{RH}}{F_{NH}}$

sein, um das Vorderrad überhaupt anheben zu können.

<u>Beispiel:</u>

m_1=25 kg ; m_2=80 kg ; h_1=1 m ; h_2=1,50 m ; a=0,8 m ; b=1 m;

$$a_x \approx 6\,\frac{m}{s^2}; F_{NH} \approx 1030\,N; F_{RH} \approx 632\,N; \boxed{\mu_H \approx 0.6};$$

Belastung der Räder bei Beschleunigung

Im Gegensatz zum vorherigen Absatz sollen beide Räder den Boden berühren mit den Normalkräften F_{NH} und F_{NV}, der gemeinsame Schwerpunkt S (Drehpunkt) von Rad und Fahrer mit Masse m , Höhe h vom Boden und Abstand a zu den Rädern soll in der Mitte der Radachsen liegen, die Rollreibung und das Trägheitsmoment der Räder sollen null sein. Welche Belastung F_{NH} und F_{NV} erfahren die Räder beim Anfahren mit Hinterradantrieb mit der Beschleunigung $\ddot{x}$?

Schwerpunkt- und Drehimpulssatz ergeben:

$$m \cdot \ddot{x} = F_{RH}\,; m \cdot \ddot{y} = F_{NH} + F_{NV} - m \cdot g = 0;$$
$$\Theta_s \cdot \ddot{\varphi}_S = a \cdot F_{NV} + h \cdot F_{RH} - a \cdot F_{NH} = 0;$$

mit der Lösung:

$$F_{NH} = \frac{m \cdot (a \cdot g + h \cdot \ddot{x})}{2 \cdot a}; F_{NV} = \frac{m \cdot (a \cdot g - h \cdot \ddot{x})}{2 \cdot a}$$

Bei einer positiven Beschleunigung $(\ddot{x} > 0)$ wird das Hinterrad stärker belastet, beim Bremsen $(\ddot{x} < 0)$ das Vorderrad.

Beispiel: h=1,25 m ; m=100 kg ; a=0,8 m ; $\ddot{x} = 5{,}9 \frac{m}{s^2}$;

$$F_{NH} \approx 951\,N; F_{RH} \approx 590\,N; F_{NV} \approx 30N;$$

Anm.: $F_{NH} = \frac{m \cdot (b \cdot g + h \cdot \ddot{x})}{a + b}; F_{NV} = \frac{m \cdot (a \cdot g - h \cdot \ddot{x})}{a + b}$, wenn a der Abstand vom Schwerpunkt zum Hinterrad und b der Abstand vom Schwerpunkt zum Vorderrad ist.

Durchdrehen der Räder

Ein Durchdrehen der Räder erfolgt, wenn $F_{Hinterrad} > \mu_H \cdot F_{NH}$

dh., wenn $F_{Hinterrad}$ > Haftreibungszahl ·Normalkraft auf das Hinterrad ist oder nach Seite 9

$$F_P \cdot \frac{R_{Kurbel}}{R_{Hinterrad}} \cdot \frac{r_{Zahnradhinten}}{r_{Zahnradvorne}} > \mu_H \cdot F_{NH}$$

die Pedalkraft wäre dann

$$\boxed{F_P > \mu_H \cdot \frac{F_{NH} \cdot R_{Hinterrad} \cdot r_{Zahnradvorne}}{R_{Kurbel} \cdot r_{Zahnradhinten}}}$$

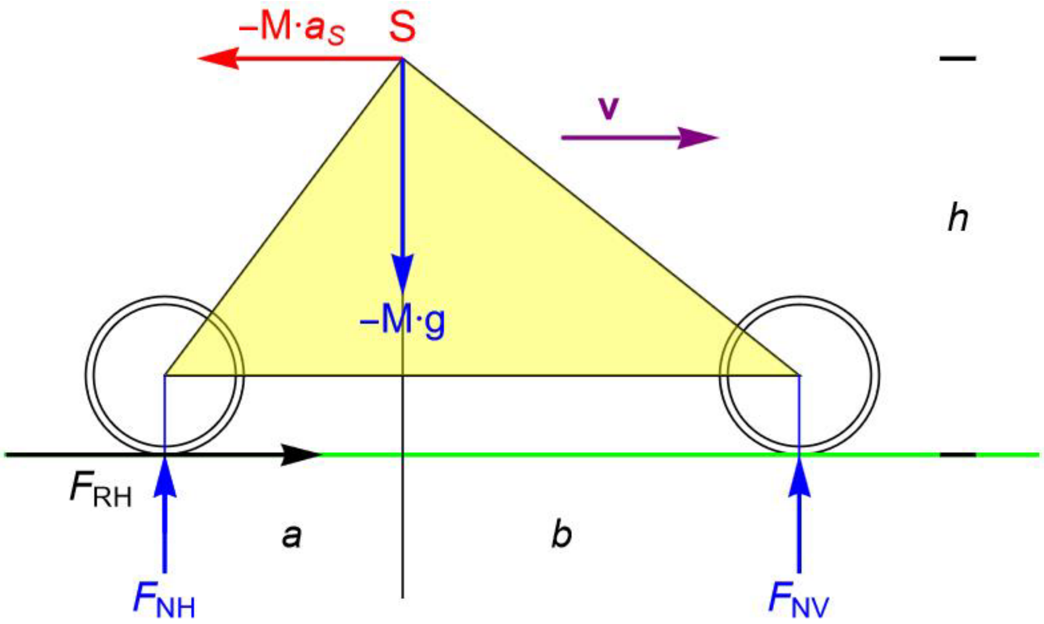
oder angewendet auf das Beispiel des vorigen Kapitels

$$F_P \cdot \frac{R_{Kurbel}}{R_{Hinterrad}} \cdot \frac{r_{Zahnradhinten}}{r_{Zahnradvorne}} > \mu_H \cdot \frac{m \cdot (a \cdot g + h \cdot \ddot{x})}{2 \cdot a}$$

$$F_P > \mu_H \cdot \frac{R_{Hinterrad}}{R_{Kurbel}} \cdot \frac{r_{Zahnradvorne}}{r_{Zahnradhinten}} \cdot \frac{m \cdot (a \cdot g + h \cdot \ddot{x})}{2 \cdot a}$$

Aufgabe:

Ein Radfahrer mit Gesamtmasse 100 kg startet aus dem Stand mit durchdrehendem Hinterrad. Welche minimale Zeit braucht er, um auf die Geschwindigkeit v = 25 km/h= (125/18) m/s zu kommen und welche Normalkräfte wirken dabei auf Vorder- und Hinterrad ? (Gleitreibungskoeffizient μ_g= 0,3 , a= 1,5 m, b= 2,5 m, h= 1,5 m nach Abbildung, S = Schwerpunkt)



Trägheitskräfte nach d´Alembert sind rot eingezeichnet in entgegengesetzter Beschleunigungsrichtung, die Masse der Räder wird vernachlässigt, das Vorderrad rollt frei. Dynamisches Gleichgewicht und Moment bezüglich Schwerpunkt S :

$$\sum F_x - m\cdot(a_S)_x = 0 \rightarrow \mu_g \cdot F_{NH} - M\cdot a_s = 0$$

$$\sum F_y - m\cdot(a_S)_y = 0 \rightarrow F_{NH} + F_{NV} - M\cdot g = 0$$

$$\sum M_S + \sum (M_T)_S = 0 \rightarrow F_{NH}\cdot b - F_{NH}\cdot a + \mu_g \cdot F_{NH}\cdot h = 0$$

Die Lösung des Gleichungssystem liefert $a_S \sim 2\ m/s^2$, $F_{NH} \sim$

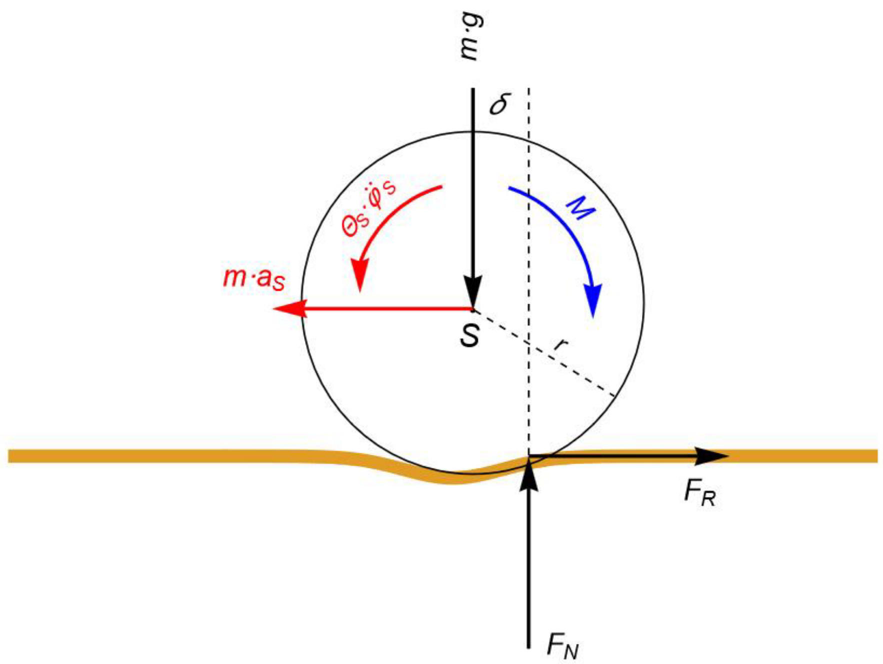
691 N, $F_{NV} \sim 290$ N; $\Delta t = v/a_S \sim 3{,}35$ s

Rollreibung

Beim „Durchdrehen der Räder“ findet nach dem gesagten ein Übergang von der Rollreibung in die Gleitreibung statt, die „Rollbedingung“

$$v_S = \omega \cdot r = \dot{\varphi} \cdot r \text{ und}$$
$$a_S = \ddot{x}_S = \alpha \cdot r = \ddot{\varphi} \cdot r$$

ist dann nicht mehr erfüllt (S bezieht sich auf Schwerpunkt). Die Rollreibungskraft ist ab etwa v=10 km/h gegenüber dem Luftwiderstand meist vernachlässigbar und erheblich kleiner als die Gleitreibung. Im wesentlichen entsteht sie aufgrund von elastischen Verformungen beim Abrollen, die nach Abbildung zu einem entgegengesetzten Drehmoment $F_N \cdot \delta$ führen mit F_N als Normalkraft. Der Rollwiderstandskoeffizient (Rollwiderstandsbeiwert) μ ist dimensionslos und kann danach aus $\mu = \delta / r$ berechnet werden, $\delta \sim 10^{-3}$cm…10^{-1} cm.



Das Rad wird mit dem Drehmoment M angetrieben. Nach dem Freikörperbild ergeben sich die folgenden Dynamischen Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum F_x - m(a_S)_x = 0 \rightarrow F_R - m \cdot a_S = 0$$
$$\sum F_y - m(a_S)_y = 0 \rightarrow F_N - m \cdot g = 0$$
$$\sum M_S - \Theta_S \cdot \alpha = 0 \rightarrow M - F_R \cdot r - \Theta_S \cdot \alpha - F_N \cdot \delta = 0$$
$$a_S = \alpha \cdot r$$

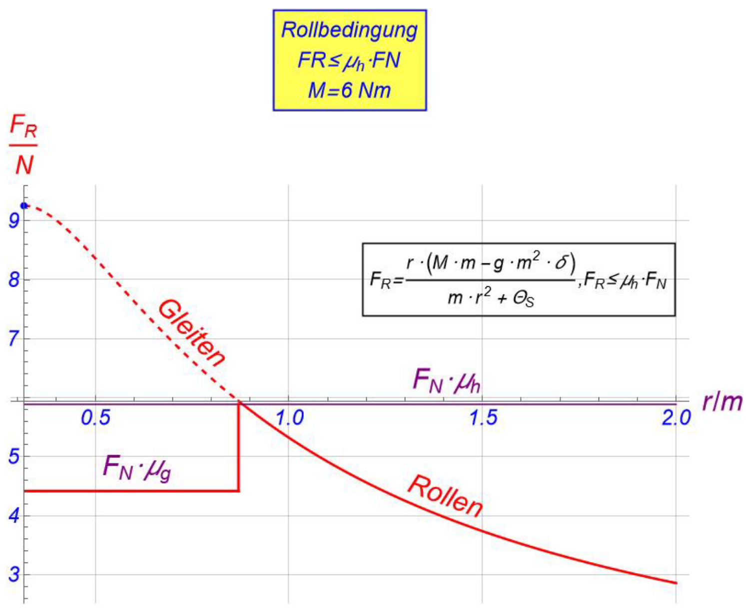
Die Trägheitskräfte sind im Freikörperbild rot eingezeichnet und sind nach dÁlembert der Bewegung entgegengesetzt.

Beispiel: M=2 Nm, Θ_S *=0,15 kg·m², r= 0,4 m, m= 1,5 kg,* δ *=0,01m,*

μ_h *= 0,4 ► F_R= 2,85, $F_N \cdot \mu_h$ = 5,88 N >F_R dh. Rollen, $F_N \cdot \delta$*

=0,15Nm. Für M= 4 Nm ► F_R= 5,92, $F_N \cdot \mu_h$ = 5,88 N < F_R dh.

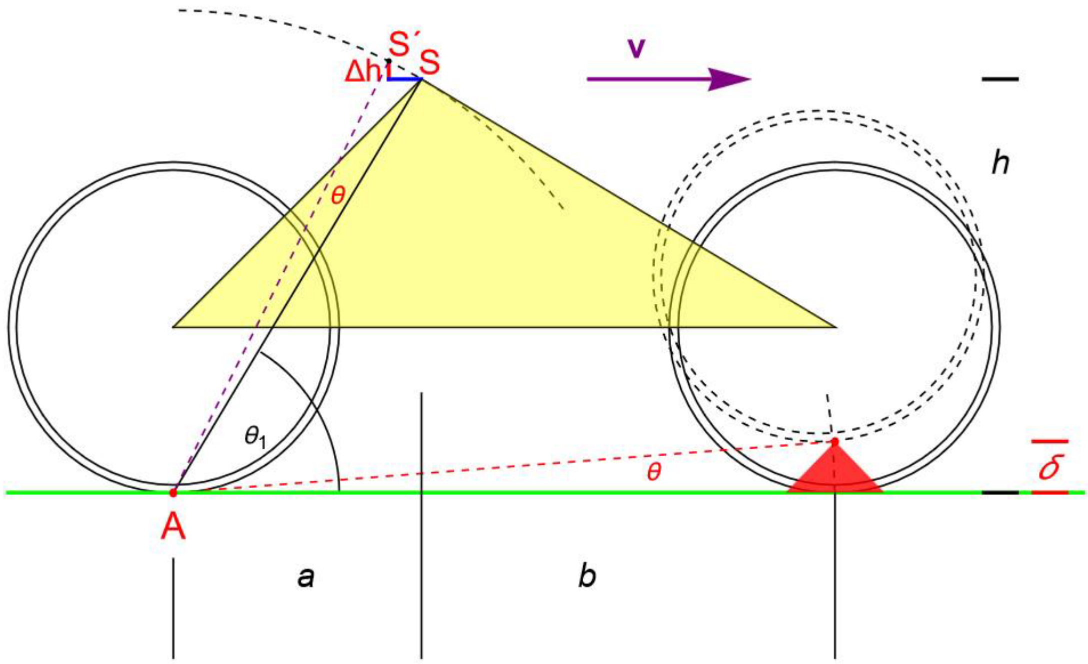
Gleiten, die Rollbedingung gilt nicht mehr, $F_R = \mu_g \cdot F_N$, μ_g = 0,3. Die Abbildung mit M= 6 N·m zeigt, je größer der Radradius, desto weniger entsteht Gleiten und desto kleiner ist die Reibungskraft der Rollreibung F_R des Rades. ($\Theta_S \approx m \cdot r^2/2$ S.30 ► F_R~2(M-gmδ)/3r)



Aufgabe:

Wie groß ist die minimale Geschwindigkeit, um mit dem Fahrrad mit dem Vorderrad über die Erhebung $\delta = 5$ cm zu kommen ? (Abb., kein Abprallen, kein Gleiten)

a= 1,5 m, b=2,5 m, h= 2,5 m, $R_{Hinterrad}$=0,3 m, M=100 kg



Der Schwerpunkt S hebt sich beim Überfahren des Hindernisses mit der Höhe δ um

$$\Delta h = \frac{\sqrt{a^2 + h^2} \cdot \tan(\theta_1 + \theta)}{\sqrt{1 + \tan(\theta_1 + \theta)^2}} - h \approx 1{,}8\,\mathrm{cm}$$

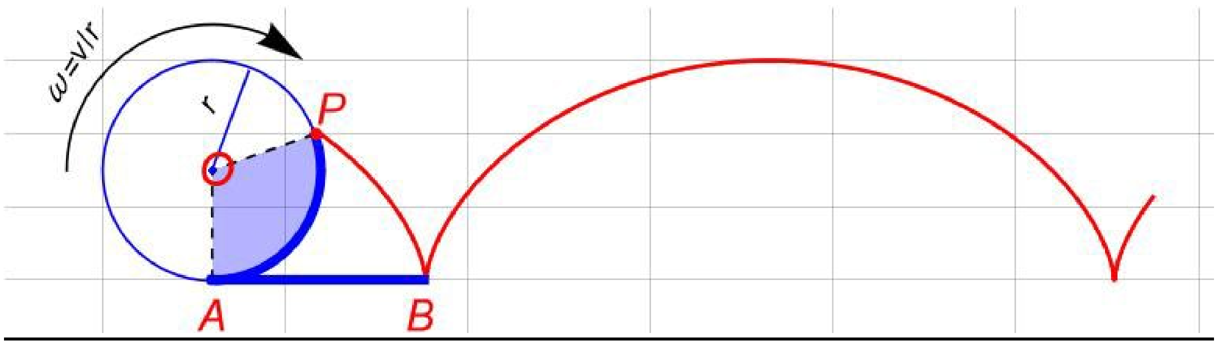
Nach dem Energiesatz gilt

$$M \cdot g \cdot \Delta h = \frac{1}{2} \cdot M \cdot v_{min}{}^2$$

► v_{min}~ 0,6 m/s ~ 2,17 km/h

Bewegung des Radumfangs beim rollenden Rad

Der Radumfang bewegt sich nach Abbildung auf einer Zykloide



Der Winkel A-O-P ist der „Wälzungswinkel“, um den sich das rollende Rad dreht und dessen dazugehöriger Radumfang auf der Streck A-B abrollt. Die Spitzen liegen bei $(2\cdot k\cdot\pi\cdot r,0),\ k=1,2...$, die Scheitelpunkte bei $[(2\cdot k+1)\cdot\pi\cdot r, 2\cdot r]$.

Die Parameerdarstellung ist

$x=r\cdot[\omega\cdot t-\sin(\omega\cdot t)];\ y=r\cdot[1-\cos(\omega\cdot t)];\ (\omega\cdot t)$ ist der Wälzungswinkel

in der Zeit t, ω die Winkelgeschwindigkeit $=\frac{v}{r}$.

Die Geschwindigkeit der Punkte am Radumfang ist die Resultierende aus einer Drehbewegung um den Radmittelpunkt und der Weiterbewegung mit der Geschwindigkeit v. A ist der momentane Auflagepunkt des Rades

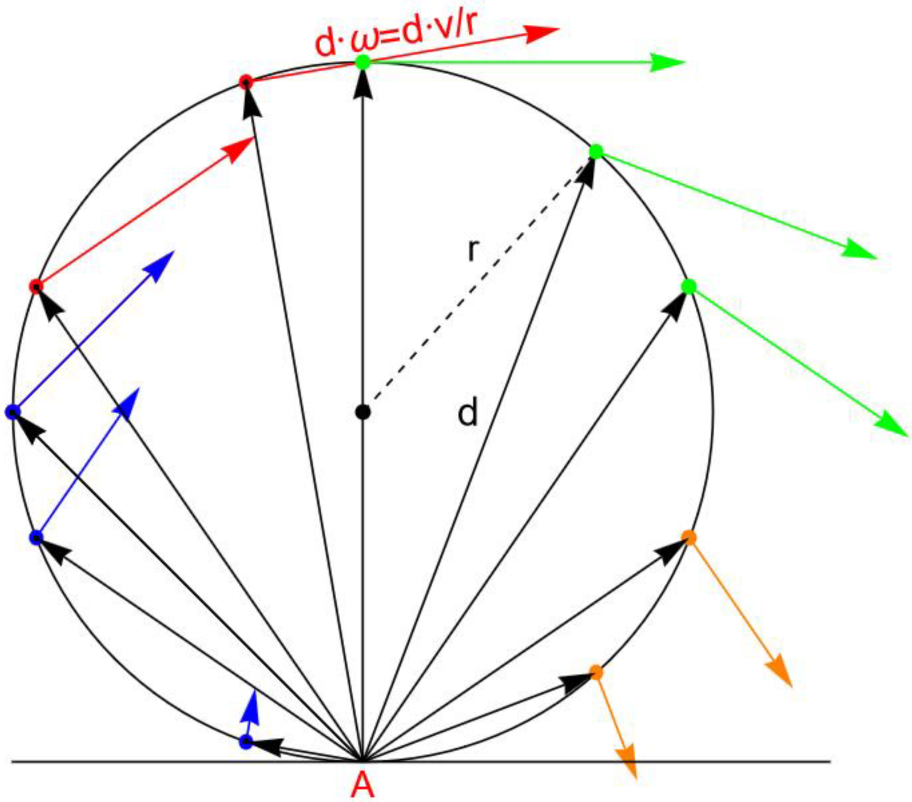
$$\vec{v}_{Umfang}=\vec{v}+\vec{\omega}\times\vec{r};\ |\vec{v}_{Umfang}|=d\cdot\omega=d\cdot\frac{v}{r}$$

Beispiel: v=25 km/h=125/18 m/s; r= 0,3 m ;

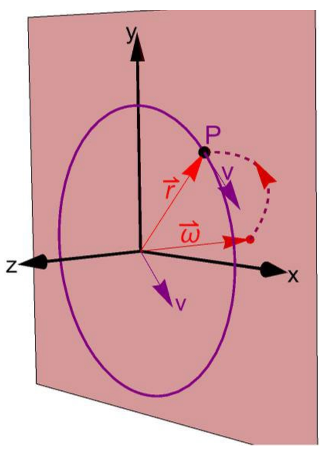
$$\vec{v}_{Umfang} = v\cdot(1,0,0)+\left(0,0,-\frac{v}{r}\right)\times(0.3,0,0)=\left(v,-\frac{0,3\cdot v}{r},0\right)=\left(\frac{125}{18},-6.94,0\right)$$

$$\left|\vec{v}_{Umfang}\right| = 9,82\ \frac{m}{s} = d\cdot\frac{v}{r} = d\cdot\omega \text{ mit } d = 0,424 \text{ aus der Abbildung}$$

$\vec{\omega}$ ist in die negative z-Richtung gerichtet, das Rad dreht sich nach rechts in die x-Richtung mit der horizontalen Geschwindigkeit v. Die Pfeile zeigen in die Richtung von v_{Umfang}, die Länge ist proportional zum Betrag von v_{Umfang}.

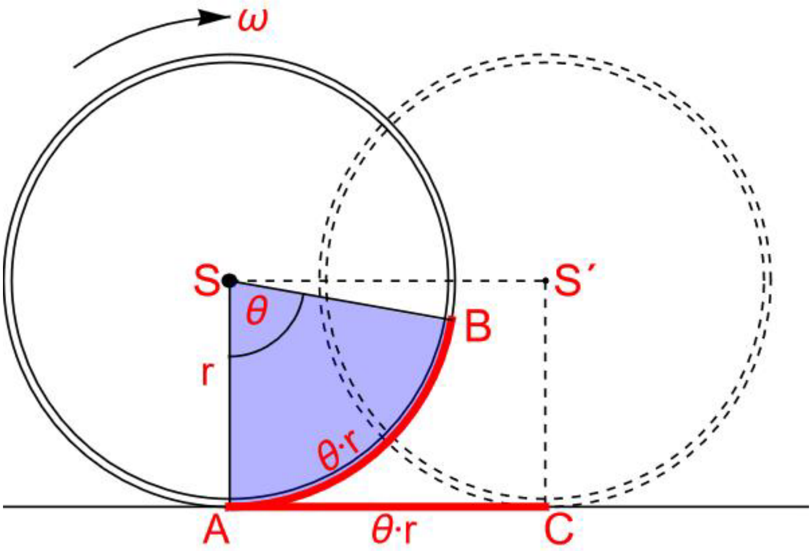


$\vec{\omega}$ wird in Rechtsdrehung nach $\vec{r}$ gedreht, das ergibt die Richtung von $\vec{v}$ des Massenpunktes P, der sich auf einem Kreis in der x-y-Ebene bewegt.



Rollbedingung:

Bei vielen Anwendungen spielt der Übergang von rollender Reibung zur Gleitreibung und umgekehrt eine Rolle.



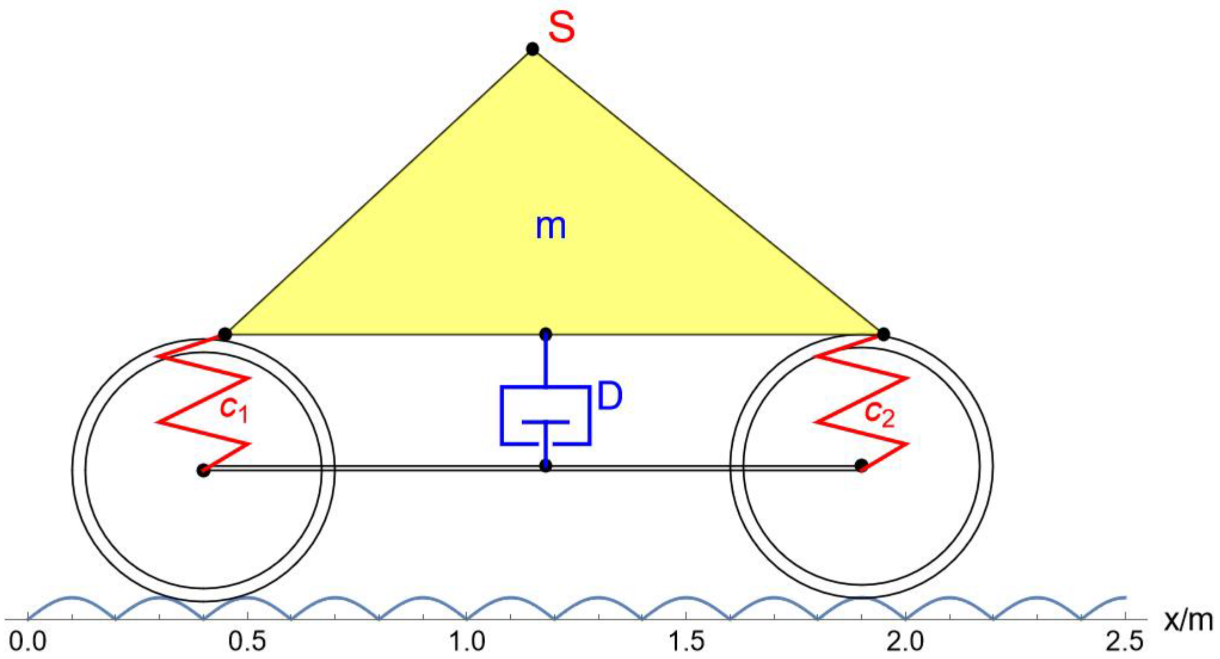
Rollt das abgebildete Rad ohne Gleiten von A nach C beziehungsweise der Schwerpunkt von S nach S´ dann wird das Bogenstück A-B auf die Strecke A-C abgebildet. Es gelten dann folgende Beziehungen:

$$\boxed{\begin{aligned} d_{S-S'} &= \theta \cdot r \\ v_S &= \frac{d\theta}{dt} \cdot r = \omega \cdot r \\ a_S &= \frac{d\omega}{dt} \cdot r = \alpha \cdot r \end{aligned}}$$

mit a_S als Beschleunigung und α als Winkelbeschleunigung des Schwerpunktes. Die Gleichungen können als zusätzliche Bedingungen zu den Bewegungsgleichungen verwendet werden, wenn rollende Reibung vorliegt.

Schwingungen

Moderne Räder haben eine Federung, das bedeutet, dass es sich um ein schwingendes System handelt mit einer Krafteinleitung, die vom Boden herrührt.

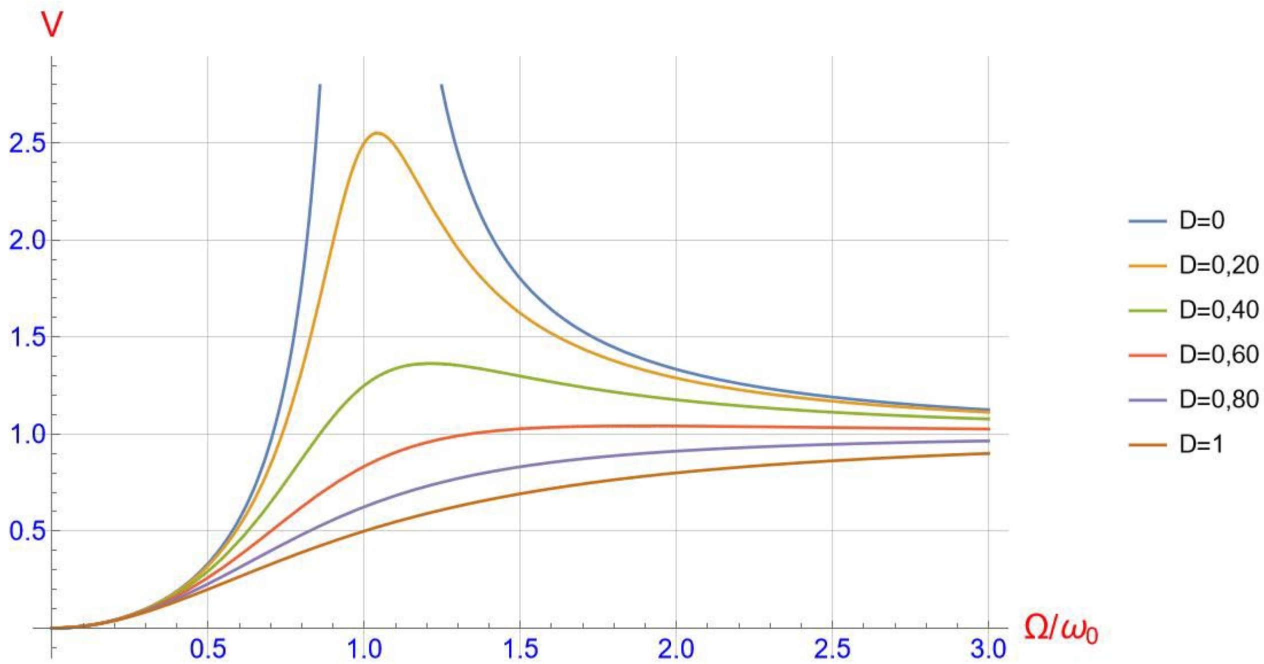


Ist die Krafteinleitung periodisch, erhält man eine erzwungene gedämpfte Schwingung, die durch die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 2 \cdot D \cdot \omega_0 \cdot \dot{y} + \omega_0{}^2 \cdot y = \frac{\hat{F}}{m} \cdot \cos(\Omega \cdot t)$$

beschrieben wird. D gibt die Dämpfung an, ω_0 die Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung des Fahrrades mit Fahrer auf den Federn c_1 und c_2 , $\hat{F}$ den Scheitelwert der cosinusförmigen Kraft mit Frequenz Ω und y(t) die Schwingung als Antwort auf die Anregung F(t). Die Differentialgleichung ist in der Physik hinlänglich beschrieben. In der Praxis hat man natürlich keine cosinusförmige Kraft vom Boden, weil das Fahrrad nicht über eine Straße mit cosinusförmiger Oberfläche fährt. Es kann aber jede Art von Oberfläche als Summe von sinus- und cosinusförmigen Anteilen geschrieben werden und damit die Differentialgleichung gelöst werden(*. Als wesentliches Ergebnis der gelösten Differentialgleichung erhält man die „Vergrößerungsfunktion“ V, die das Verhältnis Scheitel der Antwortfunktion / Scheitel der Erregerfunktion angibt:

$$\boxed{V = \frac{\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(2 \cdot D \cdot \frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}}$$



Als Verlauf von V in Abhängigkeit der Dämpfung D ergeben sich die obigen Kurven:

Bei $\Omega \approx \omega_0$ ergibt sich für D~0 Resonanz oder Überhöhung, was bei jeder Art von Anwendung vermieden werden soll.

Beispiel:

In der obigen Abbildung fährt der Fahrer über ein Pflaster mit einer Art von Kopfsteinen im Abstand von 20 cm mit der Geschwindigkeit v= 10 km/h = (25/9) m/s . Als vorherrschende Frequenz der Anregung ergibt sich f_{Anr}= v/0,2 m ~ 14 Hz und als $\Omega = 2\cdot\pi\cdot f_{Anr}$ ~ 87 rad/s. Die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems ist

$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$, m ist die Masse von Fahrer und Fahrrad = 80 kg, c ist

die Federkonstante, sie wird abgeschätzt ► das Rad soll sich bei

Belastung um 1 cm senken ► $c = \frac{80\cdot kg\cdot 9{,}81\,m/s^2}{0.01\,m}$ und damit

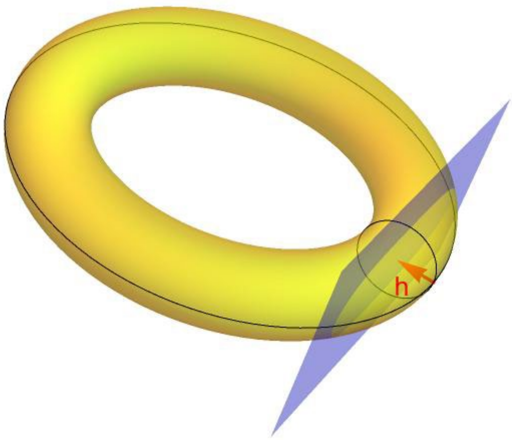
$\omega_0 \approx 31\,rad/s \text{ und } \frac{\Omega}{\omega_0} \approx 2{,}8$.

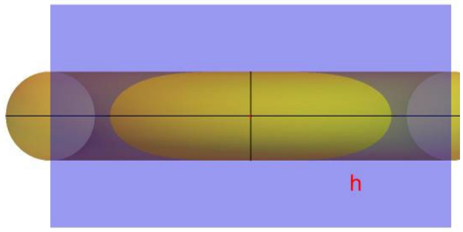
Es wird eine mittlere Dämpfung D= 0.2 verwendet, damit erhält man eine Vergrößerungsfunktion von V~1,13. Abhängig von verschiedenen Radtypen ergeben sich natürlich unterschiedliche Vergrößerungsfunktionen, das Befahren von Kopfsteinpflastern ist aber in jedem Fall eine Herausforderung für Rad und Fahrer.

*) Fourier-Transformation: $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t)\right]$

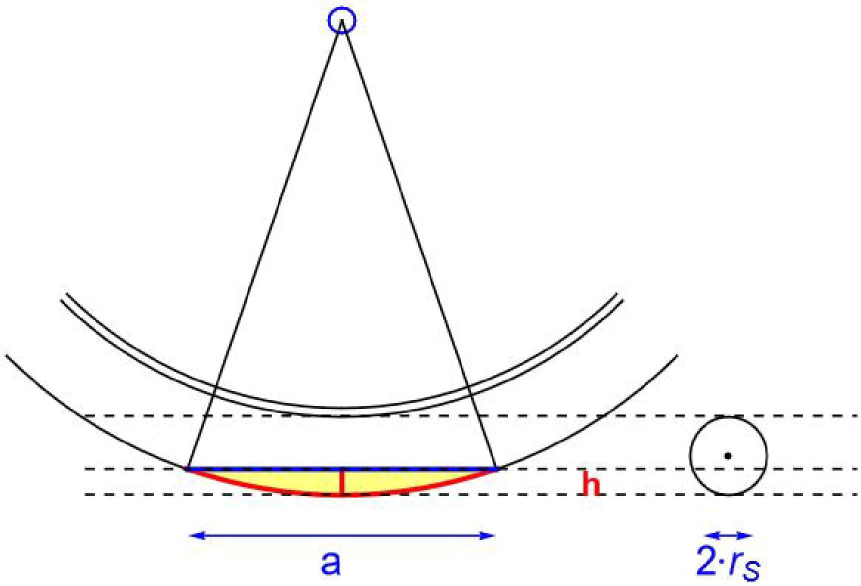
Reifenfederung:

Der luftgefüllte Reifen mit dem Druck p erfährt bei Belastung mit der Masse M eine Einsenkung h und bildet eine plane Fläche S (Abb.) , die je nach Reifenart verschieden groß ausfällt.





Wird der Reifen auf dem Boden samt Felge impulsförmig angeregt, entsteht eine gedämpfte Schwingung, die zeitlich nach einer e-Funktion abklingt. Eine charakteristische Größe ist wie im vorherigen Fall die Resonanzfrequenz f_0 des schwingenden Systems, sie ergibt sich näherungsweise folgendermaßen:



$$a = 2\cdot\sqrt{2\cdot h\cdot R - h^2}\ (\text{Formelsammlung});S \approx a\cdot 2\cdot r_S - \pi\cdot r_s^2\ (\text{Abb.})$$

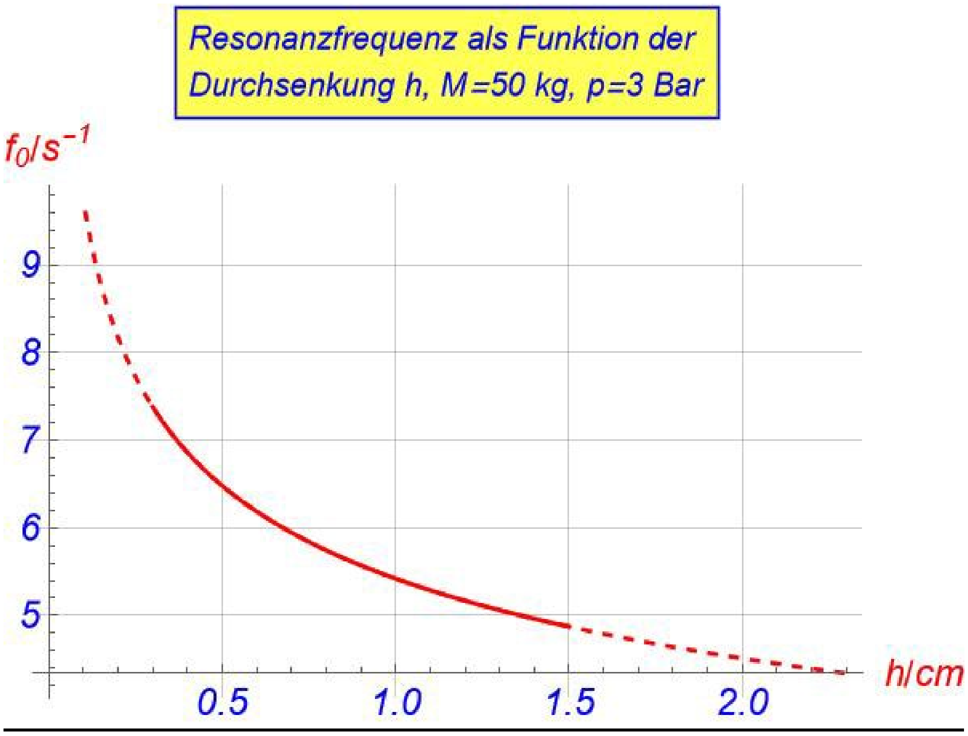
$$= 4\cdot r_S\cdot\sqrt{2\cdot h\cdot R - h^2} - r_s^2\cdot\pi\,;\ F = p\cdot S\,;\ r_s = \text{Reifenradius}$$

$$\text{Federkonstante } c = \frac{dF}{dh} = \frac{4\cdot p\cdot r_S\cdot(R-h)}{\sqrt{2\cdot h\cdot R - h^2}};\ f_0 \approx \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\sqrt{\frac{c}{M}} =$$

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{\pi}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot r_S\cdot(R-h)}{M\cdot\sqrt{h\cdot(2\cdot R-h)}}}}$$

Beispiel: Radius des Rades R=36,82 cm, Reifenradius r_S=1,15 cm,

M=50 kg, p= 3 Bar= $3\cdot10^5$Pa, h= 1 cm► f_0~5,42 s^{-1}

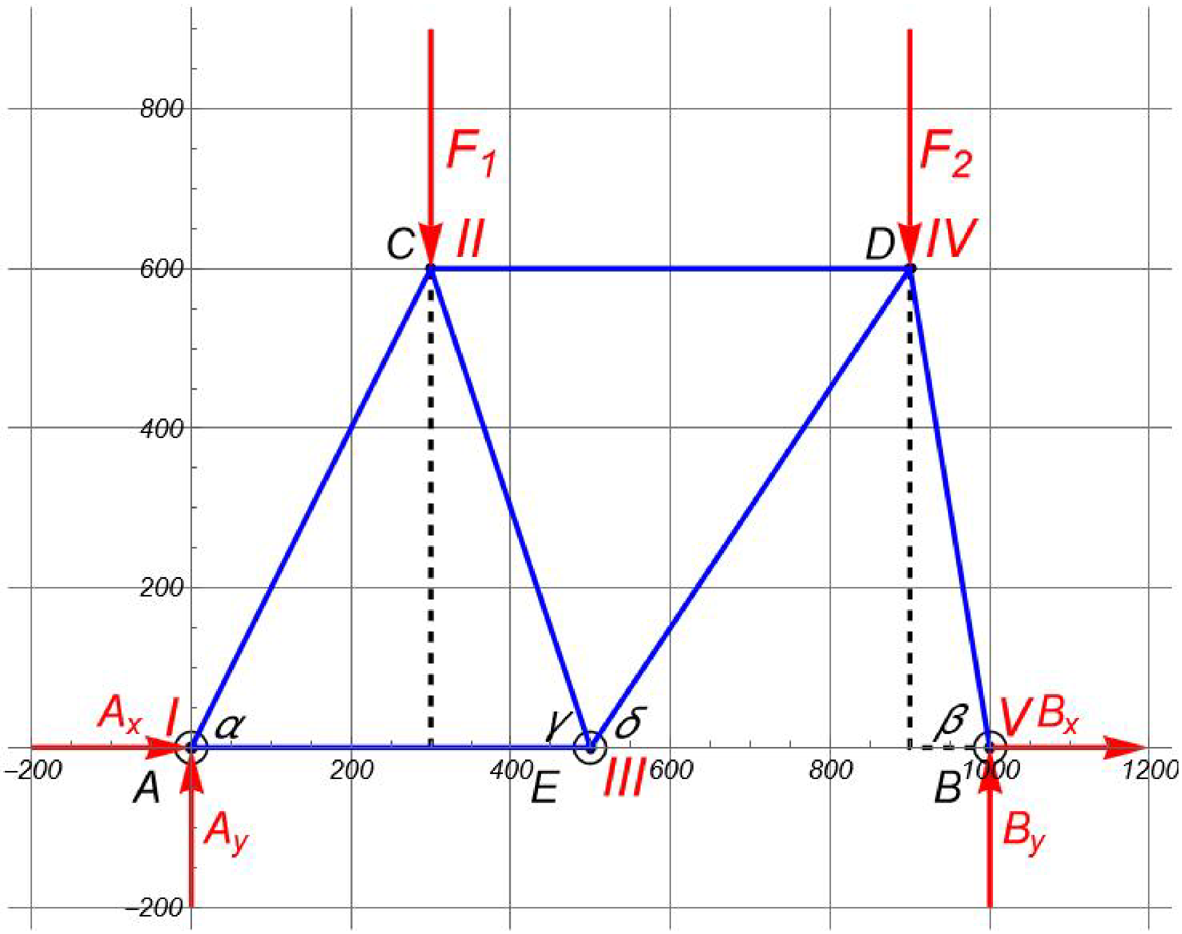


Wird der Reifen z.B. durch Kopfsteinpflaster oder ähnliches mit der Resonanzfrequenz angeregt, entstehen extreme Vibrationen.

Siehe: Thomas Senkel, Carl-von-Ossietzky-Universität Oldenburg, „Federungseigenschaften von Fahrradreifen" mit Messungen und Aufgabe 10.

Rahmenkräfte

In der Abbildung ist der Rahmen eines Fahrrades skizziert. F_1 ist die Kraft auf den Sattel, hier mit einer Masse des Fahrers von 100 kg ► F_1= 981 N. F_2 ist die Kraft auf die Lenkstange, sie wird hier vernachlässigt (freihändig fahren). A und B sind Auflagerkräfte auf die Festlager des Vorder- und Hinterrades. Der Rahmen ist im statischen Gleichgewicht, sodass in jedem Knoten I, II, III…die Summe der Momente Kraft x Hebelarm und die Summe der Kräfte null sein muss, sonst würde sich der Rahmen bewegen. Mit dieser Bedingung lassen sich die Auflagerkräfte und Stabkräfte berechnen (Knotenpunktverfahren).



Aus den Maßen der Skizze (mm) entnimmt man die Hebelarme und Winkel und daraus die Stabkräfte . Für verschiedene Anordnungen der Stäbe lassen sich die Stabkräfte berechnen und danach entscheiden, ob bestimmte Materialien für die jeweilige Beanspruchung geeignet sind.

Beispiel Auflagerkraft A:

$$\sum \overset{\nwarrow=+}{M_A} = 0 \rightarrow 1000 \cdot By - 300 \cdot F_1 = 0 \text{ ergibt } B_y$$

$$\sum \overset{\uparrow+}{F_y} = 0 \rightarrow A_y + B_y - F_1 = 0 \text{ ergibt } A_y \text{ mit } B_y \text{ von vorher}$$

$$\sum \overset{\rightarrow+}{F_x} = 0 \rightarrow A_x + B_x = 0 \text{ ergibt } A_x \text{ mit } \frac{B_y}{-B_x} = \tan\beta$$

Knoten I:

Stabkraft F_{AC}:

$$\sum \overset{\uparrow+}{F_y} = 0 \rightarrow A_y + F_{AC} \cdot \cos(90° - \alpha) = 0 \text{ ergibt } F_{AC}$$

Stabkraft F_{AE}:

$$\sum \overset{\rightarrow+}{F_x} = 0 \rightarrow A_x + F_{AE} + F_{AC} \cdot \cos(\alpha) = 0 \text{ ergibt } F_{AE} \text{ usw.}$$

Siehe Video´s im Internet und Cremonaplan zB.: https://www.youtube.com/watch?v=sZ4L0TtCCXw

Man erhält ein System von Gleichungen

$$1000 \cdot B_y - 300 \cdot F_1 = 0;$$

$$A_y + B_y - F_1 = 0;$$

$$A_x + B_x = 0; \frac{B_y}{-B_x} = \tan\beta;$$

$$A_y + F_{AC} \cdot \cos(90° - \alpha) = 0;$$

$$A_x + F_{AE} + F_{AC} \cdot \cos(\alpha = 0);$$

$$-F_{AC} \cdot \sin(\alpha) - F_{EC} \cdot \sin(\gamma) - F_1 = 0;$$

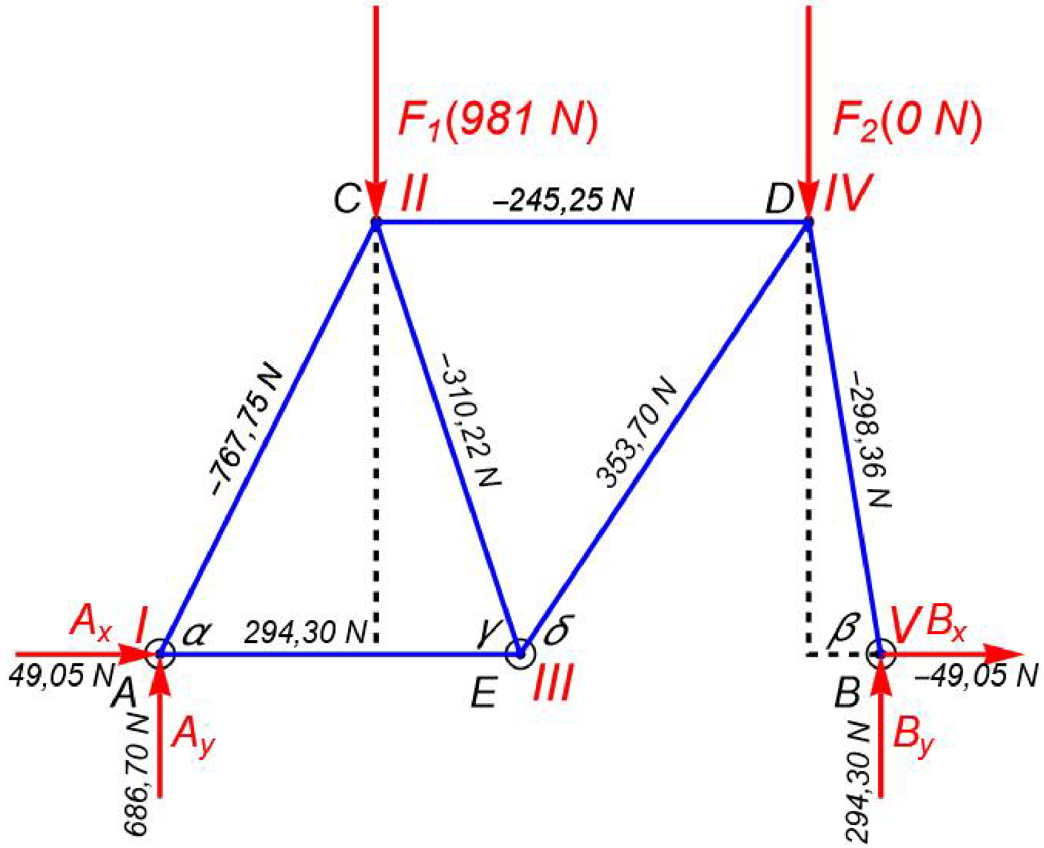
$$F_{CD} - F_{AC} \cdot \cos(\alpha) + F_{EC} \cdot \cos(\gamma) = 0;$$

$$-F_{BD} \cdot \sin(\beta) - F_{ED} \cdot \sin(\delta) = 0;$$

$$F_{ED} \cdot \sin(\delta) + F_{EC} \cdot \sin(\gamma) = 0;$$

mit dem Ergebnis (+ Ziehen, Zugstab ► AE, ED, - Stauchen bei Stäben, Druckstab ►AC, EC, CD, BD)

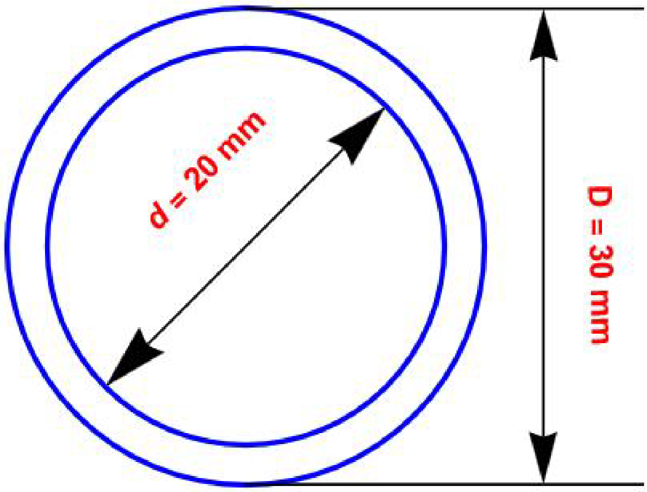
F/N..		$\alpha/°$..	
F_1	981.00	α	63.43
A_x	49.05	γ	71.57
A_y	686.70	δ	56.31
B_x	−49.05	β	80.54
B_y	294.30		
F_{AC}	−767.75		
F_{AE}	294.30		
F_{EC}	−310.22		
F_{CD}	−245.25		
F_{BD}	−298.36		
F_{ED}	353.70		



Die Belastung der Rahmenteile und Auflagerkräfte ändert sich, wenn Kraft auf die Lenkstange ausgeübt wird. Als Beispiel soll der Sattel mit 70 % des Gewichts und die Lenkstange mit 30 % des Gewichts belastet werden. Als Ergebnis bekommt man dann

F/N..		α/°..	
A_x	−29.43	α	63.43
A_y	510.12	γ	71.57
B_x	29.43	δ	56.31
B_y	470.88	β	80.54
F_1	686.70		
F_2	294.30		
F_{AC}	−570.33		
F_{AE}	284.49		
F_{EC}	−186.13		
F_{CD}	−196.20		
F_{BD}	−477.38		
F_{ED}	212.22		

Muss geprüft werden, ob die verwendeten Rahmenteile den zulässigen Spannungen $\sigma_z = \frac{F}{A} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$ genügen (Knickgefahr), berechnet man für die einzelnen Rahmenteile die Spannungen.



Die Fläche des abgebildeten Rohres ist

$$A = D^2 \cdot \frac{\pi}{4} - d^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot \left(D^2 - d^2\right)$$

$$\approx 392{,}7\ \text{mm}^2$$

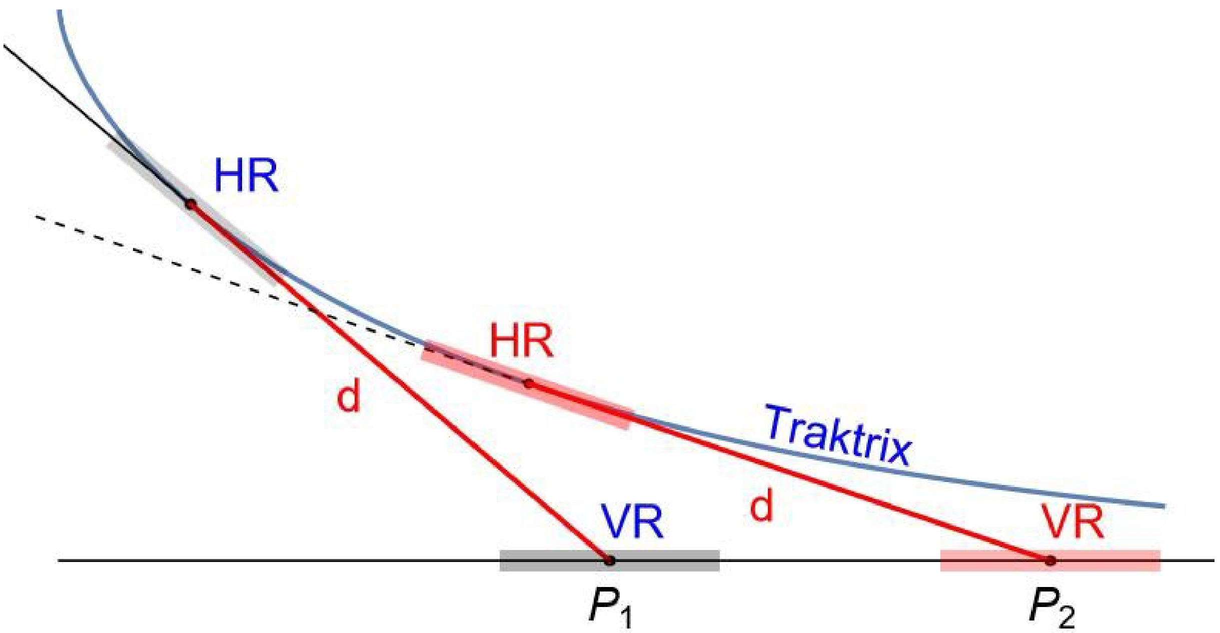
und damit für die einzelnen Rahmenteile

F	F_{Stab}/N	$\sigma/N \cdot mm^{-2}$	F	F_{Stab}/N	$\sigma/N \cdot mm^{-2}$
F_{AC}	-767.80	-1.96	F_{AC}	-570.30	-1.45
F_{AE}	294.30	0.75	F_{AE}	284.50	0.72
F_{EC}	-310.20	-0.79	F_{EC}	-186.10	-0.47
F_{CD}	-245.30	-0.62	F_{CD}	-196.20	-0.50
F_{BD}	-298.40	-0.76	F_{BD}	-477.40	-1.22
F_{ED}	353.70	0.90	F_{ED}	212.20	0.54

Kurve des Hinterrades

Der Kurvenverlauf des Hinterrades bei bekanntem Verlauf des Vorderrades läßt sich mit sog. Traktrizes (Schleppkurven, Verfolgungs- Hundekurven) bestimmen. Bei der „geraden Traktrix“ (behandelt von Christian Huygens 1629-1695) ist der Abstand d (Abb. S. 37) vom Berührungspunkt der „Verfolgerkurve“ und der Kurve des „Verfolgten“ konstant. Bei Fahrrädern kann der genaue Kurvenverlauf von Vorder- und Hinterrädern bei der Anlage von kurvigen Radwegen mit Gegenverkehr notwendig werden.

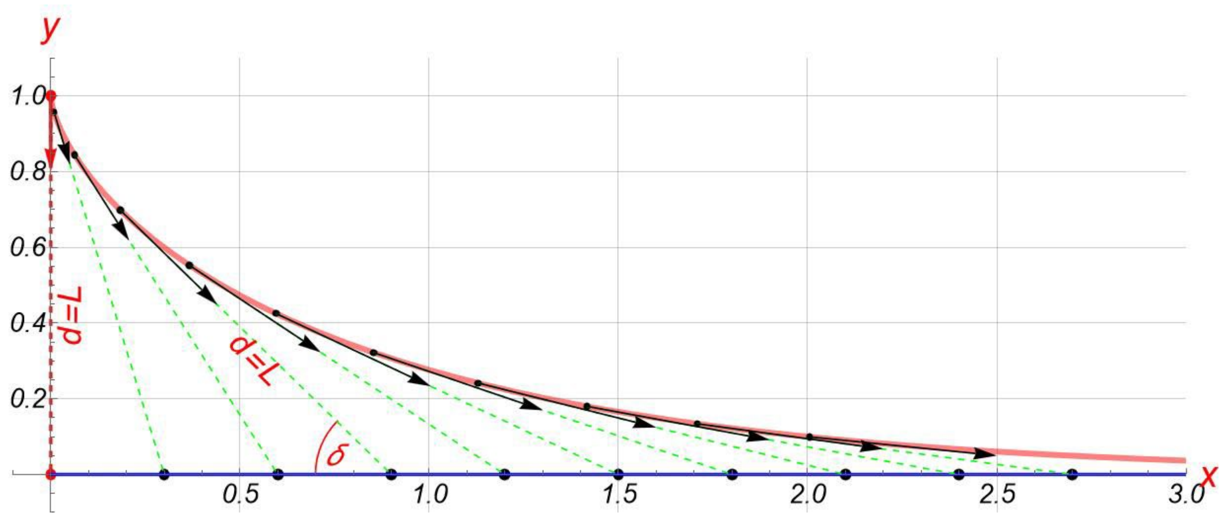
Im einfachsten Fall bewegt sich das Vorderrad gemäß Abbildung auf einer Gerade von P_1 nach P_2 und das Hinterrad HR tangential an der Traktrix von HR nach HR, der Abstand d = Radstand L (S.31) zwischen den beiden Achsen ist dabei immer konstant.



Der funktionale Kurvenverlauf ist in der Literatur abgeleitet (z.B. Wikipedia) und lautet

$$\boxed{\begin{array}{l} y(x) = d \cdot \ln \underbrace{\left| \dfrac{d + \sqrt{d^2 - x^2}}{x} \right|}_{=\operatorname{arccosh}\frac{d}{x}} - \sqrt{d^2 - x^2} \\[2ex] \text{Parameterform}: \left\{ d \cdot \left[t - \tanh(t) \right], \dfrac{d}{\cosh(t)} \right\} \end{array}}$$

Bei anderen <u>Leitkurven</u> wie einer Geraden lässt sich die Traktrix mit Rechenprogrammen bestimmen.



<u>Zur Abbildung</u>: Bei (0, d) hat die Traktrix den höchsten Wert, die Richtung des „Verfolgers“ (Hinterrad) und die Richtung des „Verfolgten“ (Vorderrad) stehen aufeinander senkrecht ► anfänglicher Lenkeinschlag $\delta = 90°$. Der abnehmende

Lenkeinschlag δ kann am Winkel Tangente (grüne gestrichelte Linie) mit der Leitkurve (blaue Linie) abgelesen werden.

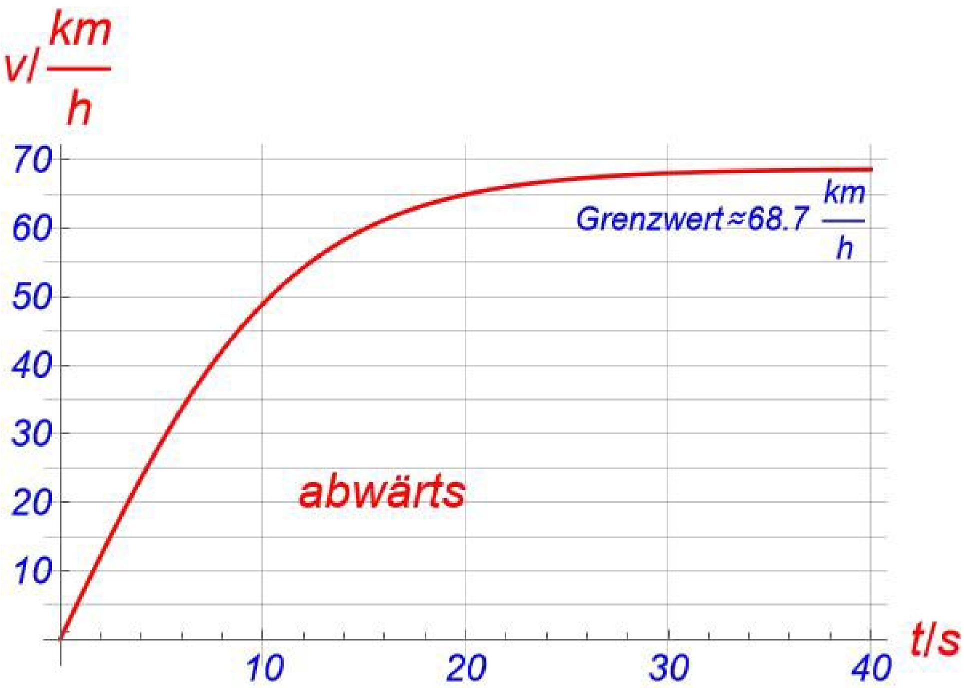
Bemerkung: Der Begriff „Hundekurve" entstand aus dem seitlichen Laufen eines Hundes in Richtung seines Herrchens z.B. eines Joggers. Er rennt von der Seite immer gerade in die Richtung der momentanen Position seines Herrchens, also tangential zu seiner Bewegungskurve, obwohl das ein weiterer Weg ist, als wenn er in einer Diagonalen auf den geschätzten Endpunkt seiner Ankunft zulaufen würde.

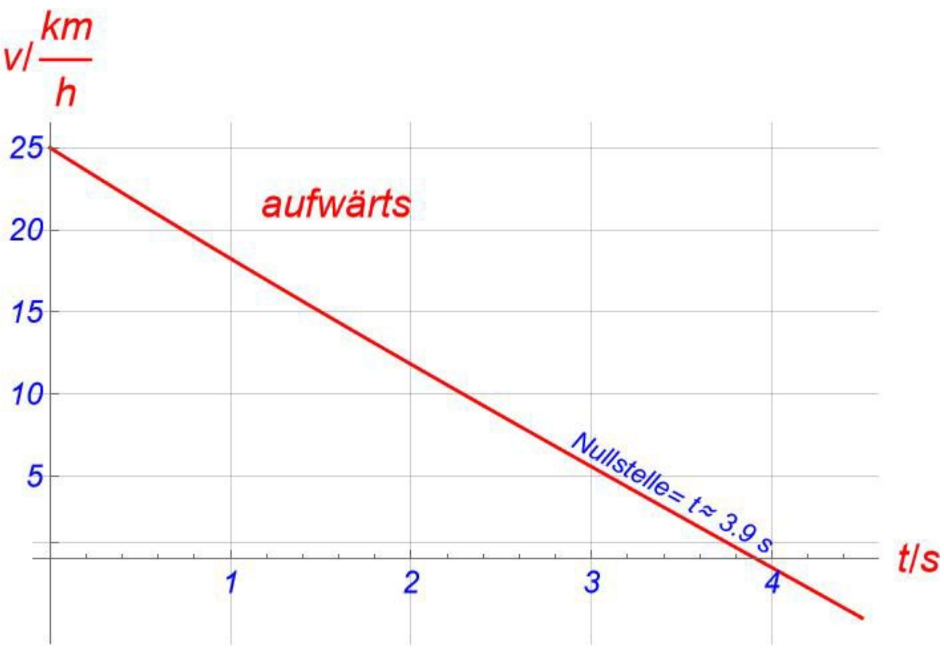
Bewegungsgleichungen

Aufgrund der Formeln von S. 3 lassen sich die Bewegungsgleichungen aufstellen, die Rollreibungskraft soll vernachlässigt werden, x zeigt hangabwärts.

$$\boxed{\begin{array}{c} m \cdot \ddot{x} = \underset{\text{aufwärts}}{\overset{\text{abwärts}}{\pm}} m \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \frac{2}{3} \cdot A \cdot c_W \cdot \rho_L \cdot \dot{x}^2 \equiv \\ m \cdot \dot{v} = \underset{\text{aufwärts}}{\overset{\text{abwärts}}{\pm}} m \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \frac{2}{3} \cdot A \cdot c_W \cdot \rho_L \cdot v^2 \equiv \\ \text{Bewegungsgleichung für } v(t) \end{array}}$$

Die Lösung der Differentialgleichung für v wird als Nebenrechnung unten angegeben. Als Beispiel soll der Verlauf der Geschwindigkeit v als Funktion der Zeit t einmal für eine Abfahrt mit Anfangsgeschwindigkeit v(t=0)= 0, einer Neigung von 10°, einer Fläche A gleich 0,6 m², einer Gesamtmasse von m=100 kg bei $\rho_L = 1{,}3\frac{kg}{m^3}$ bez. c_W = 0,9 und einmal eine Aufwärtsbewegung mit denselben Daten bei einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 von 25 km/h berechnet werden, Pedalkräfte werden nicht ausgeübt. Die Ergebnisse sind in den beiden Abbildungen dargestellt..





Bei der Abwärtsfahrt nimmt anfangs die Geschwindigkeit bis zum Wert v= 68,7 km/h zu, dann ist

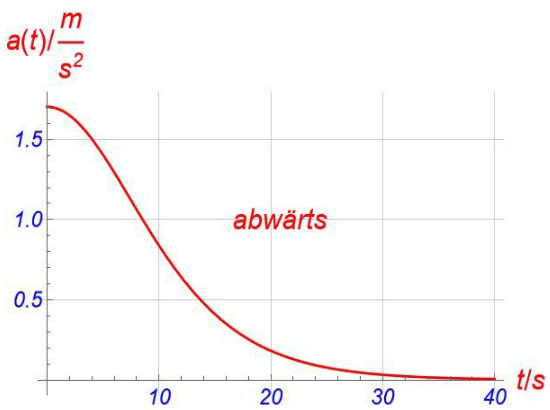
$$m \cdot g \cdot \sin(\alpha) = \frac{2}{3} \cdot A \cdot c_W \cdot \rho_L \cdot v^2$$

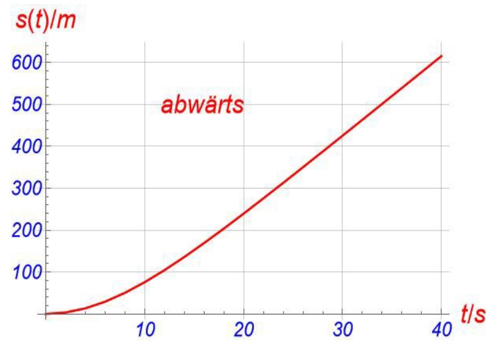
dh. die Hangabtriebskraft und die Reibungskraft Luft/ Kette sind gleich groß und damit $\dot{v} = 0 \rightarrow v = \text{const.} = 68{,}7\,\text{km/h}$.

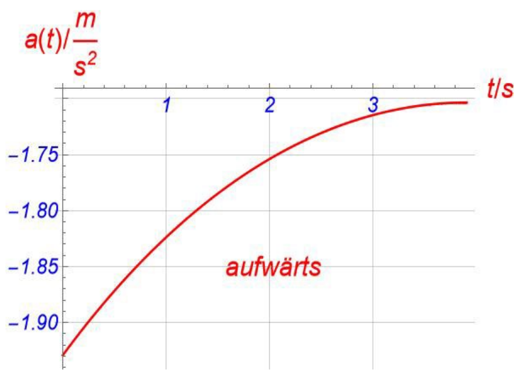
Bei der Aufwärtsfahrt ist nach t= 3,9 s die anfängliche kinetische Energie durch Hangabtrieb und Reibung verbraucht, dh. v(t)=0.

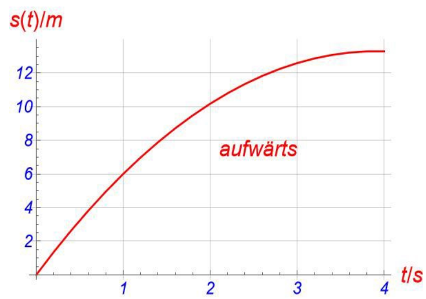
Die Beschleunigung a(t) und den Weg s(t) erhält man durch Differentiation und Integration von v(t) :

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}\,;\, s(t) = \int_0^t v(t)\,dt\,;$$









NR.:

Mit $a = \frac{2 \cdot A \cdot c_W \cdot \rho_L}{3 \cdot m}$; $b = g \cdot \sin(\alpha)$

$v(t) = \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \tanh\left(t \cdot \sqrt{a \cdot b}\right)$; Grenzwert$_{(\text{abwärts})}$ $v = \sqrt{\frac{b}{a}}$;

$$t(v=0)_{\text{aufwärts}} = \sqrt{\frac{1}{a \cdot b}} \cdot \arctan\left(v_0 \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}\right)$$

Soll die Rollreibung berücksichtigt werden:

statt $\sin(\alpha) \to \sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)$

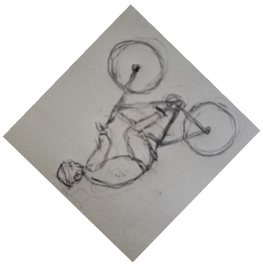
Berg-und Talfahrt

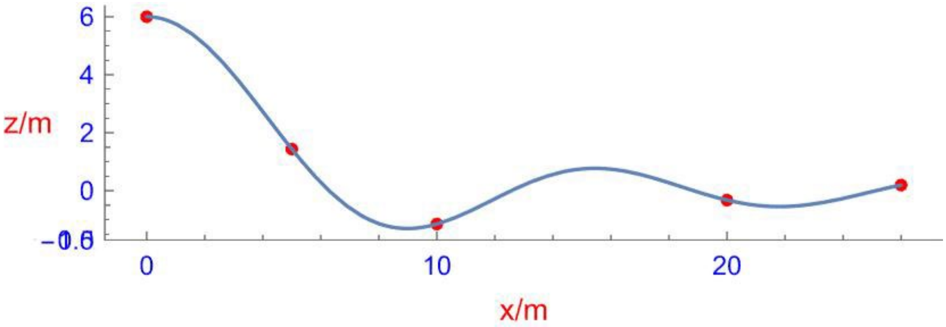
Bisher wurden nur geradlinige Bewegungen behandelt. Bei üblichen Straßen handelt es sich um Berg- Tal- und Kurvenfahrten, die Bewegungsgleichungen müssen dann vektoriell mit $\vec{r}(t)$ in Parameterform umgeschrieben werden.

Bei der abgebildeten Straßenführung soll untersucht werden, ob die Abfahrtsenergie genügt, um einen Salto mit dem Fahrrad zu drehen, Luft- Ketten- und Rollreibung werden vernachlässigt.

Die Parameterform der Straße lautet

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \cdot m \\ 0 \\ \frac{12 \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{t} \cdot m \end{pmatrix}$$





$$\vec{r}_z\left(t=0\right)-\vec{r}_z\left(t=26\right)=5{,}8\ \mathrm{m}=\text{Höhenunterschied}\ \Delta h$$

$$\Delta E_h = M\cdot g\cdot \Delta h = 80\cdot \mathrm{kg}\cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{2}\cdot 5{,}8\,\mathrm{m}\approx 4556{,}6\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$$

mit M=80 kg. Die Rotationsenergie ergibt

$$E_{rot}=\frac{1}{2}\cdot\Theta\cdot\left(2\cdot\pi\cdot u\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 225\cdot \mathrm{kg}\cdot \mathrm{m}^2\cdot\left(2\cdot\pi\cdot\frac{1}{s}\right)^2\approx 4441{,}3\cdot \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$$

mit einer Drehfrequenz von u=1/s und dem Trägheitsmoment $\Theta = 225\cdot \mathrm{kg}\cdot \mathrm{m}^2$, danach wäre der Salto gerade möglich.

Eine allgemeinere Bestimmung der Energie bei der Berg- und Talfahrt ergibt sich aus einer vektoriellen Behandlung:

$$\boxed{\Delta E = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}.\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\cdot dt} = \int_0^{26} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -M\cdot g \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1\cdot m \\ 0 \\ \dfrac{6\cdot \mathrm{Cos}\left(\frac{t}{2}\right)\cdot m}{t} - \dfrac{12\cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right)\cdot m}{t^2} \end{pmatrix} dt$$

$$= 4556{,}6\cdot N\cdot m$$

Die Bogenlänge ist

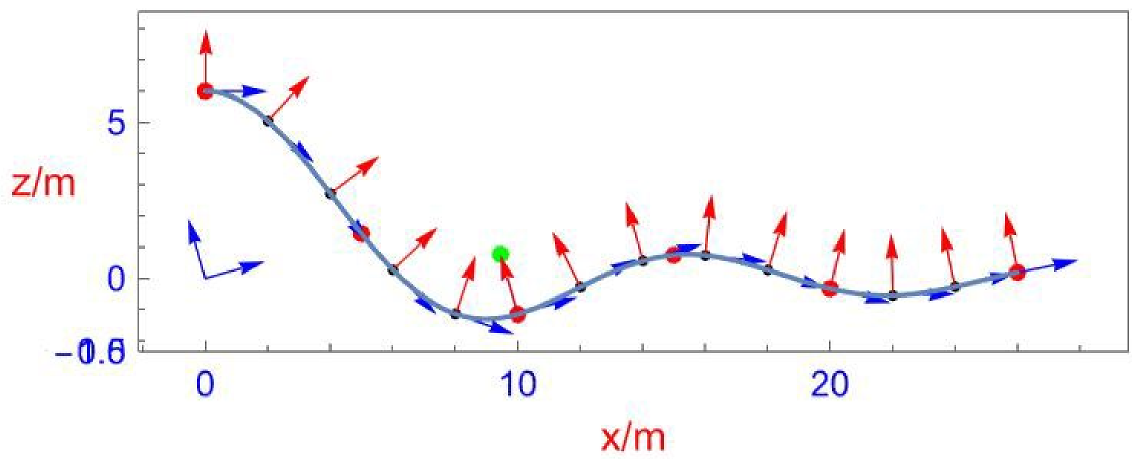
$$\boxed{\ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{d\vec{r}_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\vec{r}_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\vec{r}_z}{dt}\right)^2}\, dt} = \int_0^{26} \sqrt{1\cdot m^2 + \left(\frac{6\cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right)\cdot m}{t} - \frac{12\cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right)\cdot m}{t^2}\right)^2}\cdot dt$$

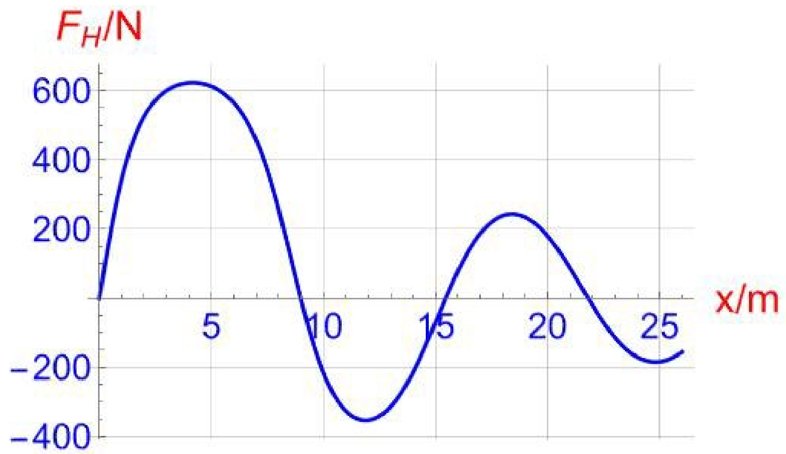
$$= 29{,}6\cdot m$$

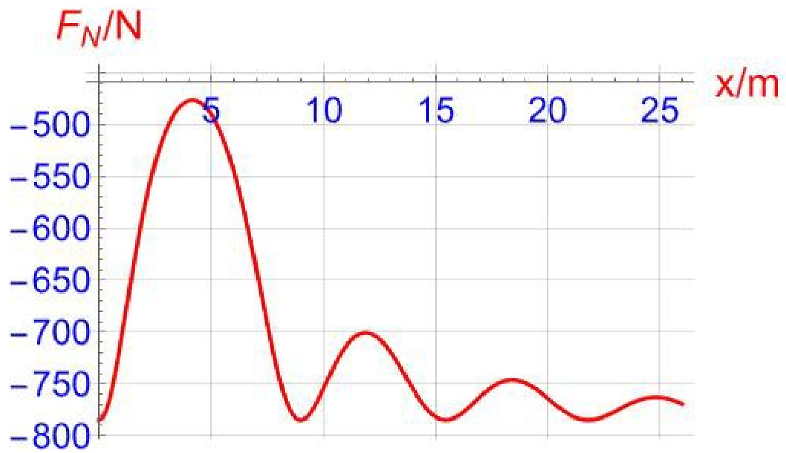
Nimmt man eine mittlere Kraft von $\overline{F} = 10$ N für Ketten- und Luftwiderstand an, müssten noch 296 Nm von ΔE abgezogen werden, sodass die Rotationsenergie E_{rot} nicht mehr aufgebracht werden könnte. Da Ketten- und Luftwiderstand geschwindigkeitsabhängig sind, würde nur die Lösung der Differentialgleichungen S. 39 eine genaue Abschätzung ergeben (mit $\vec{r}(t)$ als Zwangsbedingung).

Mit $\vec{e}_T(x)$ und $\vec{e}_N(x)$ als Einheitsvektoren in Tangenten- und Normalen-richtung (in der Abb. mit dem Faktor 2 multipliziert) ergeben sich Hangabtrieb und Normalkraft aus

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -M\cdot g \end{pmatrix} .\vec{e}_N \text{ bez. } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -M\cdot g \end{pmatrix} .\vec{e}_T = M\cdot g\cdot \cos\left[\alpha(x)\right]$$

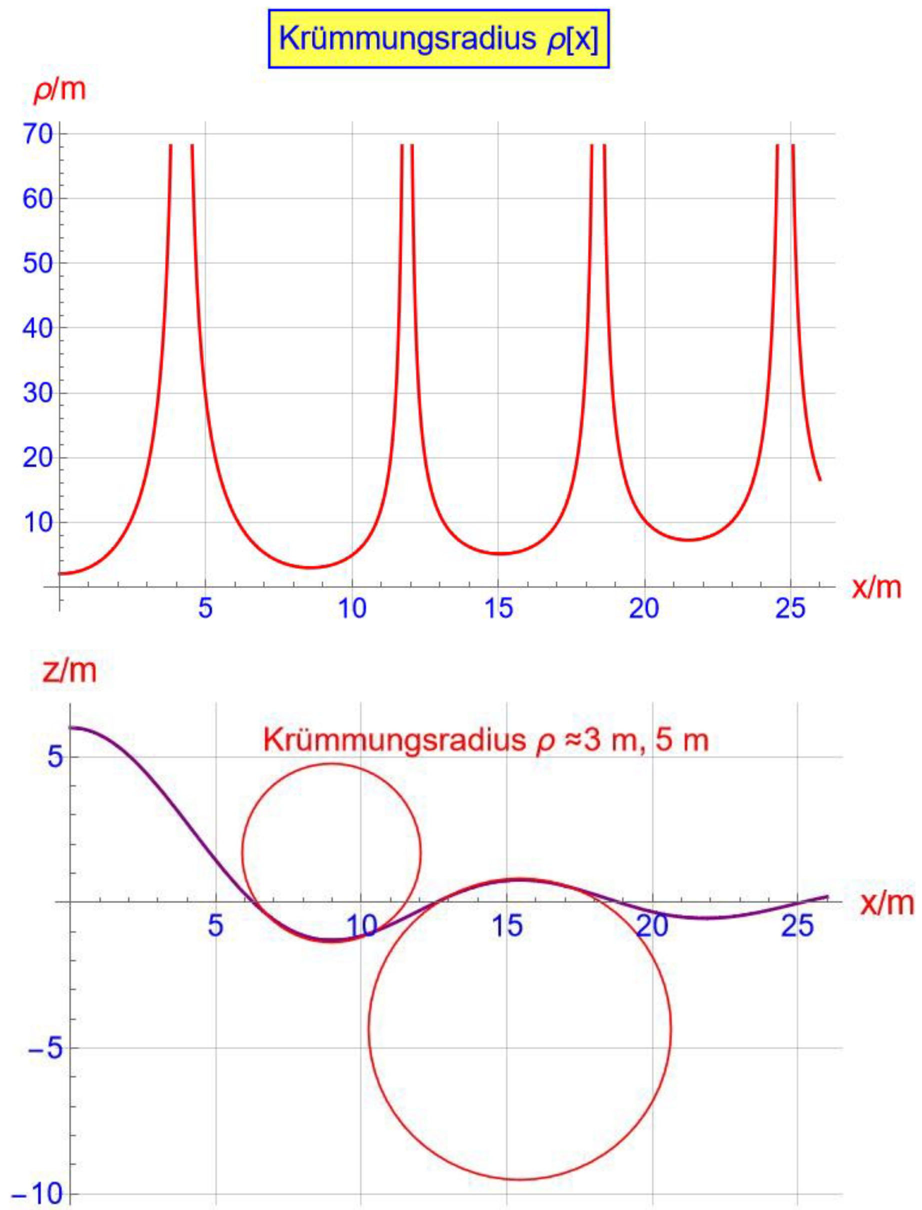






ohne die zusätzlichen Zentrifugalkräfte. Die Kurvenfahrt führt nämlich zu Zentrifugalkräften F_Z , die sich aus dem Krümmungsradius ρ und der Geschwindigkeit v nach $F_Z = M \cdot \frac{v^2}{\rho}$

ergeben und zum Abheben beim Befahren von Kuppen führen können, wenn $F_Z > F_N$ ist.



Im vorliegenden Fall mit M= 80 kg , v= 15 km/h und

$\rho \approx 3$ m bez. $\rho \approx 5$ m ▶ F_Z ~ 450 N bez. F_Z ~ 270 N.

Ab welcher Geschwindigkeit hebt ein Rad von der Kuppe bei x~15 m ab ?

$$M \cdot \frac{v^2}{\rho(15\,m)} = M \cdot g \rightarrow \quad \boxed{v \geq 25{,}7\,\frac{km}{h}}$$

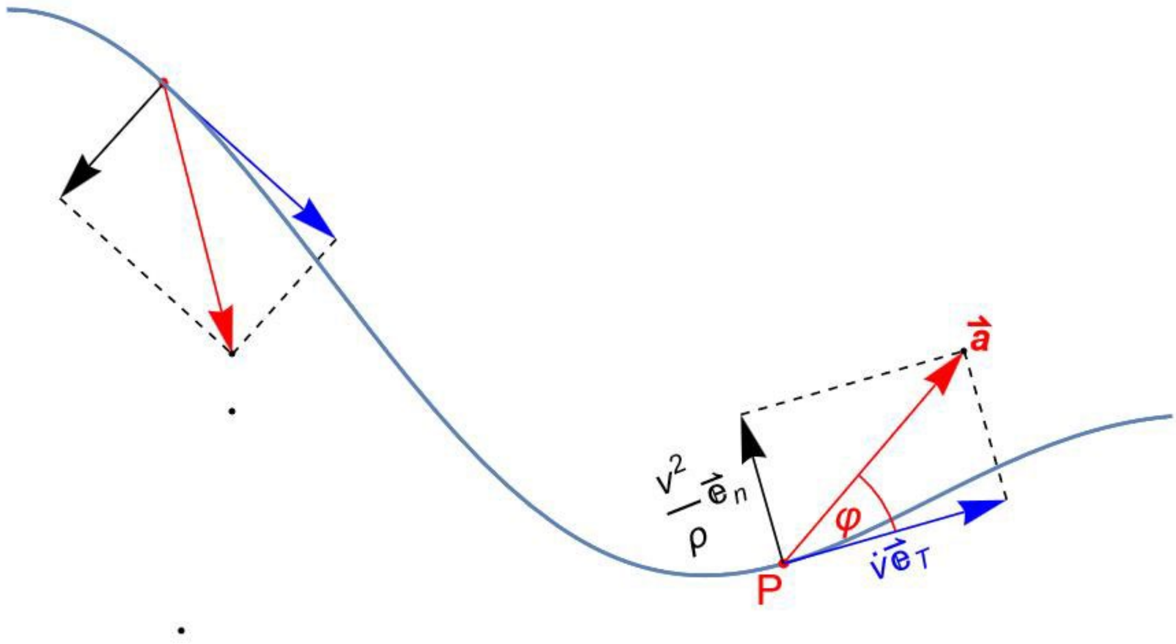
Hier ist die resultierende Normalkraft

$$\boxed{F_{Nres} = M \cdot g \cdot \cos\left[\alpha\left(x\right)\right] - \frac{v\left(x\right)^2}{\rho\left(x\right)} = 0}$$

<u>NR.:</u>

$$K = \text{Krümmung}\,;\, K^2 = \frac{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 \cdot \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^2}{\left|\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2\right|^3}\,;\, \rho = \frac{1}{K}$$

Die *Beschleunigung a* bei Berg- und Kurvenfahrten hat also eine Komponente in Richtung der Geschwindigkeit v in Richtung der Tangente und eine Komponente in Richtung der Normalen zum Mittelpunkt des Krümmungsradiuses mit $\frac{v^2}{\rho}$ als Betrag. (Zentripetalkraft)



$$\boxed{\vec{a}(t) = \dot{v}(t)\cdot\vec{e}_T + \frac{v(t)^2}{\rho}\cdot\vec{e}_n}$$

Vorliegendes Beispiel:

$$y(x) = \frac{12\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\,;\ x_P = 10\,\text{m}\,;\ \dot{v}(x_P) \approx 2,7\cdot\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,;\ v(x_P) = 11,84\cdot\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\rho = \left|\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right|_P \approx 4,876\cdot\text{m} \rightarrow$$

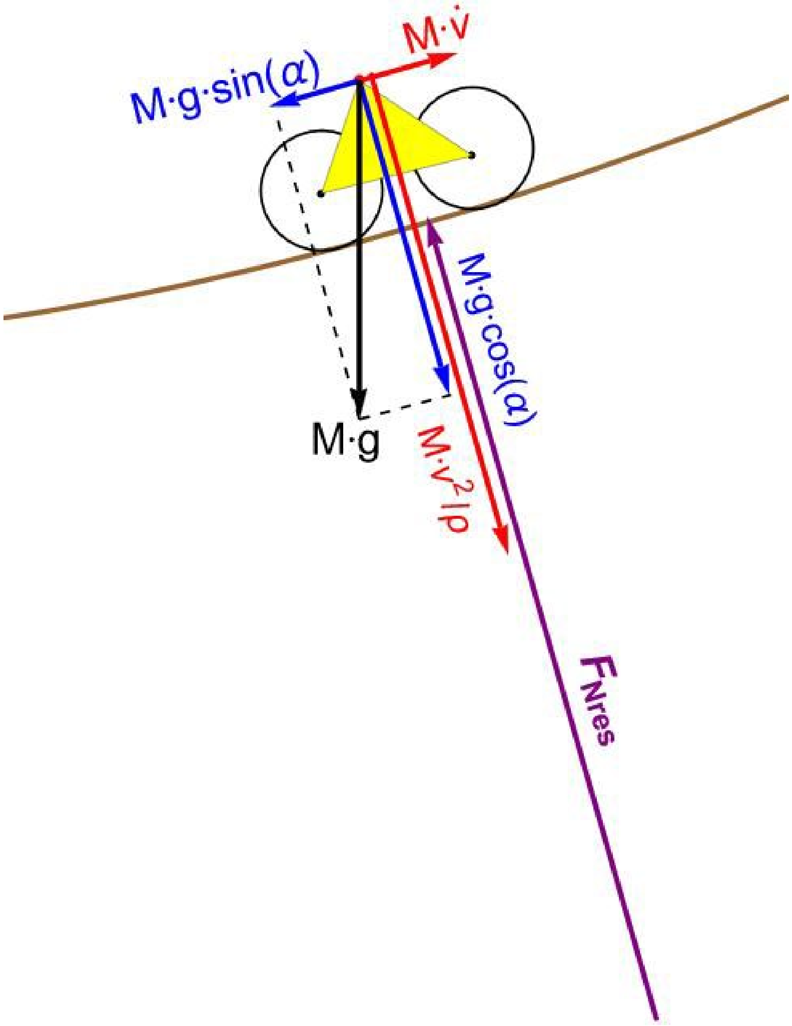
$$\vec{a}_P = \dot{v}(x_P)\cdot\vec{e}_T + \frac{v(x_P)^2}{\rho}\cdot\vec{e}_n \approx (2,7\cdot\vec{e}_T + 28.7\cdot\vec{e}_n)\cdot\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_P = \sqrt{2,7^2 + 28,7^2}\cdot\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 28,9\cdot\frac{\text{m}}{\text{s}^2};\quad \varphi \approx \arctan\left(\frac{28,7}{2,7}\right) \approx 85°$$

$\vec{e}_T, \vec{e}_n$ = Einheitsvektoren in Tangenten – und Normalenrichtung

Aufgabe:

Ein Radfahrer mit Gesamtmasse M=100 kg fährt reibungsfrei aus dem Stand die vorliegende Straße $y(x)=(12\cdot\sin(x/2))/x$ hinunter. Welche resultierende Normalkraft übt er nach 10 m auf den Boden aus und wie groß ist $\dot{v}(x_P)$? (Verwenden Sie den Energiesatz $M\cdot g\cdot h=(1/2)\cdot M\cdot v^2$ zur Bestimmung von v , $\mu=0$).



Nach dem Freikörperbild nach d´Alembert (die Kräfte mit roten Linien sind Trägheitskräfte) gibt es die folgenden dynamischen Gleichgewichtsbedingungen:

$$M \cdot g \cdot \sin(\alpha) - M \cdot \dot{v} = 0$$

$$-M \cdot g \cdot \cos(\alpha) - M \cdot \frac{v^2}{\rho} + F_{Nres} = 0$$

damit

$$y(x) = \frac{12 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}; h = y(0) - y(10) = 7{,}15\,m;$$

$$v(10) = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \approx 11{,}84\frac{m}{s}; \rho(10) \approx 4{,}88\,m; \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=10} \approx 0{,}28$$

$$\rightarrow \alpha \approx 16°; \boxed{F_{Nres} = M \cdot g \cdot \cos(\alpha) + M \cdot \frac{v(10)^2}{\rho(10)}} \approx 3820\,N$$

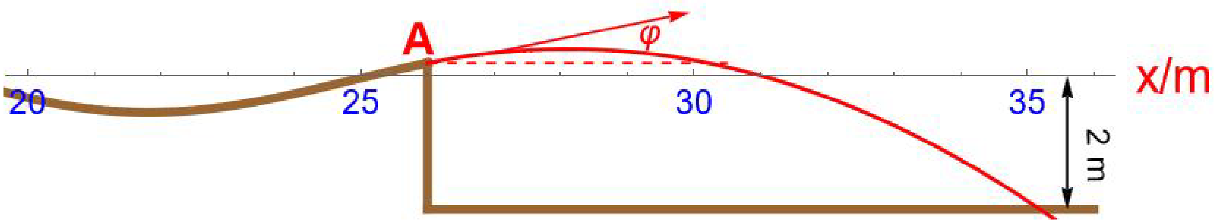
$$\boxed{\dot{v} = g \cdot \sin(\alpha) \approx 2{,}7 \cdot \frac{m}{s^2}}$$

Abflugkurve am Ende der Strecke

Am Ende der Strecke bei x= 26 m soll der Radfahrer über eine Kante auf einer 2 m tiefer liegenden Ebene landen, die Flugkurve und der Landepunkt soll berechnet werden.

Zunächst wird der Betrag der Geschwindigkeit v_0 am Ende der Strecke berechnet. Nach Seite 56 erhält man aus dem

Höhenunterschied bei Vernachlässigung der Reibung eine Energie von ca. 4260 Nm und daraus mit M= 80 kg und 4260 Nm= $(1/2)\cdot M\cdot v_0^2$ ► v_0~10 m/s.



Als nächstes wird der Winkel φ aus der Steigung bestimmt:

$$\varphi = \arctan(\frac{dy(x)}{dx}\Big|_{x=x_A} \approx 11° \to \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos(\varphi) \\ v_0 \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10{,}11 \\ 2{,}04 \end{pmatrix} \cdot \frac{m}{s}$$

$$\vec{a}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}; \vec{v}(t) = \int_0^t \vec{a}_S dt' + \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos(\varphi) \\ v_0 \cdot \sin(\varphi) - g \cdot t \end{pmatrix};$$

$$\vec{r}(t) = \int_0^t \vec{v}(t) dt' = \begin{pmatrix} x_A + v_0 \cdot \cos(\varphi) \cdot t \\ y_A + v_0 \cdot \sin(\varphi) \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 + 10.12 \cdot t \\ \frac{6 \cdot \sin(13)}{13} + 2{,}04 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 \end{pmatrix}$$

Das ist die Parameterdarstellung des Ortsvektors der Kurve, x=x(t) und y= y(t) werden als Funktion der Zeit beschrieben.

x = 26 m+10,12 m/s$\cdot$ t ; y = 0,19 m +2,04 m/s$\cdot$ t – 4,9 m/$s^2\cdot t^2$
Die Kurve ist in der Abbildung rot eingezeichnet. Den Auftreffpunkt erhält man aus :

$$y_A + v_0 \cdot \sin(\varphi) \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = \frac{6 \cdot \sin(13)}{13} + 2{,}04 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 = -2 \cdot m$$

$$t_{End} \approx 0{,}91 \to \vec{r}(t_{End}) \approx \begin{pmatrix} 35{,}2\ m \\ -2\ m \end{pmatrix}; x_{End} = 35{,}2\ m, y_{End} = -2\ m$$

Soll y als Funktion von x dargestellt werden, muss t aus der Gleichung für x(t) in y(t) eingesetzt werden

$$x(t) = x_A + v_0 \cdot \cos(\varphi) \cdot t \; ; \; y(t) = y_A + v_0 \cdot \sin(\varphi) \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$y(x) = y_A - \frac{g \cdot (x - x_A)^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos(\varphi)^2} + (x - x_A) \cdot \tan(\varphi)$$

Lagrangegleichungen 2.ter Art:

Die Bewegungsgleichungen x(t) lassen sich auch aus kinetischer und potentieller Energie nach den „Lagrangegleichungen 2.ter Art“ gewinnen

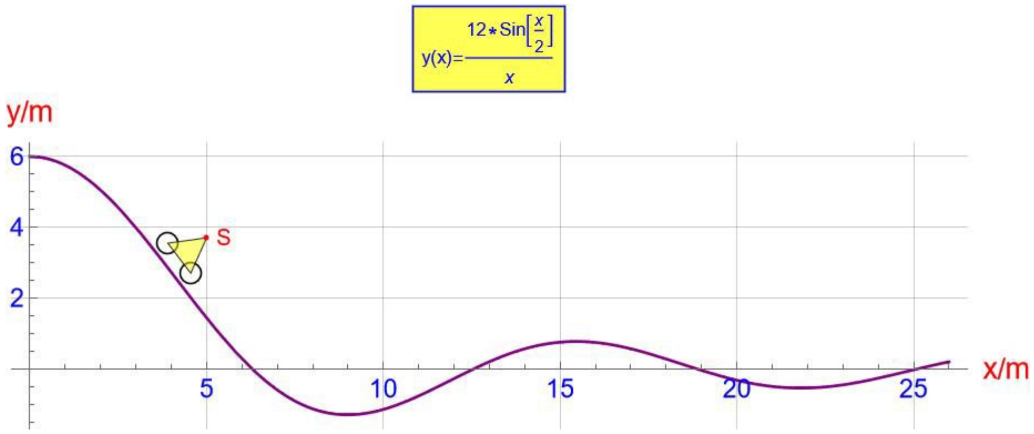
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

mit der Lagrangefunktion L= E_{kin} - E_{pot}. Im vorliegenden Fall ist

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \left\{ \dot{x}^2 + \dot{x}^2 \cdot \left(\frac{6 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{x} - \frac{12 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} \right)^2 \right\}$$

$$E_{pot} = M \cdot g \cdot y(x) = M \cdot g \cdot \frac{12 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$$

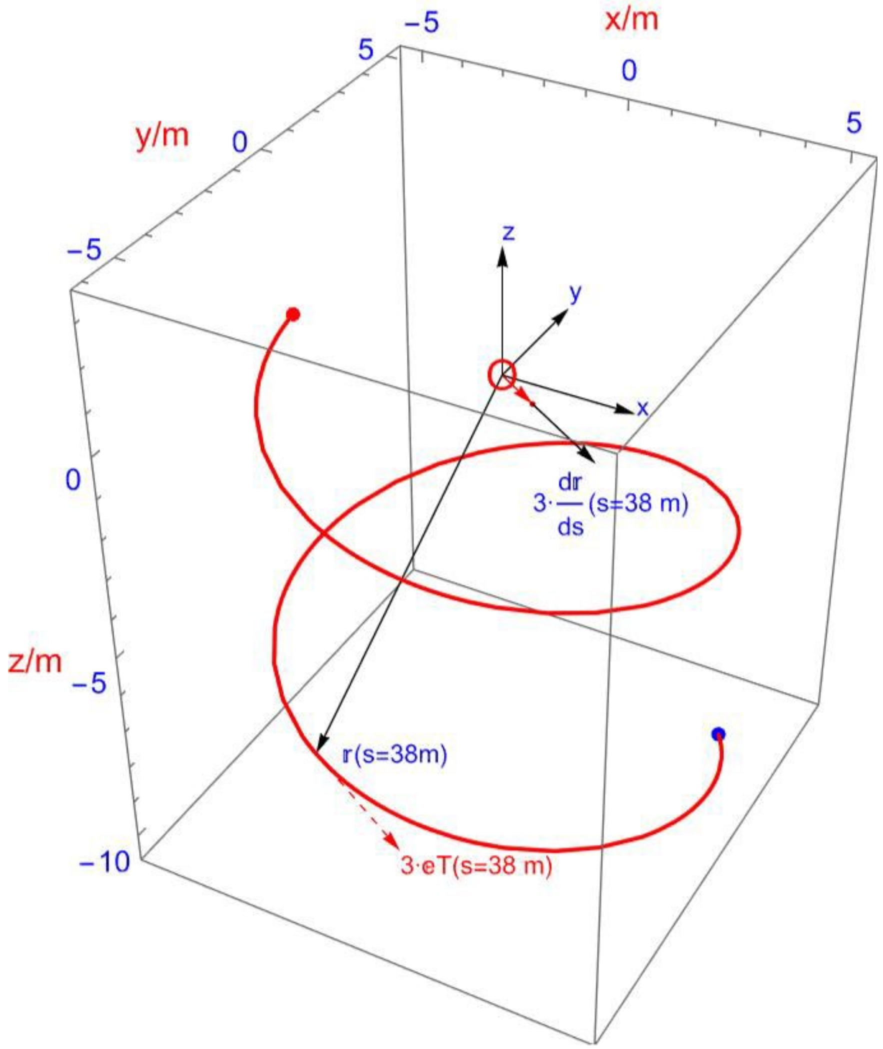
$$L = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \left\{ \dot{x}^2 + \dot{x}^2 \cdot \left(\frac{6 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{x} - \frac{12 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} \right)^2 \right\} - M \cdot g \cdot \frac{12 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$$



es wird von einer Fahrt mit vernachlässigbarer Reibung unter der Schwerkraft M·g ausgegangen. Mit Reibung muss die Lagrange-gleichung um eine Dissipationsfunktion P erweitert werden (siehe [3] am Schluss). Die Lösung der Lagrangegleichung führt auf eine Differentialgleichung $f(\ddot{x}(t), \dot{x}(t).....)$,deren Lösung x(t), y(t), v(t) usw. ergibt.

<u>Kurvenfahrt</u> (siehe auch S.13)

Als Beispiel für eine Kurvenfahrt soll die Abfahrt auf einer schraubenförmigen Straße z.B. in einem Parkhaus behandelt werden.



Die Parameterdarstellung lautet (Formelsammlung) als Funktion vom Bogen s

$$\vec{r}(s) = -\begin{pmatrix} a\cdot \operatorname{Cos}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\cdot m \\ a\cdot \operatorname{Sin}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\cdot m \\ \frac{b\cdot s}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot m \end{pmatrix}$$

Der Krümmungskreisradius

$\rho = \dfrac{a^2+b^2}{a}$ ist konstant 5,2 m mit a=5 m und b=1 m beim verwendeten Beispiel.

Der Einheitsvektor in Richtung der Tangente hat die Richtung

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \begin{pmatrix} \dfrac{a \cdot \mathrm{Sin}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\dfrac{a \cdot \mathrm{Cos}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{5 \cdot \mathrm{Sin}\left(\frac{s}{\sqrt{26}}\right)}{\sqrt{26}} \\ -\dfrac{5 \cdot \mathrm{Cos}\left(\frac{s}{\sqrt{26}}\right)}{\sqrt{26}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{26}} \end{pmatrix}$$

der Hangabtrieb ergibt sich aus dem Skalarprodukt

$$F_H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -M \cdot g \end{pmatrix} . \vec{e}T = \frac{b \cdot g \cdot M}{\sqrt{a^2+b^2}} = \text{const.} \approx 192{,}4\ \text{N mit } M = 100\,\text{kg}$$

Damit lauten die Bewegungsgleichungen

$$\boxed{M \cdot v_s'(t) = \underset{\text{aufwärts}}{\overset{\text{abwärts}}{\pm}} \frac{b \cdot g \cdot M}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{2}{3} \cdot A \cdot c_W \cdot \rho_L \cdot v_s(t)^2} = \underset{\text{aufwärts}}{\overset{\text{abwärts}}{\pm}} \frac{k}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{2}{3} \cdot l \cdot v_s(t)^2$$

$$v_s(t) = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot k \cdot \mathrm{Tanh}\left(\frac{1}{M} \cdot \frac{\sqrt{\frac{2}{3} \cdot l \cdot k \cdot t}}{\left(a^2+b^2\right)^{1/4}} \right)}{\sqrt{l} \cdot \left(a^2+b^2\right)^{1/4}} \text{ mit } k = b \cdot g \cdot M \text{ und } l = A \cdot c_W \cdot \rho_L$$

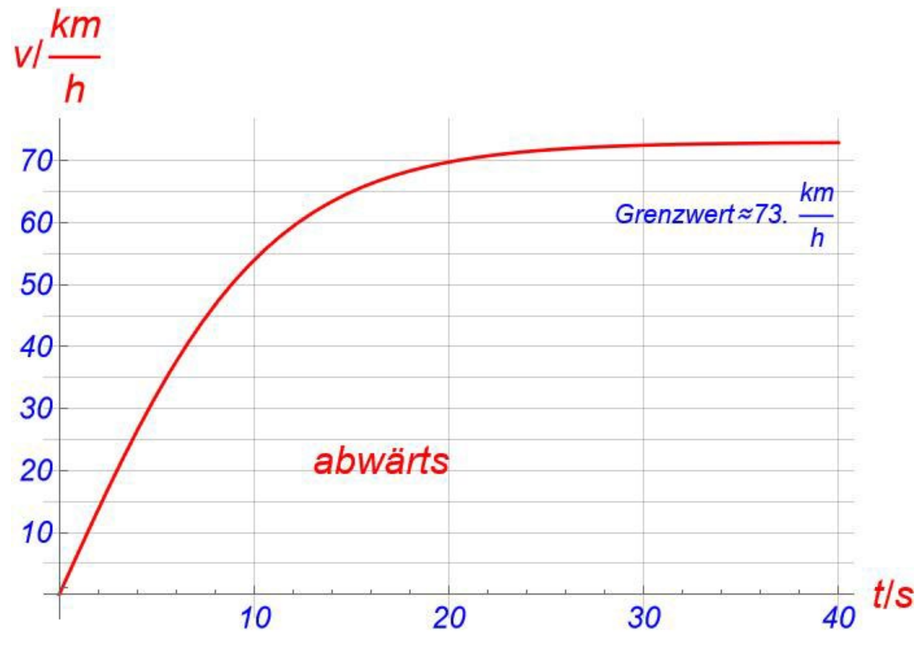
$v_s(t=0) = 0$; keine Pedalkräfte

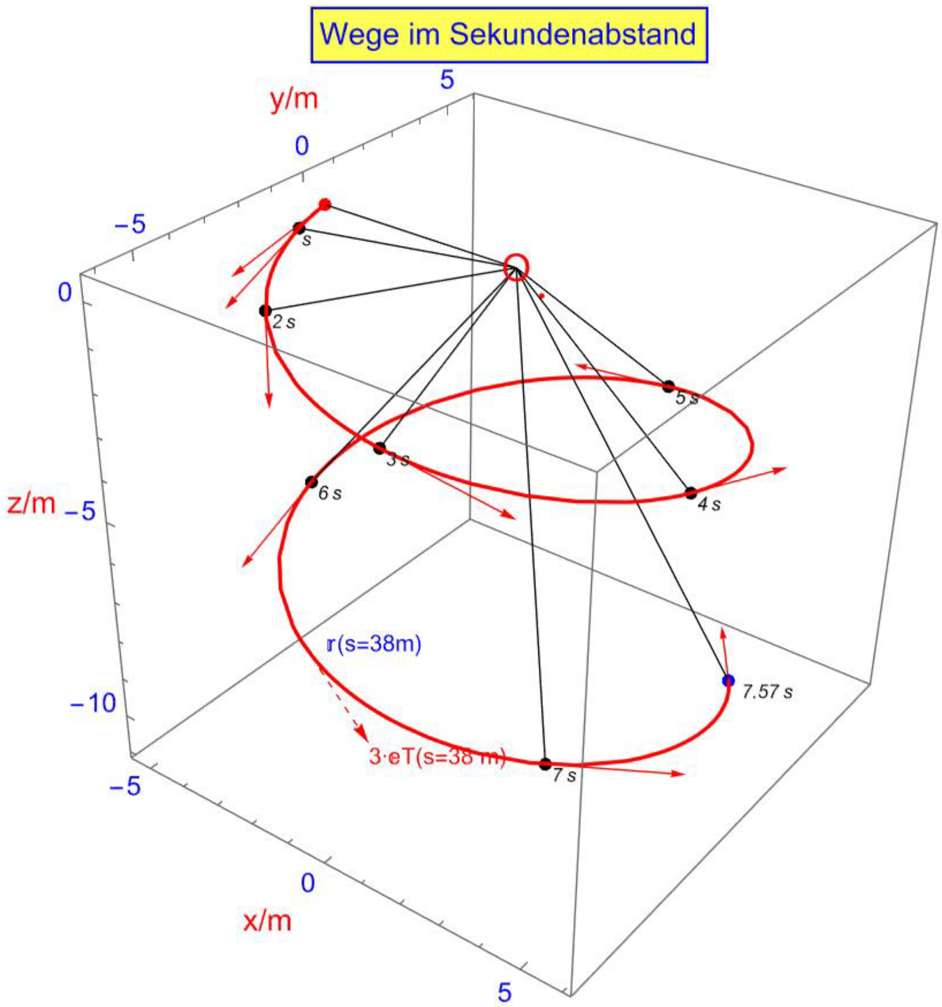
Das Ergebnis ist analog zu den Bewegungsgleichungen S. 39: bei der Abwärtsfahrt nimmt die Geschwindigkeit ($v_0 = 0$) zu bis Hangabtriebskraft und Luftreibungskraft gleich werden

$$v_{sGrenzwert} = \sqrt{\frac{\frac{3}{2} \cdot k}{1}} \cdot \frac{1}{\left(a^2 + b^2\right)^{1/4}}$$

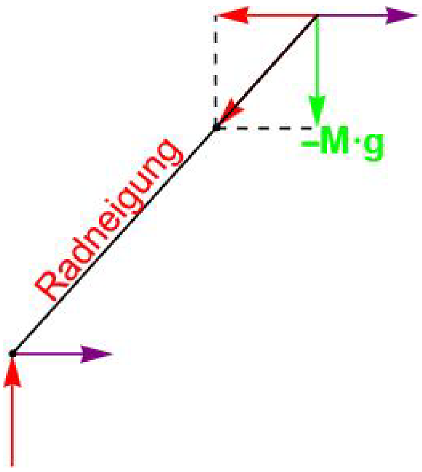
Der Grenzwert wird bei der abgebildeten Schraube nicht erreicht, weil der durchfahrene Bogen zu kurz ist.

Ein Wegrutschen droht nach Seite 12 ab $\mu_{Haft} = \frac{v_s(t)^2}{\rho \cdot g}$, mit $\mu_{Haft} = 0{,}9$ bei ~24 km/h , das ist nach ~3,6 s und Weg s~12,5 m erreicht mit $s(t) = \int_0^t v_s(t')\,dt'$ (siehe Abb.). Eine zusätzliche Kraft F durch Treten der Pedale (Seite 9) wird in die Bewegungsgleichungen additiv dazugesetzt und die Differentialgleichung damit gelöst. („Riccatische“ Diffgl.)





Wege im Sekundenabstand
y/m
z/m
x/m
5
0
−5
0
−5
−10
−5
0
5
s
2 s
3 s
4 s
5 s
6 s
7 s
7.57 s
r(s=38m)
3·eT(s=38 m)



Radneigung
−M·g

Kinetische Energie, Rotationsenergie

Bei genaueren Berechnungen und schwereren Rädern ist es manchmal notwendig, die Rotationsenergie der Räder

$$T=\frac{1}{2}\cdot\Theta\cdot\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}\cdot\Theta\cdot\frac{v^2}{R^2}\ \text{(Rollbedingung } x=R\cdot\varphi\rightarrow v=R\cdot\dot{\varphi})$$

zu berücksichtigen. Sie ist klein gegenüber der Kinetischen Energie $\frac{1}{2}\cdot M\cdot v^2$. Als Gesamtenergie mit Vorder- und Hinterrad mit jeweiliger Masse M_{Rad} ergibt sich mit Θ von Seite 30

$$\frac{1}{2}\cdot M\cdot v^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\Theta\cdot\omega^2\approx\frac{1}{2}\cdot M\cdot v^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{M_{Rad}\cdot R_{Rad}{}^2}{2}\cdot\frac{v^2}{R_{Rad}{}^2}$$

$$\approx\frac{1}{2}\cdot v^2\cdot\left(M+M_{Rad}\right)$$

also ein Verhältnis im Prozentbereich

$$\boxed{\frac{E_{rot}}{E_{kin}}\approx\frac{M_{Rad}}{M_{Radfahrer+gesamtes\,Fahrrad}}}$$

Energieverbrauch

Der Luftwiderstand bildet den größten Bremswiderstand beim ebenen Radfahren, die Leistung P ist nach Formel S.3

proportional zur Geschwindigkeit v^3. In dieser Formel wurde als Beitrag von Kette, Lager und Reifen 1/3 des Luftwiderstandes $F_L = c_W \cdot \frac{\rho}{2} \cdot A \cdot v^2$ dazugesetzt. Andere Beiträge können durch einen Faktor k leicht berücksichtigt werden:

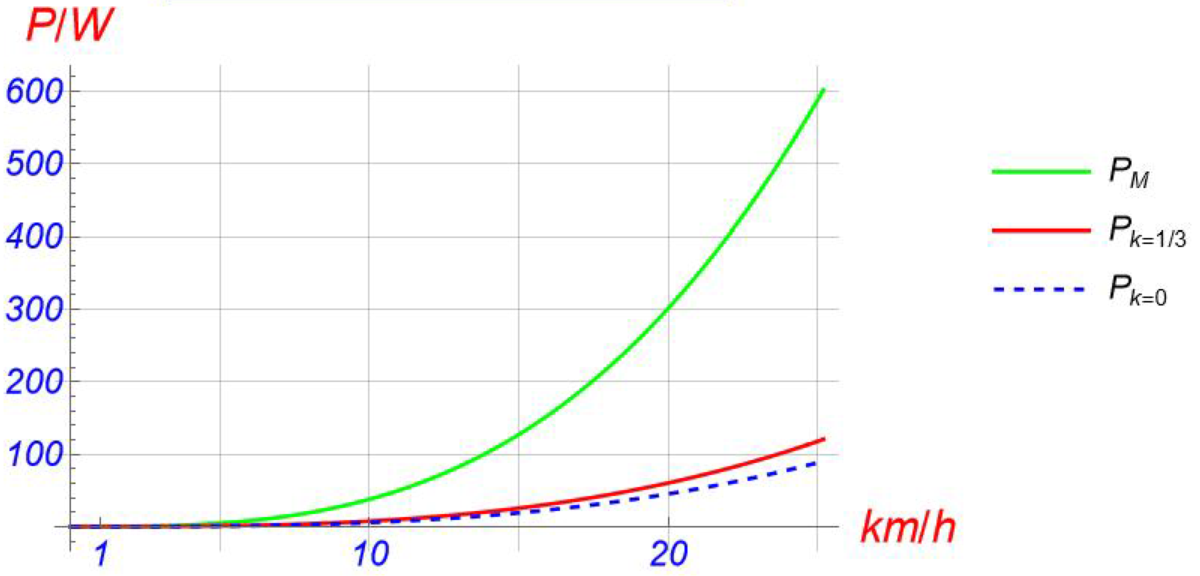
$$\left\{ M \cdot g \cdot \left[\mu \cdot \cos(\alpha) \underset{\text{abwärts}}{\overset{\text{aufwärts}}{\pm}} \sin(\alpha) \right] + \frac{1}{2} \cdot (1+k) \cdot c_W \cdot \rho_L \cdot A \cdot v^2 \right\} \cdot v$$

für k= 1/3 ergibt sich die Formel S. 3, die Neigung α und μ wird in den folgenden Darstellungen zu null angenommen, die Querschnittsfläche A zu 0,45 m^2, der Widerstandsbeiwert c_W zu 0,9 und ρ_L zu $1{,}3 \cdot kg/m^3$. Der Wirkungsgrad der Muskeln wird zu 20% angenommen. Damit ergeben sich folgende Zusammenhänge:

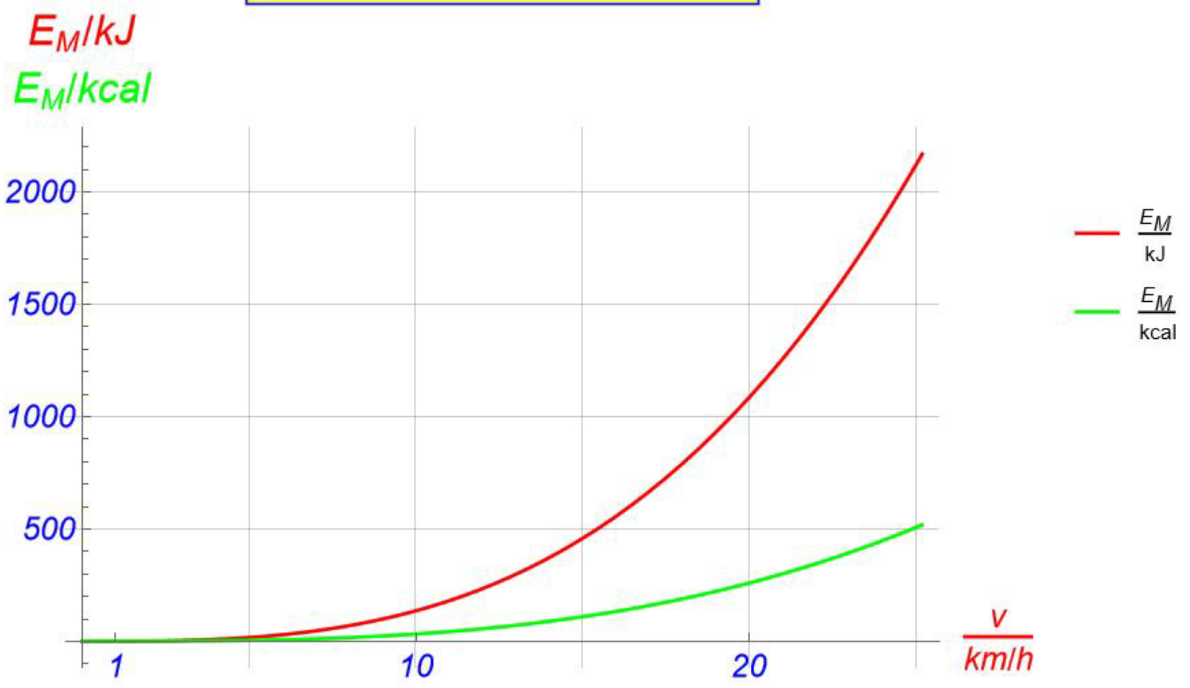
P_M ist die von den Muskeln aufzubringende Leistung (k=1/3), bei k=0 wird die Bremskraft von Kette, Reifen und Lager vernachlässigt. (1 kJ = 0,239 kcal, 1 kcal = 4,184 kJ, Fett: 9 kcal/g = 37 kJ/g)

Multipliziert man die Leistung mit der Zeit, ergibt sich der Energieverbrauch in KJ oder kcal, in der folgenden Abbildung ist der Energieverbrauch bei einer Stunde Fahrt mit der Geschwindigkeit v dargestellt:

Muskelleistung P_M und mechanische Leistung aufgrund des Luftwiderstandes



Energie, die bei einer Stunde Fahrt von den Muskeln aufgebracht werden muss als Funktion der Geschwindigkeit



Werden andere Zeiten und Querschnittsflächen A (0,3 m^2 geduckte Haltung bei Rennfahrer 0,45 m^2 normal sitzend, 0,6 m^2 aufrechte Haltung) gewählt, benützt man Formeln:

$$E_M[kJ] =$$

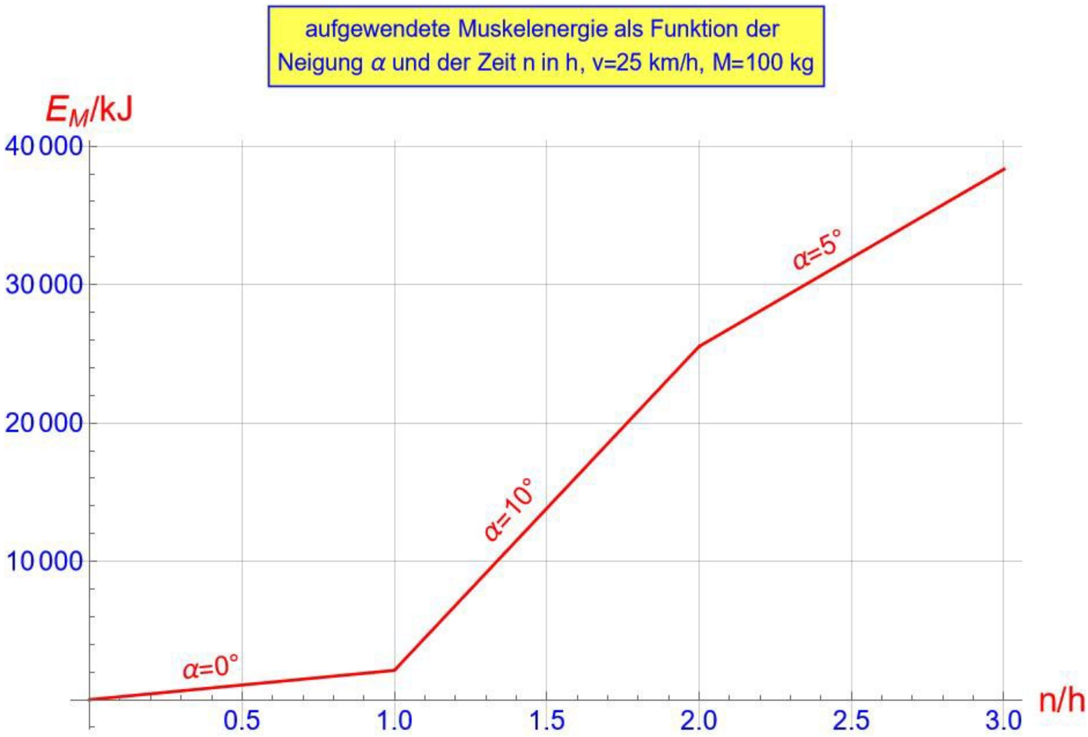
$$\boxed{\left\{M\cdot g\cdot\left[\mu\cdot\cos(\alpha)\underset{\text{abwärts}}{\overset{\text{aufwärts}}{\pm}}\sin(\alpha)\right]+\frac{1}{2}\cdot(1+k)\cdot c_W\cdot\rho_L\cdot A\cdot v^2\right\}\cdot v\cdot 3{,}6\,s\cdot n}$$

$$n = \text{Zahl der Stunden}\ (30\,\text{min} \rightarrow n = 0{,}5)$$

$$E_M[kcal] = E_M[kJ]\cdot 0{,}239$$

μ meist ~0, α ohne spezielle Kennzeichnung = 0, v in m/s, M = Masse Fahrer und Fahrrad ~100 kg, k=1/3

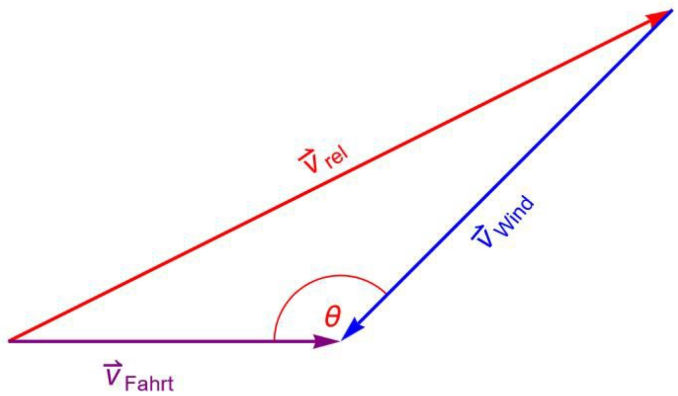
Mit der Formel lassen sich die zeitlichen Verläufe des Energieverbrauchs der Muskeln für verschiedene Steigungen darstellen, eine waagrechte Linie bedeutet eine Abwärtsfahrt, bei der die Hangabtriebskraft gleich der Luftwiderstandskraft bei der gewählten Geschwindigkeit ist.



Gegenwind, Mitwind

Bei Gegenwind muss der Luftwiderstand in den Formeln Seite 3 und 2 verändert werden. Der Fahrer fährt nun gegen die Windkraft F_L mit der Relativgeschwindigkeit v_{rel} (Abb.)

$$\vec{F}_L = \frac{1}{2} \cdot \rho_L \cdot c_W \cdot A \cdot v_{rel} \cdot \vec{v}_{rel}$$



Die Energie, die er für ein Wegstück $\vec{s}$ aufbringen muss, ist $\vec{F}_L.\vec{s}$

und die Leistung $P_L = \vec{F}_L.\vec{v}_{Fahrt} = \frac{1}{2}\cdot\rho_L\cdot c_W\cdot A\cdot v_{rel}\cdot\vec{v}_{Fahrt}.\vec{v}_{rel}$

dh.

$$P = m\cdot g\cdot\left[\mu\cdot\cos(\alpha)\underset{\text{abwärts}}{\overset{\text{aufwärts}}{\pm}}\sin(\alpha)\right]\cdot v + \frac{2}{3}\cdot c_W\cdot\rho_L\cdot A\cdot v_{rel}\cdot\vec{v}_{Fahrt}.\vec{v}_{rel}$$

Das Skalarprodukt ergibt :

$$\vec{v}_{Fahrt}.\vec{v}_{rel} = \begin{pmatrix} v_{Fahrt} \\ 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} v_{rel}\cdot\cos(\sphericalangle v_{rel}v_{Fahrt}) \\ v_{rel}\cdot\sin(\sphericalangle v_{rel}v_{Fahrt}) \end{pmatrix} = v_{Fahrt}\cdot v_{rel}\cdot\cos(\sphericalangle v_{rel}v_{Fahrt})$$

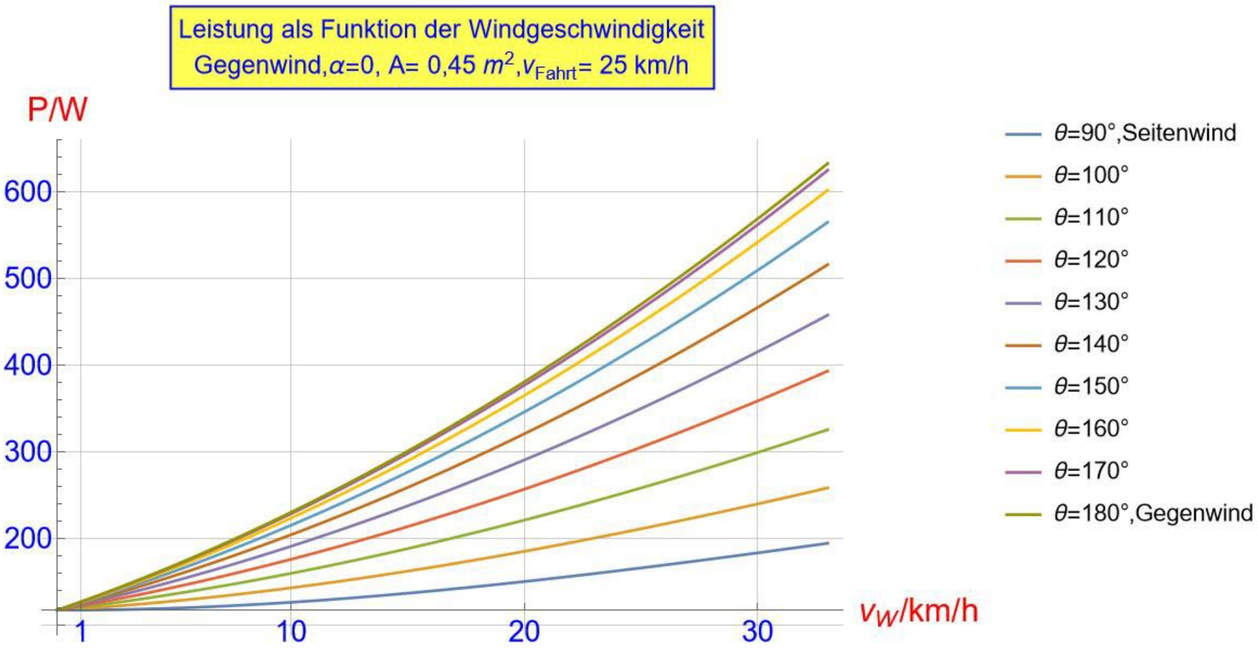
oder mit Winkel θ (Pythagoras):

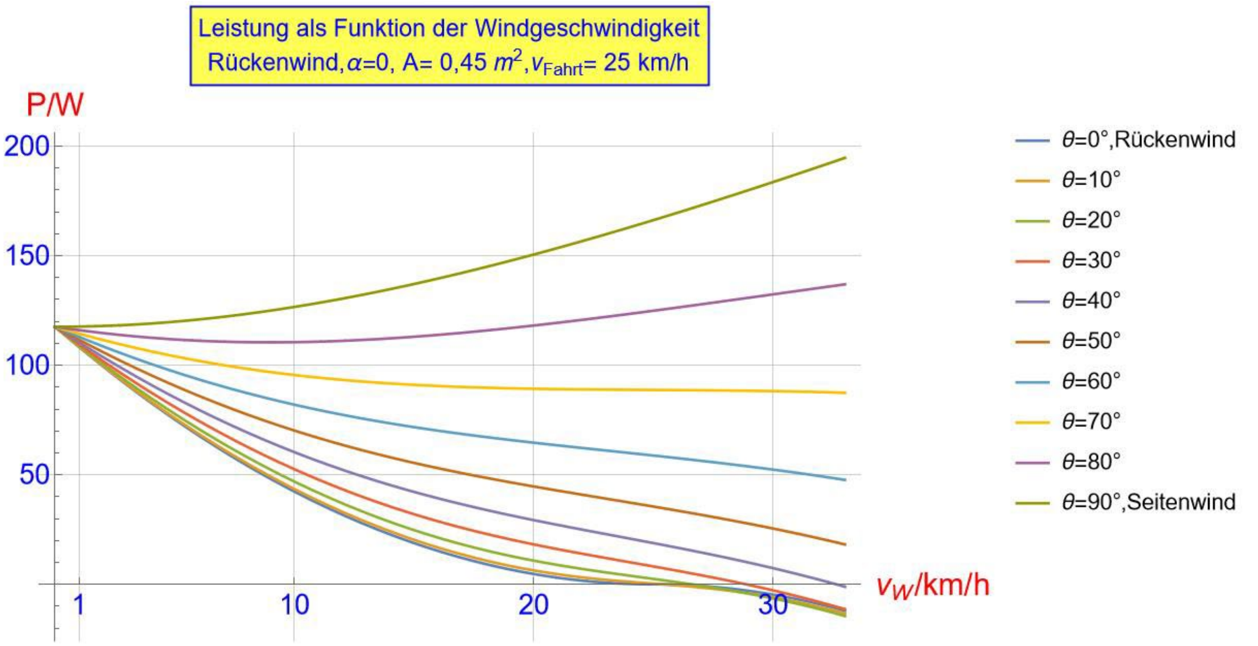
$$v_{rel} = \sqrt{v_{Fahrt}^{\ 2} + v_{Wind}^{\ 2} - 2\cdot v_{Fahrt}\cdot v_{Wind}\cdot\cos(\theta)}\ \text{weiterhin gilt}$$

$$\vec{v}_{Fahrt}.\vec{v}_{rel} = \vec{v}_{Fahrt}.(\vec{v}_{Fahrt} - \vec{v}_{Wind}) = v_{Fahrt}^{\ 2} - v_{Fahrt}\cdot v_{Wind}\cdot\cos(\theta)$$

Damit erhält man

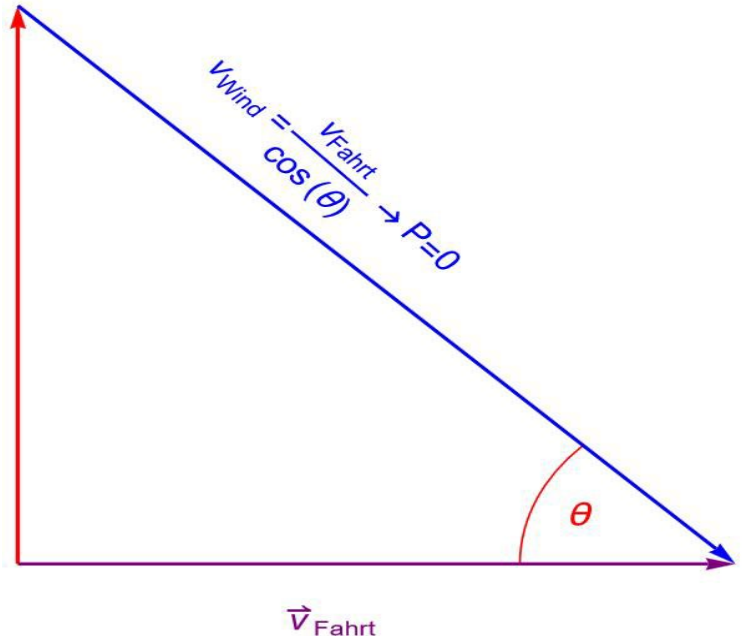
$$\boxed{\begin{aligned}&P(v) = m\cdot g\cdot\left[\mu\cdot\cos(\alpha)\underset{\text{abwärts}}{\overset{\text{aufwärts}}{\pm}}\sin(\alpha)\right]\cdot v_{Fahrt} + \frac{2}{3}\cdot\\ &\cdot c_W\cdot\rho_L\cdot A\cdot\sqrt{v_{Fahrt}^{\ 2} + v_{Wind}^{\ 2} - 2\cdot v_{Fahrt}\cdot v_{Wind}\cdot\cos(\theta)}\cdot\left(v_{Fahrt} - v_{Wind}\cdot\cos(\theta)\right)\cdot v_{Fahrt}\end{aligned}}$$


Leistung als Funktion der Windgeschwindigkeit
Gegenwind, α=0, A= 0,45 m^2, v_{Fahrt}= 25 km/h
P/W
600
500
400
300
200
1
10
20
30
v_W/km/h
θ=90°,Seitenwind
θ=100°
θ=110°
θ=120°
θ=130°
θ=140°
θ=150°
θ=160°
θ=170°
θ=180°,Gegenwind


Leistung als Funktion der Windgeschwindigkeit
Rückenwind, α=0, A= 0,45 m^2, v_{Fahrt}= 25 km/h
P/W
200
150
100
50
1
10
20
30
v_W/km/h
θ=0°,Rückenwind
θ=10°
θ=20°
θ=30°
θ=40°
θ=50°
θ=60°
θ=70°
θ=80°
θ=90°,Seitenwind

Nullstellen für die Leistung P ergeben sich, wenn die Projektion der Windgeschwindigkeit in Fahrtrichtung gleich wird der Fahrtgeschwindigkeit.

$$v_W = \frac{v_{Fahrt}}{\cos(\theta)}$$



Dann ersetzt die
Windkraft die Pedalkraft zur Überwindung der Reibungsverluste, dh. das Fahrrad fährt von selbst und beschleunigt für

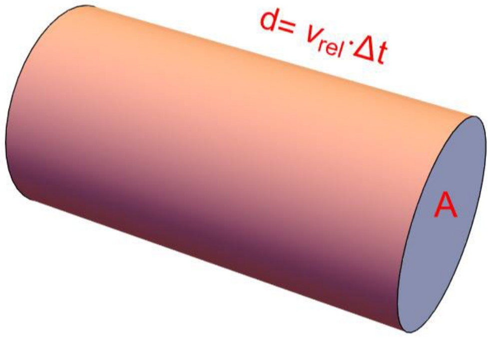
$v_W > \frac{v_{Fahrt}}{\cos(\theta)}$, P wird negativ.

Gemessen an der notwendigen Leistung bei Windstille von ~ 117 W (A= 0,45 m^2, v_{Fahrt}= 25 km/h) macht sich der Einfluss von Wind ab $v_{Wind} > 10$ km/h immer stärker bemerkbar. Die Querschnittsfläche A ist streng genommen die Fläche in Richtung der Relativgeschwindigkeit.

Zur Ableitung der Formel für den Luftwiderstand nach Seite 2 siehe :

„Physik des Alltags am Beispiel der Energetik des Fahrrads“, H.J. Schlichting, U. Backhaus, technic-didact 8/I,27 (1983)

Es wird dabei von einer Luftsäule der Länge $v_{rel} \cdot \Delta t$ und Querschnitt A ausgegangen, deren Masse mit einem unelastischen Stoß durch den Fahrer auf Fahrgeschwindigkeit gebracht wird.

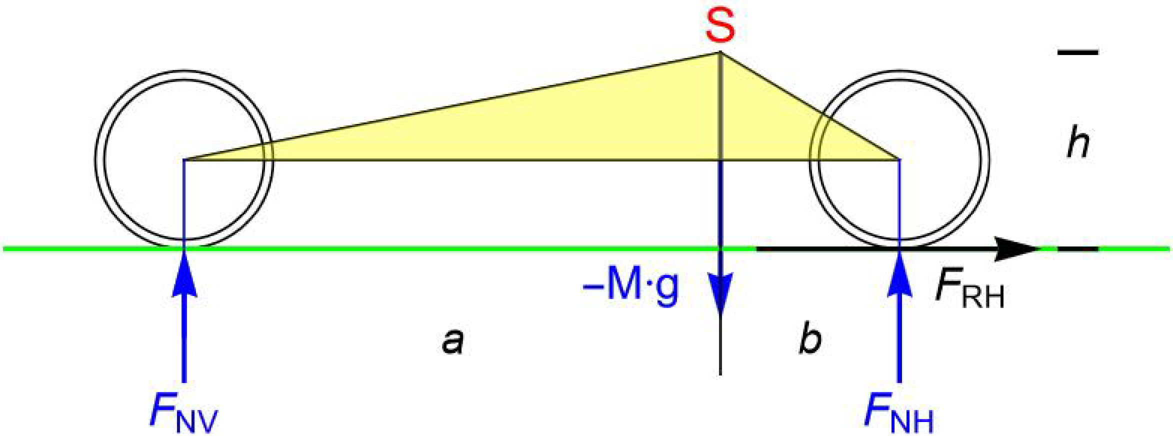


Liegeräder:

Liegeräder sind auf langen ebenen Strecken ohne Autoverkehr und Steigungen unübertroffen (Max Klingseisen). Aufgrund der Gegenkraft der Sitzlehne ist eine relativ optimale Kraftübertragung auf die Pedale möglich, gleichzeitig hat man eine geringere Angriffsfläche A, sodass die Luftreibungskraft klein ist. Die Mechanik und Dynamik der zweirädrigen Liegeräder gehorcht im wesentlichen den bisherigen Formeln. Wegen des Fahrerschwerpunktes relativ weit hinten, kann es bei Steigungen (Neigung α) zu Überschlägen nach hinten über den Berührungspunkt Hinterrad-Boden kommen, die Beschleunigungskraft nach Formel Seite 42 dazu

$$(M_1 + M_2) \cdot a_x = \frac{g \cdot (M_1 + M_2) \cdot (a \cdot M_2 + b \cdot M_1)}{M_1 \cdot h_1 + M_2 \cdot h_2} \cdot \cos(\alpha);$$

ist klein und hängt von den geometrischen Verhältnissen und den Massen von Fahrer und Rad ab. Das Fahren im Autoverkehr ist nicht zu empfehlen, durch die niedrige Lage unterhalb der Sitzhöhe der Autofahrer sind die Fahrer leicht zu übersehen.



Die Normalkräfte F_{NH} und F_{NV} ergeben sich aus der Kräftebilanz in y-Richtung und aus dem Drehimpulssatz bezüglich Schwerpunkt S ohne Beschleunigung und Reibung zu

$$F_{NH} + F_{NV} - M \cdot g = 0$$
$$\Theta_S \cdot \ddot{\varphi}_S = 0 \rightarrow F_{NV} \cdot a - F_{NH} \cdot b = 0$$
$$\Rightarrow F_{NV} = \frac{M \cdot g \cdot b}{a + b}; F_{NH} = \frac{M \cdot g \cdot a}{a + b}$$

Der Index H bezieht sich auf Hinterrad, V auf Vorderrad. Mit negativer Beschleunigung ► Bremsen des Hinterrades ► $F_{RH} = \mu \cdot F_{NH}$

$$\Theta_S \cdot \ddot{\varphi}_S = 0 \rightarrow -\mu \cdot h \cdot F_{NH} + F_{NV} \cdot a - F_{NH} \cdot b = 0$$

$$F_{NH} + F_{NV} - M \cdot g = 0; \ddot{x} = \frac{-\mu \cdot F_{NH}}{M}$$

$$\Rightarrow F_{NV} = \frac{M \cdot g \cdot (b + h \cdot \mu)}{a + b + \mu \cdot h}; F_{NH} = \frac{M \cdot g \cdot a}{a + b + \mu \cdot h}$$

M ist die Masse von Rad und Fahrer, μ der Reibungskoeffizient

Beispiel: $\mu = 0{,}8$ kein Gleiten, M=100 kg, h=0,6 m, a=1,50 m, b=0,2 m, g=9,81 m/s^2

1.Fall (ohne Bremsen) ► F_{NV}~115 N, F_{NH}~865 N

2.Fall (mit Bremsen) ► F_{NV}~306 N, F_{NH}~675 N,

$$\ddot{x}_S \approx -5{,}4 \frac{m}{s^2}$$

Es soll die Bremszeit und der Bremsweg bis zum Stillstand berechnet werden bei einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 von

25 km/h = (125/18) m/s. Die Gleichungen dafür lauten:

$$\ddot{x}_S = a_S = -5{,}4 \cdot \frac{m}{s^2}$$

$$v(t) = \int_0^t a_s dt' = v_0 + a_s \cdot t = \frac{125}{18} \cdot \frac{m}{s} - 5{,}4 \cdot \frac{m}{s^2} \cdot t$$

$$x(t) = \int_0^t v(t') dt' + x_0 = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{a_s}{2} \cdot t^2 =$$

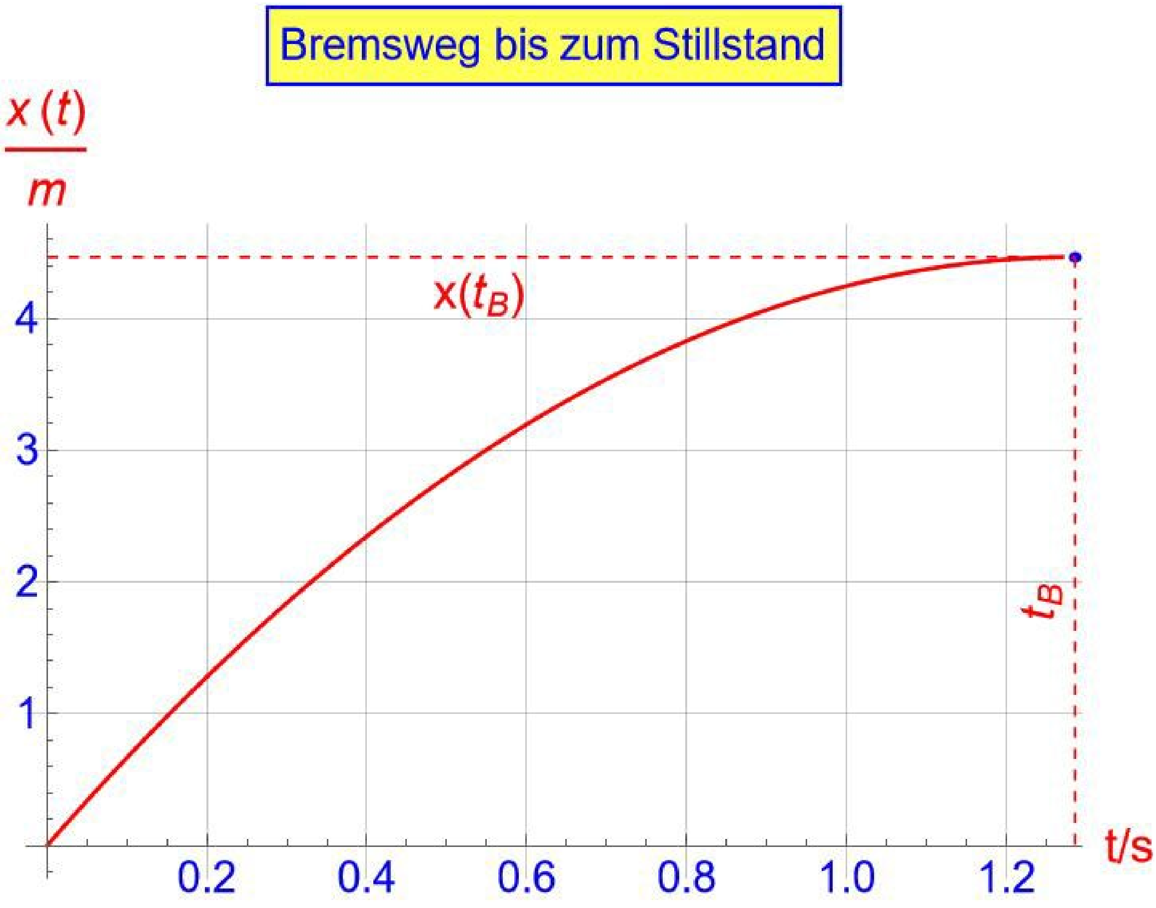
$$= 0 + \frac{125}{18} \frac{m}{s} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 5{,}4 \frac{m}{s^2} \cdot t^2$$

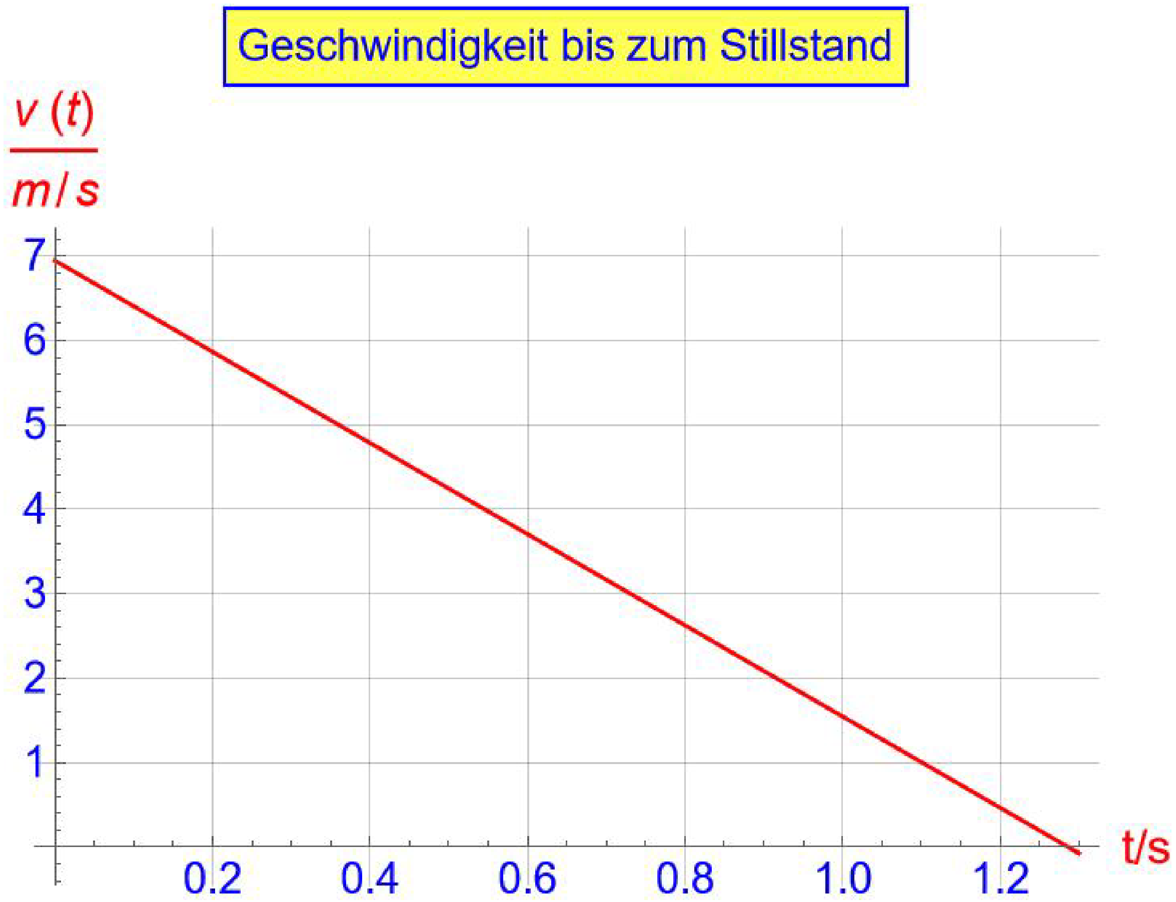
Bremsdauer t_B ► $v(t_B) = 0$ ► $t_B = 1{,}286$ s

Bremsweg $x_B = x(t_B)$ ► t_B in $x(t)$ eingesetzt ergibt $x_B = x(t_B) = 4{,}465$ m

Auf dasselbe Ergebnis kommt man mit dem Energiesatz:

$$\mu \cdot F_{NH} \cdot x_B = \frac{1}{2} \cdot M \cdot v_0^{\,2}$$

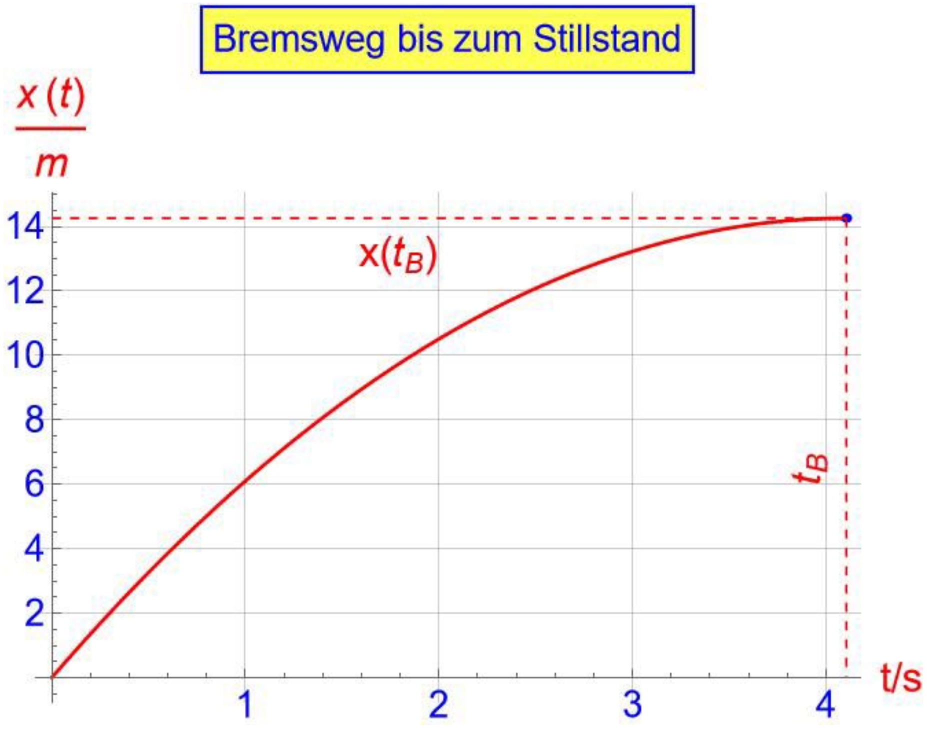




Lastenräder:

Wenn sich die Last vorne befindet, rückt der Schwerpunkt im Bild mit dem Liegerad (v zeigt nach links) nach links a < b und nach unten. Die Masse ergibt sich aus der Last (angenommen 50 kg), aus dem Rad (angenommen 40 kg), aus dem Fahrer (80 kg) und eventuell aus Motor und Akku (10 kg) zu ca. 180 kg. Wird dasselbe Beispiel wie beim Liegerad mit M= 180 kg, h= 0,4 m, a= 0,5 m, b= 1,5 m und sonst gleichen Werten durchgerechnet, erhält man wesentlich längere Bremszeiten und Bremswege, sodass dies im Straßenverkehr eine gewisse Gefahr bedeutet. Mit

$\ddot{x}_S \approx -1,7\,\frac{m}{s^2}$ aus den Gleichungen und $v_0 = 25\,\frac{km}{h}$ ergibt sich

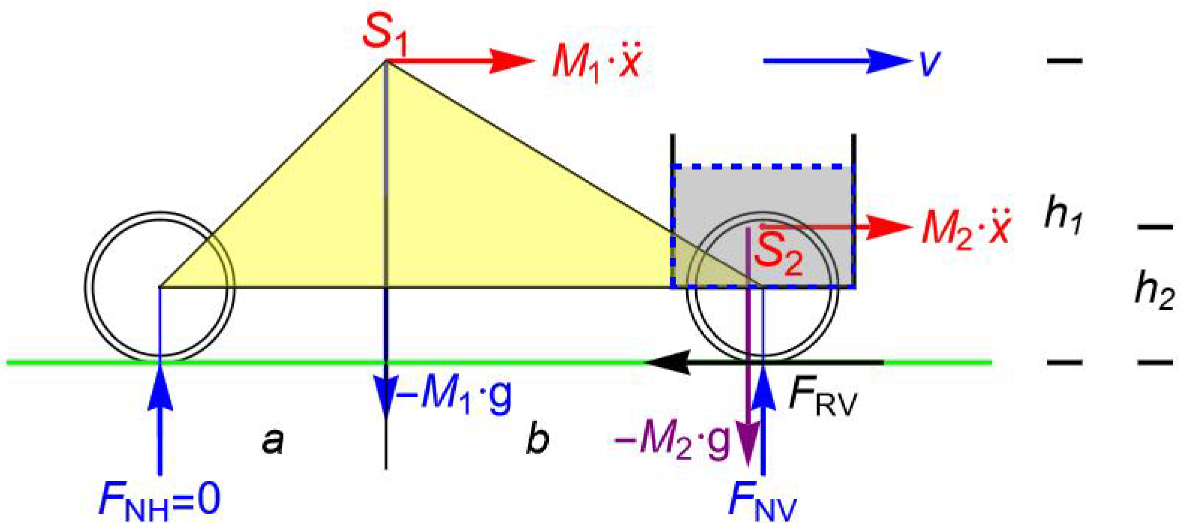


F_{NV}~1385 N, F_{NH}~381 N ► die Belastung des Vorderrades ist sehr hoch ! , die Verteilung auf zwei Räder ist sinnvoll.

Überschlag über den Lenker:

Da der Schwerpunkt beim Lastenrad relativ weit vorne in Fahrtrichtung liegt, kann eine Vollbremsung mit dem Vorderrad zum Überschlag über den Berührungspunkt Vorderrad – Boden führen. Die dynamischen Gleichgewichtsbedingungen dazu mit der Normalkraft hinten F_{NH}= 0 ergeben sich nach der Abbildung

(Bewegung nach rechts) zu:



$$M_1 \cdot \ddot{x} + M_2 \cdot \ddot{x} - F_{RV} = 0;$$
$$F_{NV} - M_1 \cdot g - M_2 \cdot g = 0;$$
$$M_1 \cdot g \cdot b - M_1 \cdot \ddot{x} \cdot h_1 - M_2 \cdot \ddot{x} \cdot h_2 = 0$$

(Drehmomente im Uhrzeigersinn sind negativ, x-Richtung nach rechts, y-Richtung nach oben)

Ergebnis:

$$\ddot{x} = \frac{M_1 \cdot g \cdot b}{M_1 \cdot h_1 + M_2 \cdot h_2};\ F_{NV} = (M_1 + M_2) \cdot g\ ;$$

$$F_{RV} = \frac{(M_1 + M_2) \cdot g \cdot b}{h_1 + \frac{h_2 \cdot M_2}{M_1}}$$

Mit M_2= 50 kg, M_1= 130 kg, h_1= 1 m, h_2= 0,6 m, b= 0,6 m ist $\ddot{x}$ ~4,8 m/s², F_{NV}~1766 N (Verteilung auf zwei Räder !), F_{RV}~ 861 N; Siehe Aufgabe 11 !

Aus der Beschleunigung kann wie beim Kapitel Liegerad aus einer gegebenen Geschwindigkeit Bremsweg und Bremszeit berechnet werden oder vereinfacht :

$$s(t) = \frac{1}{2} \cdot \ddot{x} \cdot t^2, v(t) = \ddot{x} \cdot t\ (v_{t=0} = 0, s_{t=0} = 0) \rightarrow \ddot{x} = \frac{v^2}{2 \cdot s}$$

<u>*Sicherheit:*</u>

Aus welcher Höhe muss man fallen, um dieselbe Crashenergie (pro Fahrer) zu erfahren, wie bei einem Zusammenstoß mit einem gleichschweren Fahrer bei einer Geschwindigkeit von 25 km/h ?

$$M \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2 \Rightarrow h = \frac{v^2}{2 \cdot g} = 2{,}46\ \text{m}$$

Dieselbe Crashenergie $\left(\frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2\right)$ erfährt man, wenn man mit derselben Geschwindigkeit gegen eine Betonwand fährt.

Gefühlsmäßig meint man, ein Fahrer 1, der gegen die Betonwand fährt, müsste doppelt so schnell fahren (mit der

Geschwindigkeit 2·v), um derselben Crashenergie ausgesetzt zu sein, wie jeweils ein Fahrer 2 und 3 beim frontalen Aufeinanderprallen mit je v als Geschwindigkeit.

Dann hätte Fahrer 1 die Energie

$$E_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (2 \cdot v)^2 = 2 \cdot m \cdot v^2 \,;$$

$$\textbf{Fahrer 2 und 3} \rightarrow E_2 + E_3 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = m \cdot v^2$$

dh. Fahrer 1 hätte die doppelte kinetische Energie, wie die Fahrer 2 und 3 zusammen, müsste also die 4-fache Crashenergie wie jeweils Fahrer 2 oder 3 ertragen !!

Weiterführende Literatur :

1) Carsten Bielmeier, Universität Würzburg, Hausarbeit Staatsprüfung, "Fahrradphysik".

2) Russell C. Hibbeler, "Technische Mechanik 2, 3", Pearson Studium.

3) Friedhelm Kuypers, „Klassische Mechanik", Wiley-VCH.

4) Hans, J.Paus, „Physik in Experimenten und Beispielen", Hanser

5) H.J. Schlichting, U. Backhaus, „Physik des Alltags am Beispiel der Energetik des Fahrrads", technic-didact 8/I,27 (1983)

1.) *Stellen Sie die Gleichungen für Kräfte und Drehmomente für abhebendes Vorderrad auf mit m als Gesamtmasse, a dem Abstand des Schwerpunktes zum Hinterrad und h der Höhe des Schwerpunktes.*
Bestimmen Sie die dazu notwendige Beschleunigung $\ddot{x}$ *, die Normalkraft* F_{NH} *auf das Hinterrad und die Haftreibungskraft* F_{RH}.
Zeigen Sie, dass die Beschleunigung einfacher aus der Gleichung S.43 unten für die Belastung der Räder bei Beschleunigung mit $F_{NV} = 0$ *zu berechnen ist.*
(m =105 kg, a =0,8 m, h = 1,50 m)

Lösung:

$$F_{RH} - m \cdot \ddot{x} = 0; F_{NH} - m \cdot g = 0;$$

$$-F_{NH} \cdot a + m \cdot \ddot{x} \cdot h = 0$$

$$\ddot{x} = \frac{a \cdot g}{h}; F_{NH} = m \cdot g; F_{RH} = \frac{a}{h} \cdot m \cdot g$$

$$S.43: F_{NV} = 0 \rightarrow \ddot{x} = \frac{a \cdot g}{h};$$

$$\ddot{x} \approx 5,23 \frac{m}{s^2}; F_{NH} \approx 1030\,N; F_{RH} \approx 549,36\,N$$

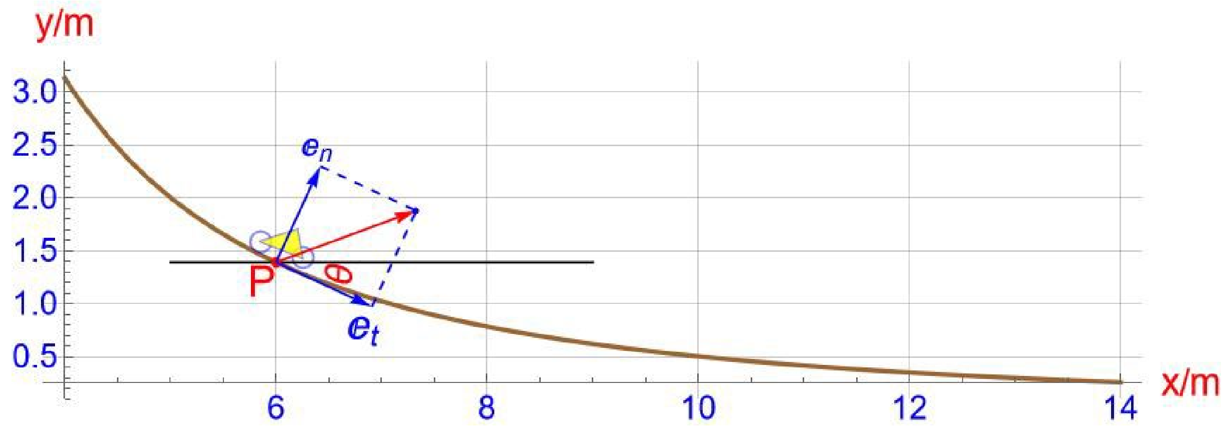
2.) *Wie groß ist die Belastung von Vorder- und Hinterrad ohne Beschleunigung und Abbremsung mit b=1 m als Abstand Schwerpunkt - Vorderradachse, der Gesamtmasse m und a wie bei Aufgabe 1 ?*

Lösung:
Im Kapitel „Belastung der Räder bei Beschleunigung" S.43 wird

$$\ddot{x} = 0 \text{ gesetzt} \rightarrow F_{NH} = m \cdot g \cdot \frac{b}{a+b}; F_{NV} = m \cdot g \cdot \frac{a}{a+b};$$

$$F_{NH} \approx 572{,}25\,N; F_{NV} \approx 457{,}8\,N;$$

3.) *Ein Radfahrer fährt auf einer Bahnkurve $y(x) = 50/x^2$, wobei er im Punkt P die Geschwindigkeit $v_P = 25\ km/h$ und die Beschleunigung* $\dot{v}_P = 3\,\frac{m}{s^2}$ hat.



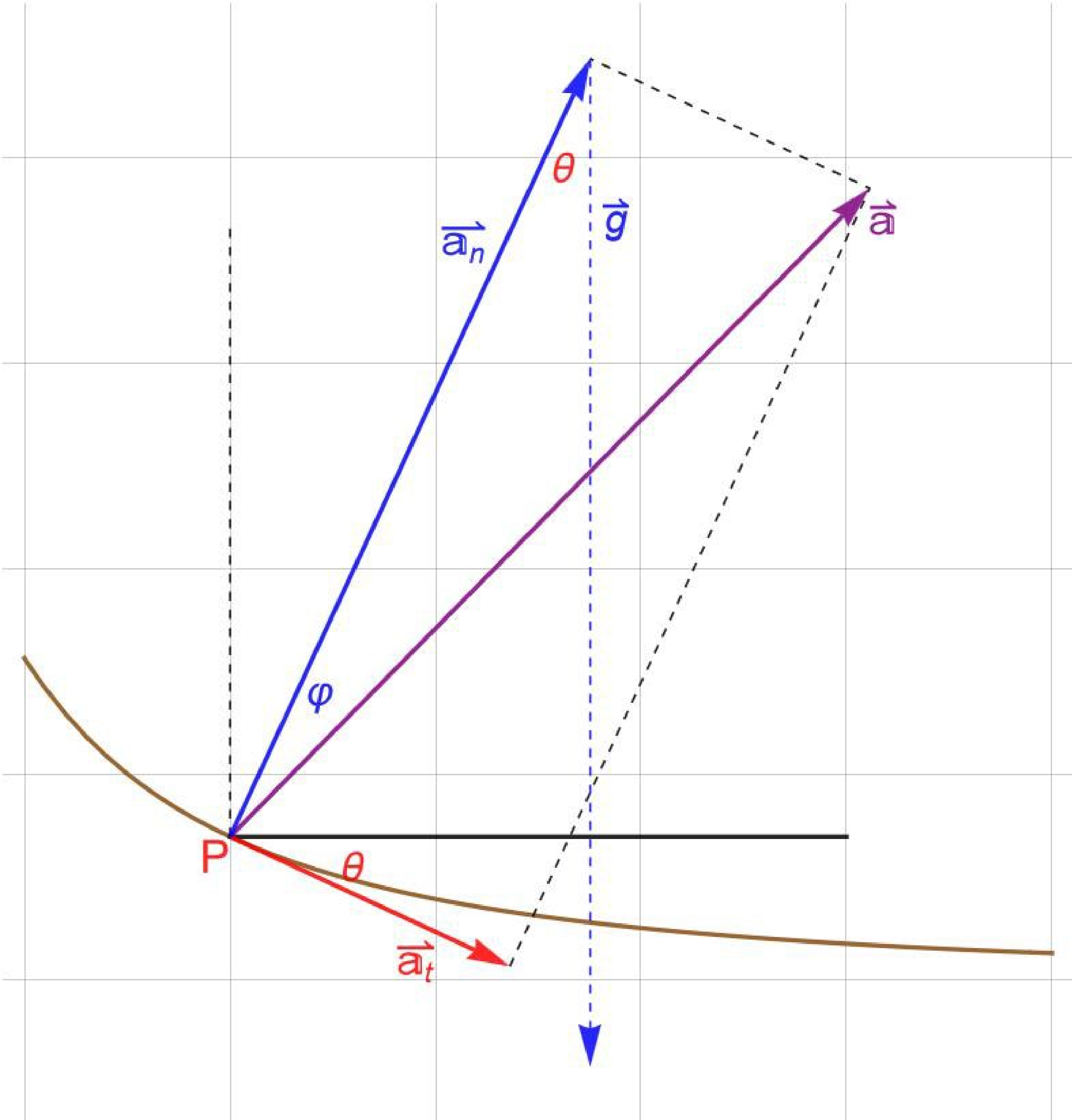
Bestimmen Sie die Beschleunigung in Richtung der Normalen der Bahn, die resultierende Beschleunigung und die Normalkraft der Räder auf die Bahn (Gesamtmasse M= 100 kg)

Lösung:

$$\frac{dy(x)}{dx} = -\frac{100}{x^3}; \frac{d^2y(x)}{dx^2} = \frac{300}{x^4}; \theta = \arctan\left(\frac{dy(x)}{dx}\right)\Bigg|_P \approx 25°$$

$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{e}_n$ mit ρ = Krümmungsradius und $\vec{e}_n$ dem Einheitsvektor in Richtung der Normalen.

$$\rho(x) = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|} \approx 0,003 \cdot \left(1+\frac{10000}{x^6}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot x^4 \rightarrow \rho(x=6) \approx 5,78\,\mathrm{m}$$



$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\left(\frac{125}{18} \cdot \frac{m}{s}\right)^2}{5{,}78 \cdot m} \approx 8{,}34 \frac{m}{s^2}; a_t = 3 \frac{m}{s^2};$$

$$a = \left.\sqrt{\dot{v}^2 + \left(\frac{v^2}{\rho(x)}\right)^2}\right|_{x=6m} \approx 8{,}86 \frac{m}{s^2}; \varphi = \arctan \frac{a_t}{a_n} \approx 20°$$

$$\vec{a} = a_t \cdot \vec{e}_t + a_n \cdot \vec{e}_n \approx \begin{pmatrix} 2{,}722 \\ -1{,}26 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3{,}50 \\ 7{,}57 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 6{,}2 \\ 6{,}3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_t \approx \begin{pmatrix} 0{,}907 \\ -0{,}42 \end{pmatrix}; \vec{e}_n \approx \begin{pmatrix} 0{,}42 \\ 0{,}91 \end{pmatrix};$$

$$F_N = M \cdot g \cdot \cos(\theta) + M \cdot \left.\frac{v^2}{\rho}\right|_P \approx 1724\,N$$

4.) Geben Sie in einer einfachen Formel die Neigung a° an, bei der durch die Gewichtskraft auf das Pedal die maximale Kraft vom Hinterrad gerade den Hangabtrieb kompensiert, dazu ein Beispiel.

Lösung:

Nach S. 10 gilt:

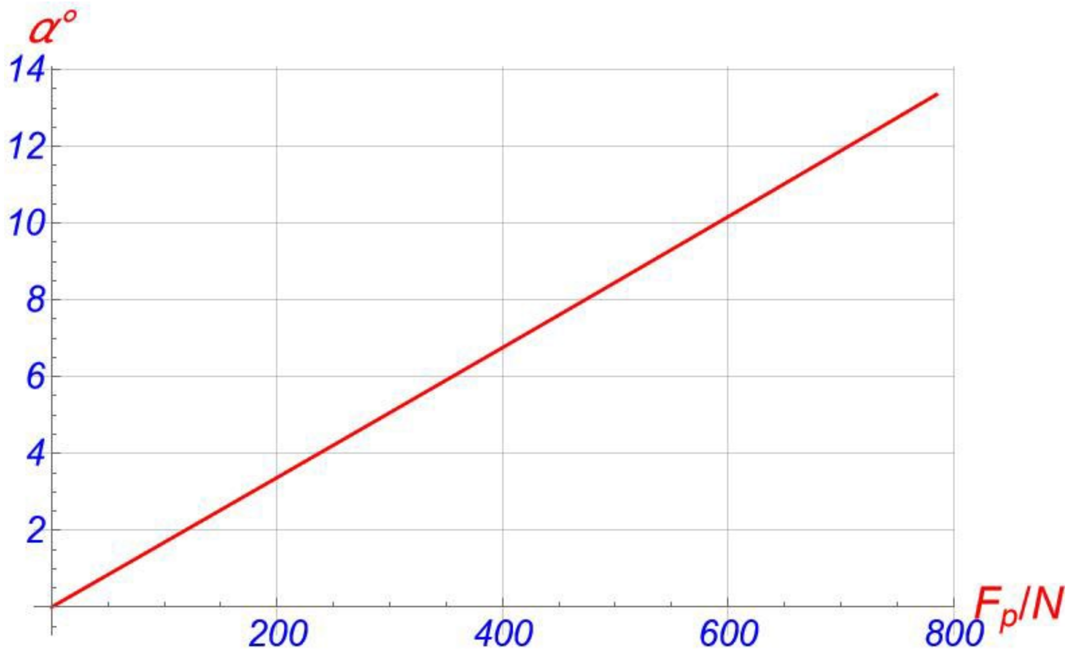
$$F_{Hinterradmax} = F_P \cdot \frac{R_{Kurbel}}{R_{Hinterrad}} \cdot \frac{r_{Zahnradhinten}}{r_{Zahnradvorne}} \rightarrow$$

$$m \cdot g \cdot \sin \alpha = F_P \cdot \frac{R_{Kurbel}}{R_{Hinterrad}} \cdot \frac{r_{Zahnradhinten}}{r_{Zahnradvorne}}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{F_P}{m \cdot g} \cdot \frac{R_{Kurbel}}{R_{Hinterrad}} \cdot \frac{r_{Zahnradhinten}}{r_{Zahnradvorne}}\right)$$

m=80 kg, $r_{Zahnradvorne}$*=0,1 m*, $r_{Zahnradhinten}$*=0,05 m*,

$R_{Hinterrad}$*= 0,7366/2 m*, R_{Kurbel}*= 0,17 m*



$$\alpha = \arcsin\left(\frac{m \cdot g}{m \cdot g} \cdot \frac{R_{Kurbel}}{R_{Hinterrad}} \cdot \frac{r_{Zahnradhinten}}{r_{Zahnradvorne}}\right) \rightarrow$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{R_{Kurbel}}{R_{Hinterrad}} \cdot \frac{r_{Zahnradhinten}}{r_{Zahnradvorne}}\right)$$

= 13,34 ° mit den obigen Daten.

5.) *Welche maximale Strecke kann ein E-Bike theoretisch mit einem Speicher der Kapazität 20 Ah und einer Spannung von 36 V auf einer Straße der Steigung 2% zurücklegen ohne dass Energie über die Pedale zugeführt wird ? Von der Energie des Akku´s wird ein Verlust von 25% abgezogen, die Geschwindigkeit des Pedelecs soll 12,5 km/h sein. (M=100 kg, v=12,5 km/h,* c_W*=0,9,* $\rho_{Luft} = 1{,}3\frac{kg}{m^3}, \mu = 0{,}1$)

Lösung:Verwendet wird die Formel S.4 für E_F *und gleichgesetzt der Akku-Energie, daraus erhält man die Strecke* Δs*.*

Winkel a der Straße:

Steigung 2% bedeutet, dass auf 100 m ein Höhenzuwachs von 2 m vorhanden ist, dh.

$$\alpha = \arctan\left(\frac{2\text{ m}}{100\text{ m}}\right) \approx 1{,}15°$$

Energie des Akku´s:

$$20\text{ Ah} \overbrace{=}^{\cdot 3600\text{ s}} 72000\text{ As};$$

$$E_{Akku} = 72000\text{ As}\cdot 36\text{ V} \overbrace{=}^{VAs=Ws=Nm=kg\cdot\left(\frac{m}{s}\right)^2} 2592000\text{ kg}\frac{m^2}{s^2}$$

$$E_{Akku} - 0{,}25\cdot E_{Akku} = \boxed{1{,}944\cdot 10^6\cdot\frac{kgm^2}{s^2}}$$

$$E_F \overbrace{=}^{S.4} \left[Mg\cdot(\mu\cdot\cos(\alpha)+\sin(\alpha))+\frac{2}{3}\cdot A_{Mittel}\cdot c_W\cdot v^2\cdot\rho_{Luft}\right]\cdot\Delta s \approx$$

$$\approx \boxed{121{,}93\cdot\frac{kg\cdot m}{s^2}\cdot\Delta s}$$

$$1{,}944\cdot 10^6\,\frac{kgm^2}{s^2} = 121{,}93\cdot\frac{kgm}{s^2}\cdot\Delta s \rightarrow$$

$$\boxed{\Delta s \approx 16\text{ km}}$$

6.) *Ein leerer Rad-Schlauch wird relativ schnell aufgepumpt, sodass ein vernachlässigbarer Temperaturausgleich mit der Umgebung stattfindet (adiabatischer Vorgang). Bestimmen Sie die Temperaturzunahme der Luft im Schlauch mit einem Beispiel. (Spezifische Gaskonstante der Luft R_S = 287,058 J/(kg·K)*

Lösung:

Adiabatengleichung

$$p \cdot V^{\gamma} = \text{const.}; \text{ideale Gasgleichung}: p \cdot V = m \cdot R_s \cdot T \rightarrow$$

$$V = \frac{m \cdot R_s \cdot T}{p} \overset{V \text{ in } pV^{\gamma}=\text{const}}{\rightarrow} \frac{T^{\gamma}}{p^{\gamma-1}} = \text{const.} \rightarrow \frac{T_1^{\gamma}}{p_1^{\gamma-1}} = \frac{T_2^{\gamma}}{p_2^{\gamma-1}}$$

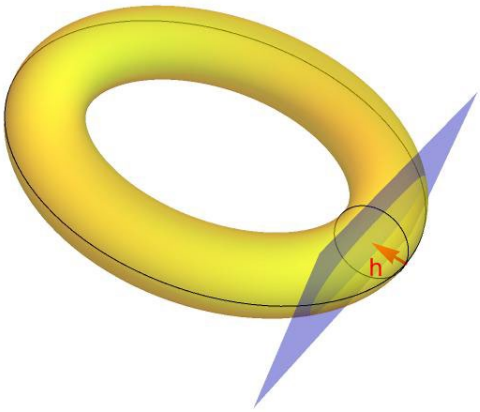
$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}};$$

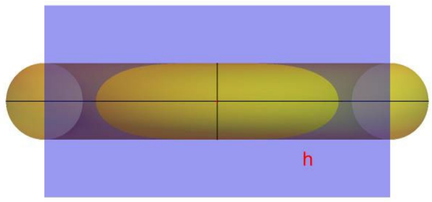
Beispiel: T_1=20°C+273 = 293 K; p_1 = 102800 Pa ;

p_2=202800 Pa, $\gamma = 1{,}4$ ► *T_2~355,8 K*► ***θ ~ 83 °C***

7.) *Schätzen Sie anhand der idealen Gasgleichung (vorherige Aufgabe) ab, ob das Gewicht des Fahrers einen signifikanten Einfluss auf den Reifendruck hat.*
Lösung:

Der Reifendruck erhöht sich, weil das Gewicht des Fahrers den Reifen um die Strecke h quetscht (Abb). Da m, R_S und T in der idealen Gasgleichung konstant sind, gilt p·V= const .



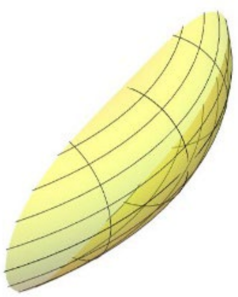


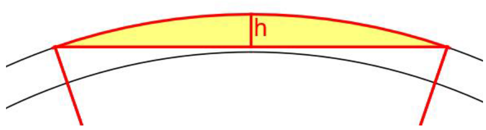
Für die Zunahme des Drucks erhält man

$$p(V)=\frac{\text{const.}}{V};\frac{dp(V)}{dV}=-\frac{\text{const.}}{V^2};\frac{dp}{p}=\frac{-\frac{\text{const.}}{V^2}\cdot dV}{\frac{\text{const.}}{V}}\rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dp}{p}+\frac{dV}{V}=0};\text{adiabatisch}\rightarrow\frac{dp}{p}+\frac{dV\cdot\gamma}{V}=0$$

Zur Abschätzung der Volumenabnahme muss das Volumen des um h gequetschten Teils berechnet werden.





Dazu wird die Fläche des Kreisabschnittes (gelbe Fläche) S bestimmt und mit dem Schlauchradius r_S multipliziert, das ergibt die ungefähre Größe der Volumenabnahme.
Nach Formelsammlung ist

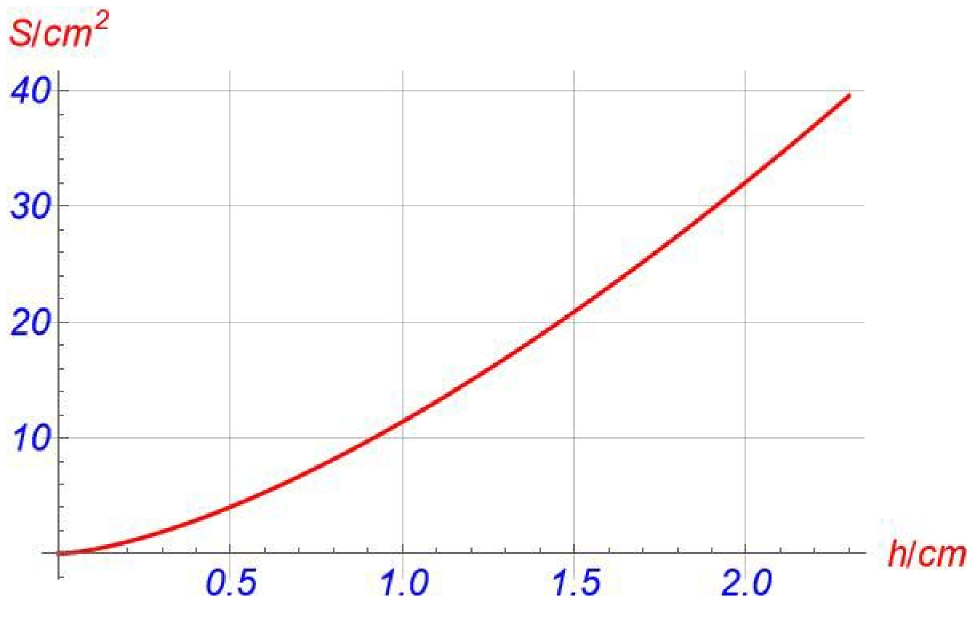
$$S=\sqrt{(2\cdot R-h)\cdot h}\cdot(h-R)+R^2\arcsin\left[\frac{(2\cdot R-h)\cdot h}{R}\right]$$

Mit R*=36,83 cm, h=2 cm, r_S=1,15 cm erhält man S~32 cm²*

und ΔV~37 cm³; mit

$$V_{Schlauch}=2\cdot\pi^2\cdot R\cdot r_S\approx 836\,cm^3\rightarrow\frac{\Delta V}{V}\approx-\frac{1}{23}$$ und damit

$\frac{\Delta p}{p}\approx\frac{1}{23}$ also eine vernachlässigbare Druckerhöhung.



8.) *Bei welcher minimalen Rücken-Windgeschwindigkeit der Richtung $\theta = 0°$ bez. $\theta = 40°$ kann ein Radfahrer mit 25 km/h sich ohne zu treten vom Wind treiben lassen ? (Neigung $a = 0°$, $A = 0{,}45$ m^2).*

Lösung: P= 0 ► bei $\theta = 0$ $v_{Wind} = 25$ km/h, bei $\theta = 40°$ nach

Formel bei $v_{Wind} \sim 33$ km/h.

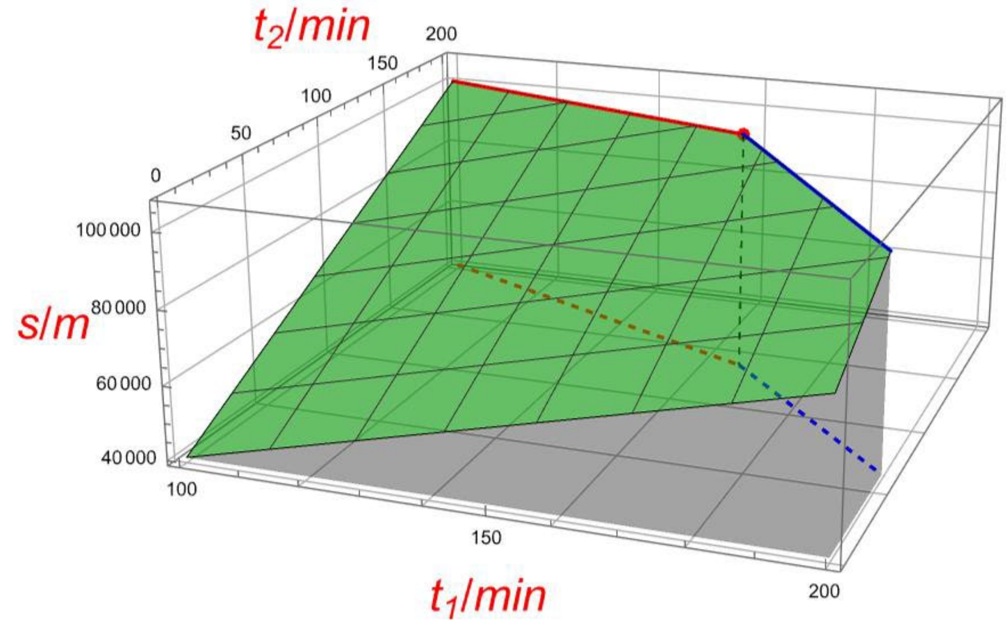
9.) *Extremalaufgabe (John Allen Paulos „Beyond Numeracy“):*

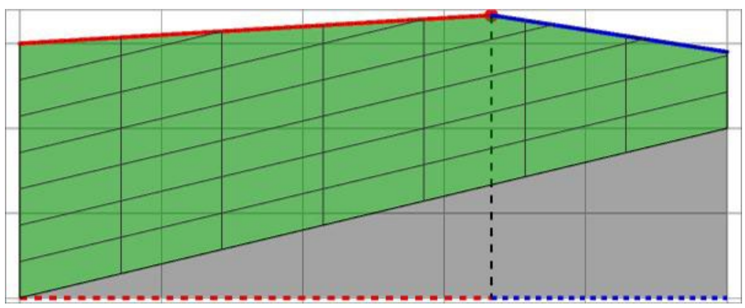
Ein Radfahrer trainiert jeden Tag maximal 5 h jeweils t_1 min mit der Geschwindigkeit v_1=24 km/h bei einer Trittfrequenz u_1= 110 U/min und t_2 min mit v_2= 18 km/h bei u_2= 50 U/min. Die Gesamtzahl der Kurbelumdrehungen soll aus gesundheitlichen Gründen maximal 25000 sein. Welche Zeiten t_1 und t_2 muss er wählen, um möglichst weit zu kommen.

$$v_1 / \frac{km}{h} = 24$$
$$v_2 / \frac{km}{h} = 18$$
$$u_1 / \frac{U}{min} = 110$$
$$u_2 / \frac{U}{min} = 50$$
$$\text{Gesamtzeit}/min \le 300$$
$$\text{Kurbelumdrehungen} \le 25000$$

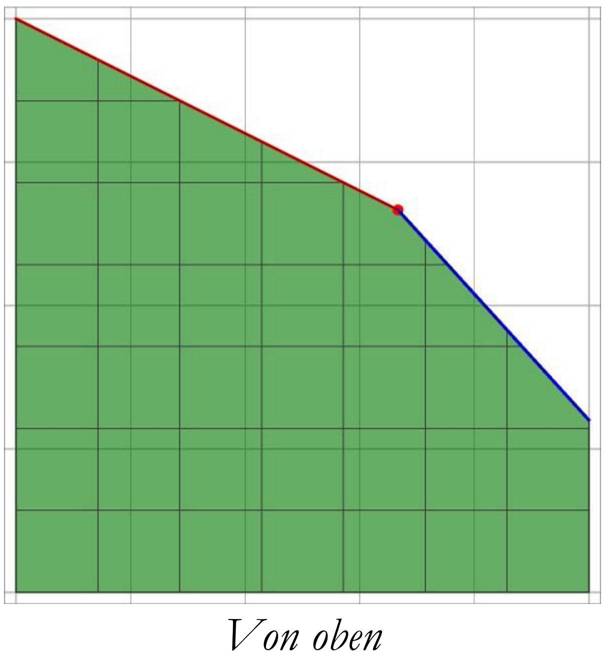
$$s(t_1, t_2) = 400 \cdot \frac{m}{min} \cdot t_1 + 300 \cdot \frac{m}{min} \cdot t_2 \rightarrow \text{maximal}$$

$$t_1 + t_2 \le 300 \text{ min}, \; t_1 \cdot 110 \frac{U}{min} + t_2 \cdot 50 \frac{U}{min} \le 25000$$





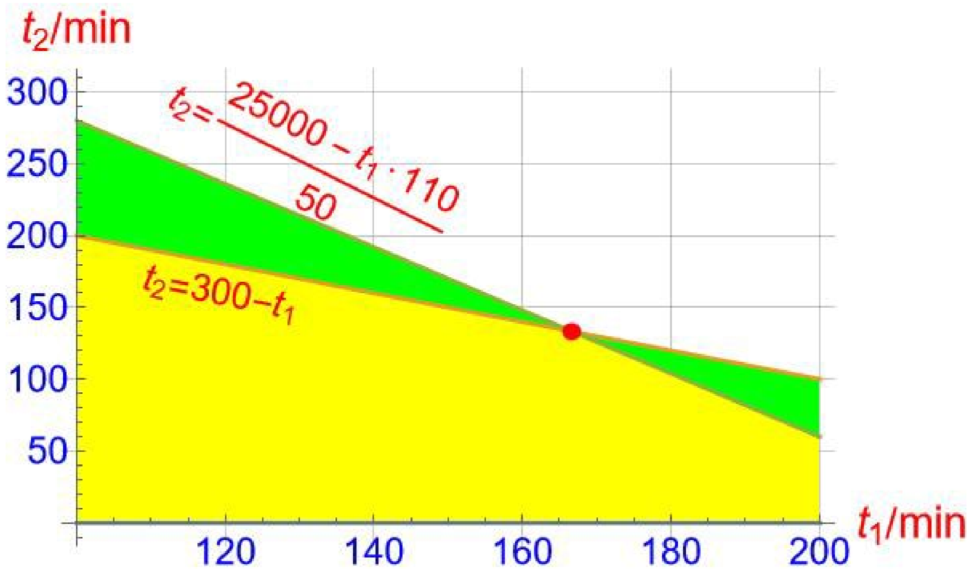
Von vorne



Von oben

Anhand der dreidimensionalen Auftragung von $s(t_1,t_2)$ erkennt man, dass es genügt, den Schnittpunkt der beiden Grenzlinien in der t_1- t_2- Ebene (rot und blau gestrichelt) zu bestimmen, um den maximalen Wert $s_{max}(t_1, t_2)$ zu bekommen.

$$t_2 = 300 - t_1 \text{ (rot in der Abb. oben) und } t_2 = \frac{25000 - t_1 \cdot 110}{50} \text{(blau)}$$



$$t_1 + t_2 = 300\,; t_1 \cdot 110 + t_2 \cdot 50 = 25000$$

Der gelbe Bereich erfüllt die beiden Ungleichungen.

►t_1~166,7 min, t_2~133 min, s_{max}~106667 m~107 km

10.) *Im einfachsten Fall sind bei einem Rad, sofern es überhaupt gefedert ist, eine Gabelfederung (1) und eine Reifenfederung (2) vorne und eine Sattelfederung (3) und eine Reifenfederung (4) hinten vorhanden. Wird eine Feder aufgrund einer Kraft F gestaucht, ist der*

Betrag der Stauchung Δs im linearen Bereich proportional zur Kraft F ► ***F= c·Δs** mit* ***c als Federkonstante, Steifigkeit, Federhärte.***

Durch ein Gewicht der Masse 50 kg werden die Federn 1 bis 4 bei einem Versuch um jeweils 50 mm, 3 mm, 40 mm und 4 mm gestaucht. Welche Stauchung erfährt das Rad insgesamt bei einer Belastung mit einer Masse von 100 kg ? Wie groß ist die Resonanzfrequenz f_0 ?

Lösung:

Mit F= 50 kg · 9,81 m/s² ~ 490 N ergeben sich folgende Federkonstanten c_1, c_2, c_3, c_4 ~10 N/mm, 164 N/mm, 12 N/mm, 123 N/mm.

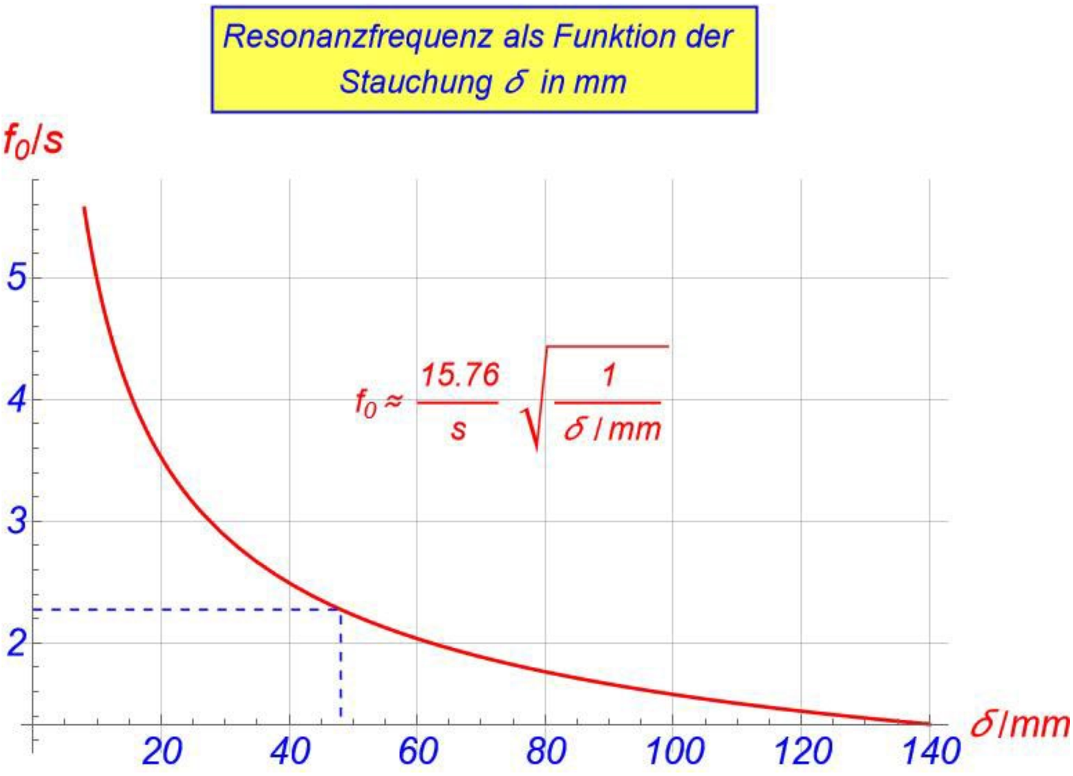
Die beiden Federn vorne und hinten sind in Reihe geschaltet, die ***Federhärte*** *wird geringer nach*

$$\frac{1}{c_{1-2}}=\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}\text{ ebenso }\frac{1}{c_{3-4}}=\frac{1}{c_3}+\frac{1}{c_4}\rightarrow c_{1-2}\approx 9{,}25\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}},c_{2-4}\approx 11\,\mathrm{N/mm}$$

Die Federn vorne und hinten sind parallel geschaltet, die Federhärte wird größer nach

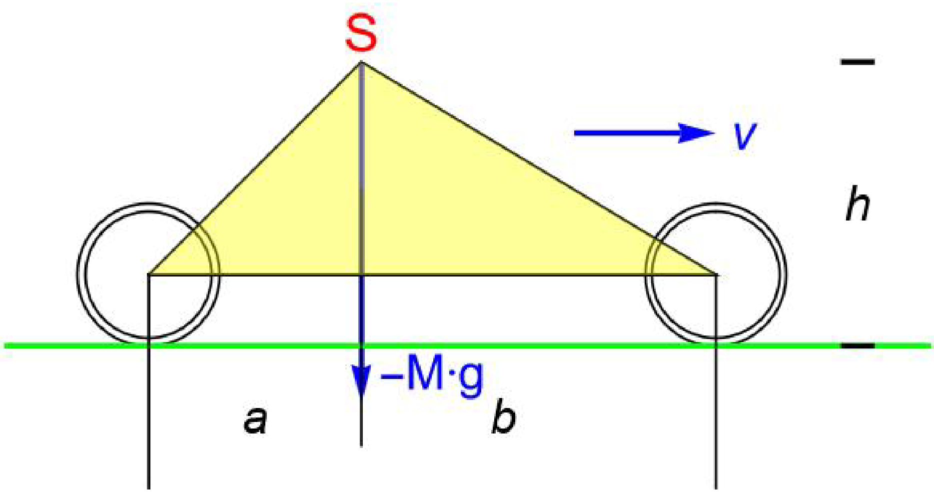
$$c_{\text{gesamt}}=c_{1-2}+c_{2-4}\approx 20\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}\rightarrow \Delta s=\frac{100\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{20\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}}\approx\boxed{48\,\mathrm{mm}}$$

$$f_0=\frac{1}{2\cdot\pi}\sqrt{\frac{c_{\text{gesamt}}}{M}}\approx\boxed{2{,}3\frac{1}{s}}$$

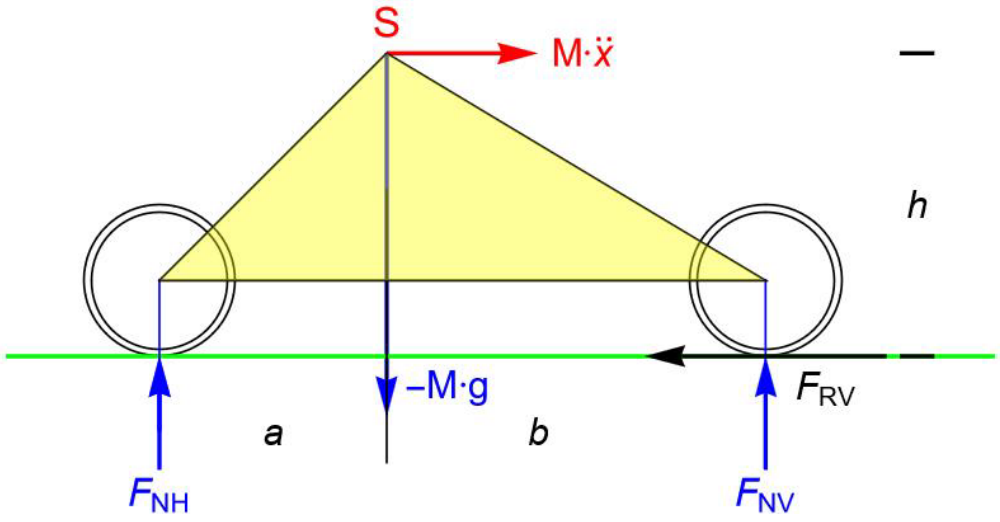


Die Formel in der Abbildung bedeutet: ein schwerer Fahrer bewirkt bei demselben Rad eine niedrigere Resonanzfrequenz wegen der größeren Stauchung, als ein leichter Fahrer.

11.) *Bei welcher Bremsbeschleunigung* $\ddot{x}$ *erfolgt bei Vollbremsung mit dem Vorderrad ein Überschlag über dem Lenker. Stellen Sie die Dynamischen Gleichgewichtsbedingungen auf. (h= 1,5 m, M= 100 kg, b= 0,8 m, Räder masselos)*



Lösung:



Die Summe der Kräfte in x und y -Richtung und die Momenten-gleichung bezüglich des Auflagepunktes des Vorderrades ergibt das folgende Gleichungssystem (rot ist nach d´Álembert die Trägheits-kraft, das Hinterrad ist bereits unbelastet F_{NH} =0)

$$M \cdot \ddot{x} - F_{RV} = 0\,;\, F_{NV} - M \cdot g = 0\,;\, M \cdot g \cdot b - M \cdot \ddot{x} \cdot h = 0$$

mit der Lösung F_{RV}= b· Mg/h und $\ddot{x}$=b·g/h oder

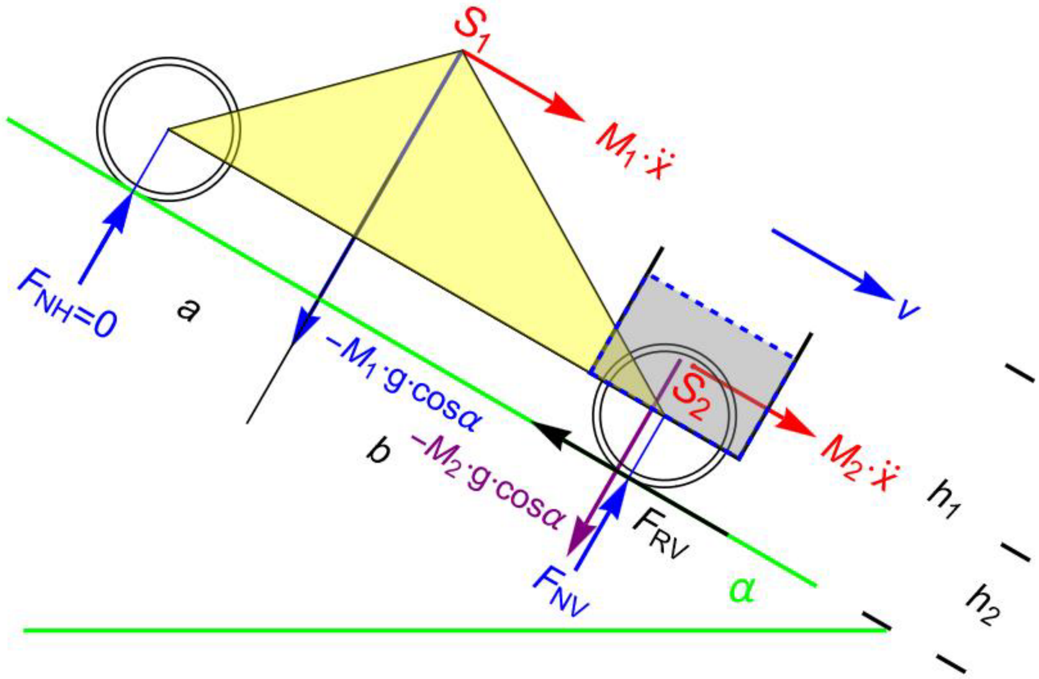
$\boxed{M \cdot \ddot{x} \cdot h \geq M \cdot g \cdot b}$ als Abflugbedingung .

Mit den Zahlenwerten ergibt sich $\ddot{x}$ ~5,2 m/s², F_{RV}~5,23 N Nach den Formeln S.93 (Liegerad) lassen sich Bremszeiten und Bremswege bei bekannten Geschwindigkeiten berechnen oder verein-facht

$$s(t) = \frac{1}{2} \cdot \ddot{x} \cdot t^2, v(t) = \ddot{x} \cdot t \left(v_{t=0} = 0, s_{t=0} = 0\right) \rightarrow \ddot{x} = \frac{v^2}{2 \cdot s}$$

12.) *Wie verändern sich die dynamischen Gleichgewichtsbedingungen beim Überschlag mit dem Lastenrad, wenn das Rad auf einer schiefen Ebene mit Neigung a abwärts fährt ? Berechnen Sie die Ergebnisse mit den Daten, wie dort und a=30°. Welcher Bremsweg ergibt sich bei v= 25 km/h ?*

Lösung:



$$M_1 \cdot \ddot{x} + M_2 \cdot \ddot{x} - F_{RV} = 0;$$
$$F_{NV} - M_1 \cdot g \cdot \cos\alpha - M_2 \cdot g \cdot \cos\alpha = 0;$$
$$M_1 \cdot g \cdot b \cdot \cos\alpha - M_1 \cdot \ddot{x} \cdot h_1 - M_2 \cdot \ddot{x} \cdot h_2 = 0$$

$$\ddot{x} = \frac{M_1 \cdot g \cdot b \cdot \cos\alpha}{M_1 \cdot h_1 + M_2 \cdot h_2}; \; F_{NV} = (M_1 + M_2) \cdot g \cdot \cos\alpha;$$
$$F_{RV} = \frac{(M_1 + M_2) \cdot g \cdot b \cdot \cos\alpha}{h_1 + \frac{h_2 \cdot M_2}{M_1}}$$

$$\ddot{x} \approx 4{,}14\,\frac{m}{s^2}\,;\,F_{RV} \approx 745\ N\,;\,F_{NV} \approx 1529\ N$$

$$\text{mit } \ddot{x} = \frac{v^2}{2 \cdot s_{Bremsweg}} \rightarrow s_{Bremsweg} \approx 5{,}8\ m$$

Je größer die Steigung, desto kleiner ist die Beschleunigung, die bereits zu einem Überschlag führt.

13.) *Mit welcher notwendigen Pedalkraft F_P muss man bei einem Gegenwind von v_{wind} = 10 km/h (θ =180°) mindestens rechnen ? (μ~0, a=0, v_{Fahrt}= 25 km/h, A=0,45 m², R_{Kurbel}=0,17 m, Trittfrequenz u = 1/s).*

Lösung:

Nach Formel S.88 ist P~230 W, das ist die Leistung, die mindestens am Pedal aufgebracht werden muss. Nach S. 20 ist

$$P = \bar{M}_K \cdot 2 \cdot \pi \cdot u = \frac{2 \cdot F_P \cdot R_{Kurbel}}{\pi} \cdot 2 \cdot \pi \cdot u \rightarrow F_P \approx 339\ N$$