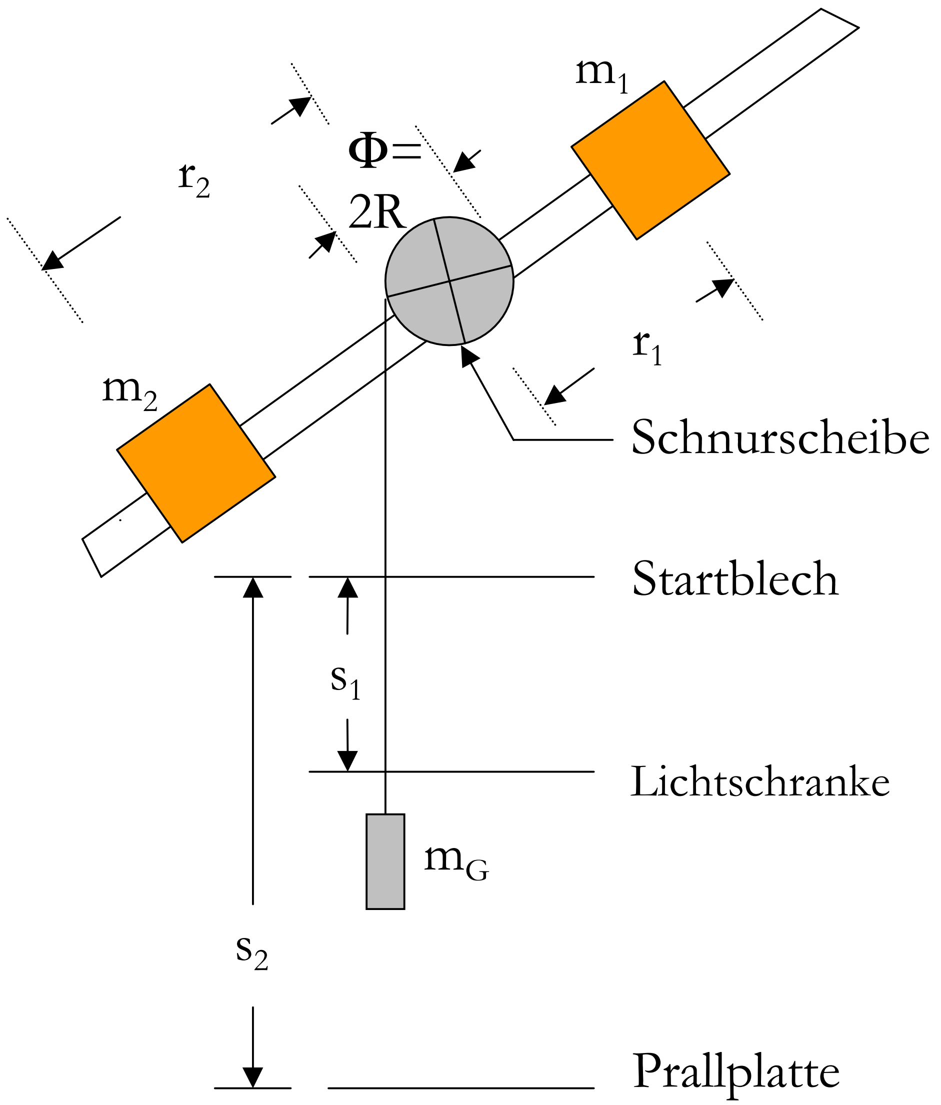
Protokoll zu Versuch 4 Physikpraktikum

Bestimmung des Massenträgheitsmomentes aus Rotations- und Pendelbewegung:

Namen:	
Datum:	
Kurs/Gruppe:	



Dr.Hingsammer;16.10.01

m_G =	±	*	Φ_1=	±	*
m_1 =	±	*	Φ_2=	±	*
m_2 =	±	*	Φ_3=	±	*
s_1 =	±	*	$R=\Phi/2$; $s_R/R = s_\Phi/\Phi$		
s_2 =	±	*	Φ=Durchmesser Scheibe		

* Es wird hier Unsicherheitsintervall/√3 eingesetzt, siehe Kapitel Unsicherheitsrechnung; diese Größe wird ***Standardunsicherheit*** $\boldsymbol{s_{...}}$ genannt. (Beispiel s_{mG} = 0,5 g/√3);
s_1 erhält man am besten folgendermaßen:
durch langsames Drehen der Stange wird der Schaltpunkt der Leuchtdiode bestimmt und danach mit der Schieblehre die Strecke (Unterkante Gewicht $m_G \rightarrow$ Startblech) = s_1 gemessen, die Standardunsicherheit ist zB. 0.5 mm/√3, da die Standardunsicherheit der Schieblehre von 0,1 mm/√3 nicht voll ausgenützt werden kann. s_2 wird mit dem vorhandenen Metallmaßstab bestimmt, Standardunsicherheit = kleinster Skalenteil/√3 oder andere Werte mit Begründung.

Das Ziel des Versuches ist es, das Trägheitsmoment des Systems (Stange mit Schnurscheiben und Massestücke) ohne Massestücke einmal aus Beschleunigungsmessungen des Systems mit Massen (1) und einmal aus Pendelschwingungen des Systems mit Massen (2) durch Extrapolation zu erhalten.

1 Bestimmung des Massenträgheitsmomentes des Systems Scheibe-Stange-Massen aus der Beschleunigungsmessung:

Für maximal drei Schnurscheiben mit Radius $R_{1,2,3} = \Phi_{1,2,3}/2$ sollen jeweils bei 5 verschiedenen Abständen $r_1 = r_2 = r_{1,2}$ der Massenstücke m_1 und m_2 zum Drehpunkt jeweils n =10 Messungen der Beschleunigung **a** dh. der für die Strecke ($s_2 - s_1$) benötigten Zeit δt gemacht werden.
Um sicherzustellen, daß die Massen gleiche Abstände zum Drehpunkt haben dh. $r_1 = r_2$ bei den jeweiligen Abständen ist, sollten Sie die Stange mit den Massen nach freier seitlicher Lagerung des Gewichtes m_G austarieren!! Der Abstand der Massestücke $d = r_1 + r_2$ wird durch Messung des Abstandes der linken oder rechten Kanten bestimmt. $r_1 = r_2 = r_{1,2} = d/2$; $s_{r1,2}/r_{1,2} = s_d/d$; s_d = Unsicherheitsintervall/√3.

$\mathbf{r}_{1,2}$ =	± $s_{r1,2}$	±	±	±	±
δt_1 =					
δt_2 =					
δt_3 =					
δt_4 =					
δt_5 =					
δt_6 =					
δt_7 =					
δt_8 =					
δt_9 =					
δt_{10} =					
	Arithmetischer Mittelwert				
$\overline{\delta t}$ =					
	Standardabweichung $s = \sqrt{\{(1/n-1)\cdot\sum(\delta t_i - \overline{\delta t})^2\}}$				
s =					
Standardabweichung des Mittelwertes $s/\sqrt{n}$ *= Standardunsicherheit der* δt*-Messung* $s_{\delta t}$					
$s/\sqrt{n}$ =					
Ergebnis $\delta t = \overline{\delta t} \pm s/\sqrt{n}$ **; n= 10**					

Die Beschleunigung a wird aus der Vorlaufstrecke s_1 und der Gesamtstrecke s_2 bestimmt: (siehe Gl.(10) der Anleitung)

$$s_1 = \frac{1}{2}\cdot t_1^2 \cdot a; s_2 = \frac{1}{2}\cdot t_2^2 \cdot a; t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{a}}; t_2 = \sqrt{\frac{2s_2}{a}}; \Rightarrow t_2 - t_1 = \delta t$$

$$\delta t = \sqrt{\frac{2s_2}{a}} - \sqrt{\frac{2s_1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\left\{\sqrt{2s_2} - \sqrt{2s_1}\right\}; a = \frac{1}{\delta t^2}\cdot\left(\sqrt{2s_2} - \sqrt{2s_1}\right)^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{\delta t^2}(2s_2 - 4\sqrt{s_2 s_1} + 2s_1);$$

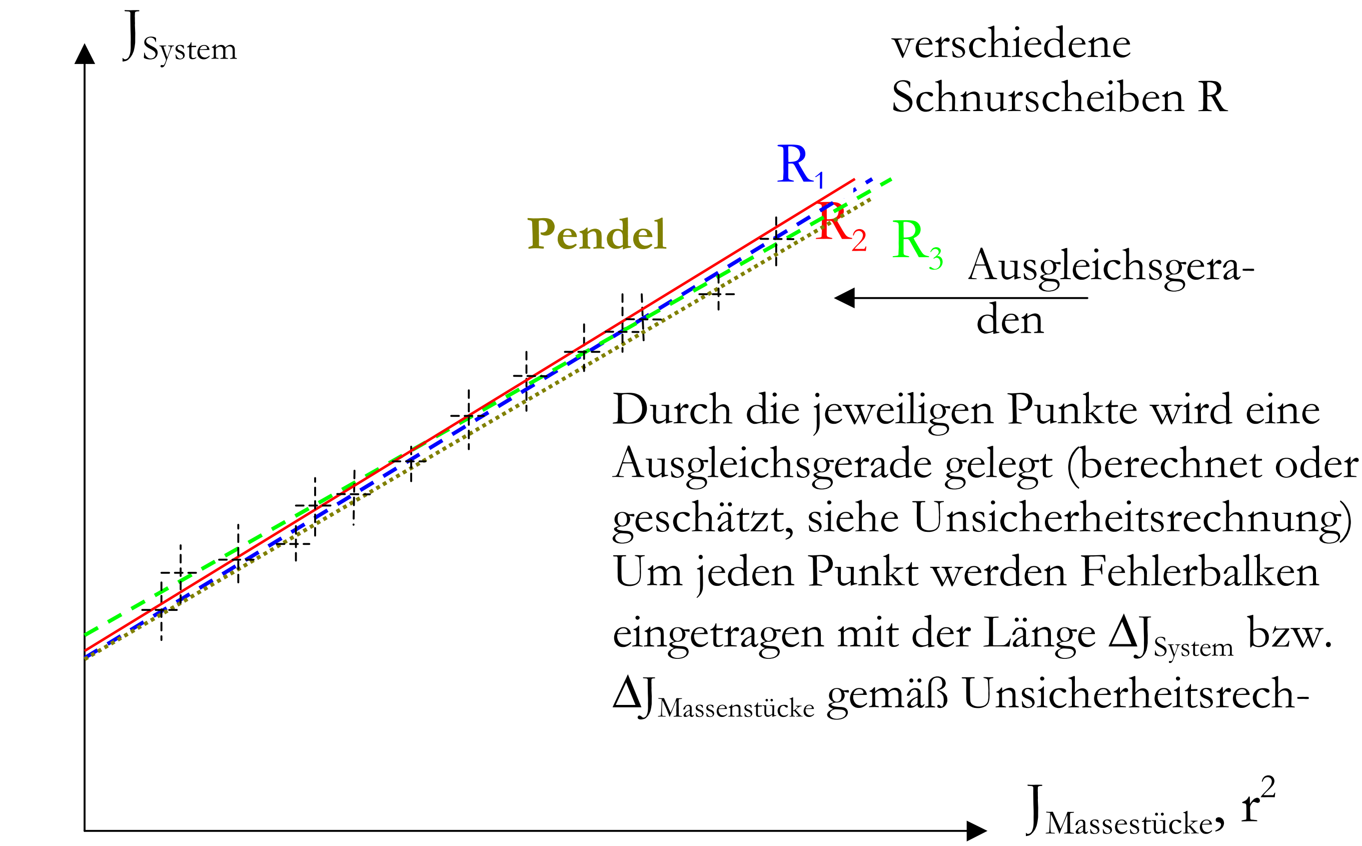
2 Bestimmung des Massenträgheitsmomentes des Systems aus der Pendelschwingung:

Es werden nun 5 Positionen r_1 und r_2 der Massen m_1 und m_2 gewählt, wobei der Abstand des Schwerpunktes der beiden Massen von der Drehachse = r_{MM} konstant gehalten wird dh.
$(r_2 - r_1)/2 = r_{MM}$ = konst. Mit Hilfe der Rillen in der Stange läßt sich dies bewerkstelligen: beide Massen werden einfach um dieselbe Zahl von Rillen jeweils nach außen verschoben. Bei jeder Position der Massen wird die Zeit für N=10 Schwingungen $T_{(10)}$ zehnmal (n=10) gemessen.

$r_1 =$					
$r_2 =$					
$(r_2 - r_1)/2$					
$T_{(N=10)} =$					
$T_{(10)} =$					
$T_{(10)} =$					
$T_{(10)} =$					
$T_{(10)} =$					
$T_{(10)} =$					
$T_{(10)} =$					
$T_{(10)} =$					
$T_{(10)} =$					
$T_{(10)} =$					
$\overline{\mathbf{T}}_{\mathbf{(10)}}$ **=**					
$s_{10} =$					
$s_{10}/\sqrt{n} =$					
Umrechnung auf eine Schwingung, $s = s_{10}/N = s_{10}/10$					
$\mathbf{T = \overline{T} \pm s/\sqrt{n}}$					

Sollte die Zeit knapp werden,werden die Versuche sinnvoll abgekürzt.

Zur Auswertung:



Geht $J_{\text{Massestücke}}$ durch Extrapolation der Geraden gegen Null,erhält man J_{System} ohne Massestücke = $J_{\text{Scheibe+Stange}}$, *die eigentliche Ergebnisgröße bei diesem Versuch*. Alle Geraden müßten sich auf der Ordinate schneiden; ein möglicher Abstand der Schnittpunkte ist ein Maß für die Unsicherheit der Messung.
Bei der Messung des Trägheitsmomentes des System aus der **Beschleunigung** wird J_{System} gemäß (9) u.(10) der Anleitung aus (Ableitung siehe letzte Seiten)

$$\boxed{J_{System} = m_G \cdot R^2 \cdot \frac{g \cdot \overline{\delta t}^2}{2s_1 - 4\sqrt{s_1 s_2} + 2s_2} - m_G R^2}$$

und $J_{\text{Massestücke}}$ nach $J_{\text{Massestücke}} = 2 \cdot r^2 \cdot m_{1,2}$ bestimmt ⇒ *Tabelle Beschleunigung*

bei der Messung aus der **Pendelbewegung** gemäß (12) und (15) nach
$J_{\text{System}} = (m_1 + m_2) \cdot r_{MM} \cdot g \cdot \overline{T}_{\text{Mittel}}^2 / 4\pi^2$ und $J_{\text{Massestücke}}$ mit Hilfe des Steinerschen Satzes wegen $r_1 \neq r_2$ nach
$J_{\text{Massestücke}} = 2 \cdot r_s^2 \cdot m_{1,2} + 2 \cdot r_{MM}^2 \cdot m_{1,2}$ mit

r_s = Abstand Massestücke-Schwerpunkt und
r_{MM} = Abstand Schwerpunkt der Massestücke-Drehpunkt.
Die Massestücke werden als Punktmassen betrachtet.

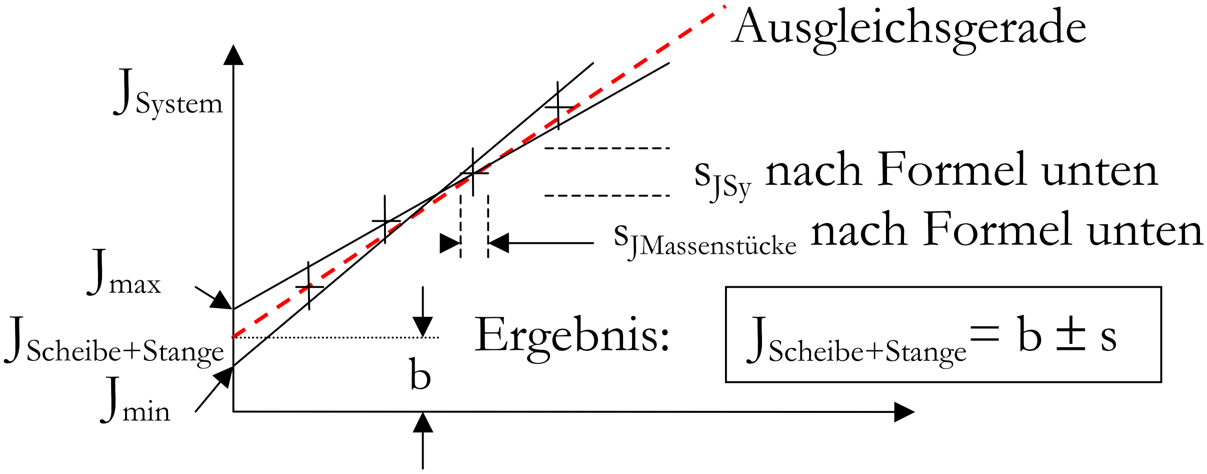
Tabelle Beschleunigung:

$r_{1,2}$/[m]	$\delta t\ \overline{(r)}$/[s]	$\{s/\sqrt{n}\}$/[s]	$\{J_{System}/[kgm^2]\}\cdot 10^3$	$\{J_{Massest.}/[kgm^2]\}\cdot 10^3$

Unsicherheitrechnung:

Nach der neuen Vorschrift zur Berechnung von Meßunsicherheiten (DIN V ENV 13005 Ausgabe 1999-06) werden sog. *Standardunsicherheiten* eingeführt. Ist die Meßgröße innerhalb eines Intervalls Δ rechteckverteilt, ist die Standardunsicherheit $s = \Delta/\sqrt{12}$ (= Standardabweichung einer Rechteckverteilung gemäß Statistik)
Im Praktikum wird üblicherweise $\Delta/\sqrt{3}$ (doppeltes Intervall) verwendet.
Beispiele: Schieblehre = 0,1 mm/$\sqrt{3}$, Digitalgeräte = Schritt der letzten Stelle/$\sqrt{3}$ usw.
Bei Vielfachmessungen ist die Standardunsicherheit die Standardabweichung des arithmetischen Mittels = $s/\sqrt{n}$.
Wird das Ergebnis aus mehreren unsicherheitsbehafteten Einzelgrößen errechnet, bestimmt man die sog. *Kombinierte Standardunsicherheit* des Ergebnisses, die sich bei Vernachlässigung von Korrelationen nach der früheren Unsicherheitsfortpflanzung nach Gauß ergibt.
$g_{München}$ = 9,80733 m/s² ist fehlerlos !
Die Geraden $J_{System} = f(J_{Massestücke})$ (siehe Abb.oben) können entweder durch geschätztes Durchziehen durch die Punkte oder durch Ausgleichsrechnung erhalten werden. Bei der Berechnung der Steigung a werden die Formeln S.7 Versuch E-Modul verwendet. Den Achsenabschnitt b erhält man nach $b = \overline{y} - a\overline{x}$
Um jeden Punkt werden Fehlerbalken der Länge $s_{JSystem}$ bzw. $s_{JMassenstücke}$,deren Berechnung im folgenden gezeigt wird, eingezeichnet. Der Ordinatenabschnitt der Ausgleichsgerade ergibt das Ergebnis $J_{System\ ohne\ Massen} = J_{Scheibe+Stange}$.

Um die Unsicherheit **grafisch** zu ermitteln, kann man folgendermaßen verfahren: Es wird die flachste und steilste Gerade, die durch alle Fehlerbalken geht, eingezeichnet; aus deren Ordinatenabschnitt J_{max} und J_{min} erhält man die Standardunsicherheit s von $J_{System\ ohne\ Massen} = J_{Scheibe+Stange}$. $s = (J_{max} - J_{min})/(2\cdot\sqrt{3})$.



Soll die Unsicherheit **berechnet** werden, benötigt man die Standardunsicherheit des Ordinatenabschnittes b. Diese ergibt sich nach Statistik für y = ax+b zu

$$s_b = \sqrt{\frac{(n-1)s_x{}^2 + n\bar{x}^2}{n}} \cdot s_a$$

s_a wird nach S. 7 E-Modul berechnet.

Nach Formel S.5 ist

$$s_{JSy} = \sqrt{\left(\frac{\partial J_{Sy}}{\partial R}\cdot s_R\right)^2 + \left(\frac{\partial J_{Sy}}{\partial m_G}\cdot s_{m_G}\right)^2 + \left(\frac{\partial J_{Sy}}{\partial \delta t}\cdot s_{\delta t}\right)^2 + \left(\frac{\partial J_{Sy}}{\partial s_1}\cdot s_{s1}\right)^2 + \left(\frac{\partial J_{Sy}}{\partial s_2}\cdot s_{s2}\right)^2}$$

zB. bei der Bestimmung von J_{System} aus der Beschleunigung.
$s_{\delta t} = s/\sqrt{n}$; $s_R/R = s_\Phi/\Phi$; (Φ =Durchmesser der Schnurscheibe).
Bei Potenzprodukten ohne Summen vereinfacht sich die Berechnung zB. für $J_{Massestücke} = 2\cdot r^2\cdot m_{1,2}$ auf

$$\frac{s_{JMassestücke}}{J_{Massestücke}} = \sqrt{\left(\frac{2\cdot s_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{s_{m1,2}}{m_{1,2}}\right)^2}$$

mit $s_r/r = s_d/d$; (siehe S.2.);

Bei den Ableitungen handelt es sich um *partielle Ableitungen*,bei denen nur nach einer Größe abgeleitet wird,während alle anderen konstant gehalten werden.zB. mit

$$\boxed{J_{System} = m_G \cdot R^2 \cdot \frac{g \cdot \delta t^2}{2s_1 - 4\sqrt{s_1 s_2} + 2s_2} - m_G R^2}$$

$$\frac{\partial J}{\partial R} = 2 \cdot R \cdot m_G \cdot \left\{ \frac{g \cdot \delta t^2}{2s_1 - 4\sqrt{s_1 s_2} + 2s_2} - 1 \right\}$$

Ableitungen:

$$J_{System} = m_G \cdot R^2 \cdot \left\{ \frac{g \cdot \delta t^2}{2s_1 + 2s_2 - 4\sqrt{s_1 \cdot s_2}} - 1 \right\}$$

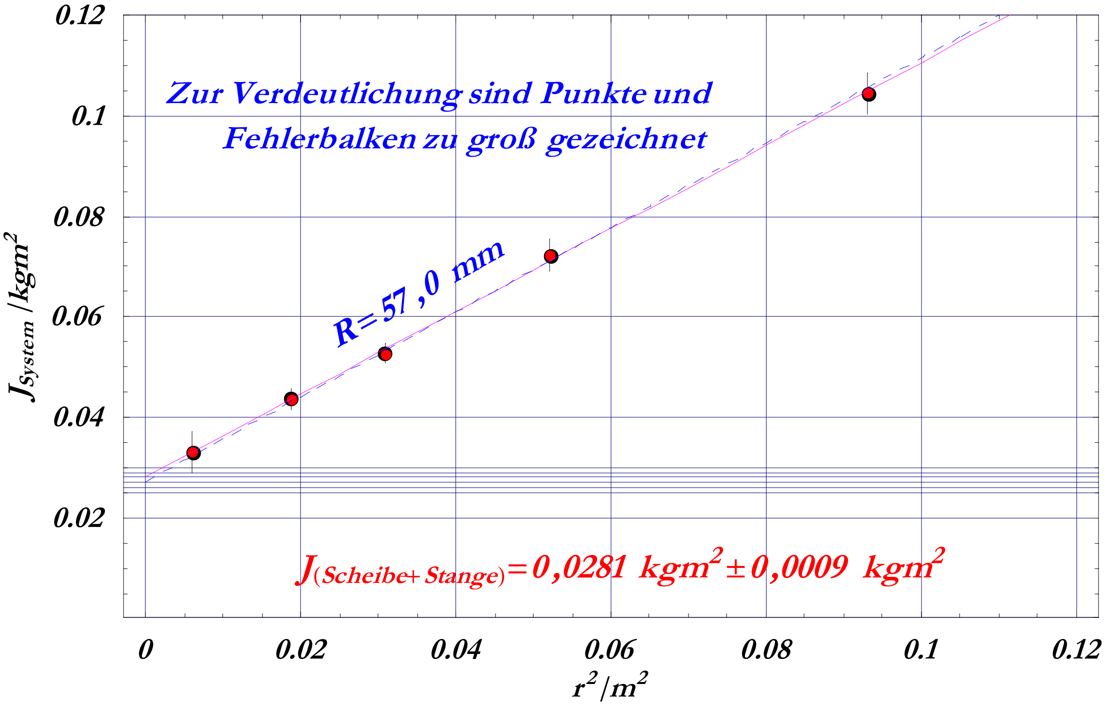
$$\frac{\partial J_{System}}{\partial R} = 2 \cdot m_G \cdot R \cdot \left\{ \frac{g \cdot \delta t^2}{2s_1 + 2s_2 - 4\sqrt{s_1 \cdot s_2}} - 1 \right\} = 2 \cdot J_{System} \cdot \frac{1}{R}$$

$$\frac{\partial J_{System}}{\partial m_G} = R^2 \cdot \left\{ \frac{g \cdot \delta t^2}{2s_1 + 2s_2 - 4\sqrt{s_1 \cdot s_2}} - 1 \right\} = \frac{J_{System}}{m_G}$$

$$\frac{\partial J_{System}}{\partial \delta t} = 2 \cdot m_G \cdot R^2 \cdot \left\{ \frac{g \cdot \delta t^2}{2s_1 + 2s_2 - 4\sqrt{s_1 \cdot s_2}} \right\}$$

$$\frac{\partial J_{System}}{\partial s_1} = -\left\{ \frac{C \cdot \left[2 - 2\sqrt{\frac{s_2}{s_1}} \right]}{\left(2s_1 + 2s_2 - 4\sqrt{s_1 \cdot s_2}\right)^2} \right\}; C = m_G \cdot R^2 \cdot g \cdot \delta t^2$$

$$\frac{\partial J_{System}}{\partial s_2} = -\left\{ \frac{C \cdot \left[2 - 2\sqrt{\frac{s_1}{s_2}} \right]}{\left(2s_1 + 2s_2 - 4\sqrt{s_1 \cdot s_2}\right)^2} \right\};$$



Bewegungsgleichung:

Die Formel Seite 5 für $J_{System} = J_{Stange} + J_{Schnurscheibe} + J_{Massenstücke}$ ergibt sich aus der Bewegungsgleichung, sie besteht aus folgenden Teilen mit Einschluß der Reibung:

1.) Die Ursache für die Bewegung des Systems ist die Gewichtskraft des Massenstückes m_G
$F_G = m_G \cdot g$

2.) Kraft zur Erzeugung einer Drehbewegung von Stange, Schnurscheibe und Massestücke:
aus $F_{Schnurscheibe} \cdot R_{Schnurscheibe} = (J_{Schnurscheibe} + J_{Stange} + J_{Massenstücke}) \cdot \alpha_{Schnurscheibe}$
$F_{Schnurscheibe} = (J_{Schnurscheibe} + J_{Stange} + J_{Massenstücke}) \cdot \alpha_{Schnurscheibe} / R_{Schnurscheibe}$

3.) Kraft zur Überwindung der Reibung $= M_R/R_{Schnurscheibe}$ (konstantes Reibungsmoment M_R durch Achslagerreibung angenommen)

4.) Kraft zur Beschleunigung der Gewichtsmasse m_G : $F_{mG} = m_G \cdot a$

Damit erhält man folgende Bewegungsgleichung:

$$m_G \cdot g = \frac{(J_{SS} + J_{St} + J_{Ma}) \cdot a}{R_{SS}^2} + \frac{M_R}{R_{SS}} + m_G \cdot a\,;\, mit\ a = R_{SS} \cdot \alpha_{SS}\,;\, daraus$$

$$J_{System} = J_{SS} + J_{St} + J_{Ma} = \frac{m_G \cdot g \cdot R_{SS}^2}{a} - m_G \cdot R_{SS}^2 - \frac{M_R}{a} \cdot R_{SS} \quad (1)\ und$$

$$a = \frac{(m_G \cdot g \cdot R_{SS} - M_R) \cdot R_{SS}}{J_{SS} + J_{St} + J_{Ma} + m_G \cdot R_{SS}^2} \qquad (2)$$

wird in der Gleichung (1) M_R vernachlässigt und setzt man für a die Formel Seite 3 unten ein, erhält man die Formel von Seite 5 für J_{System}. Die Gleichung (2) bedeutet, daß es ein kleinstes Gewicht $m_G \cdot g$ gibt, dessen Drehmoment $m_G \cdot g \cdot R_{SS}$ gerade das Reibungsdrehmoment ist und deshalb die Beschleunigung null wird.

Einfluß der Reibung (nach Prof.J.Meier):

Beim Versuch wird J_{System} ohne Reibung nach Formel Seite 5 falsch bestimmt $\rightarrow J_{Systemfalsch}$. In Wirklichkeit müßte J_{System} mit Reibung nach (1) oben bestimmt werden $\rightarrow J_{Systemwahr}$.

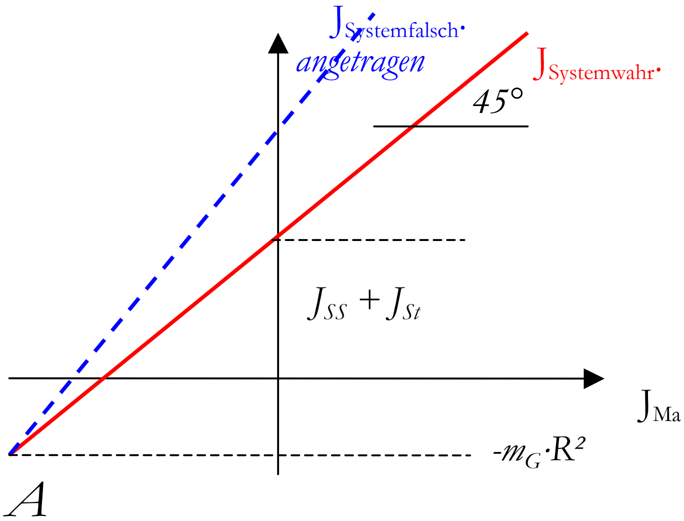
$$J_{Systemwahr} = \left(m_G \cdot g - m_G \cdot a - \frac{M_R}{R_{SS}} \right) \cdot \frac{R_{SS}^2}{a} = J_{SS} + J_{St} + J_{Ma}$$

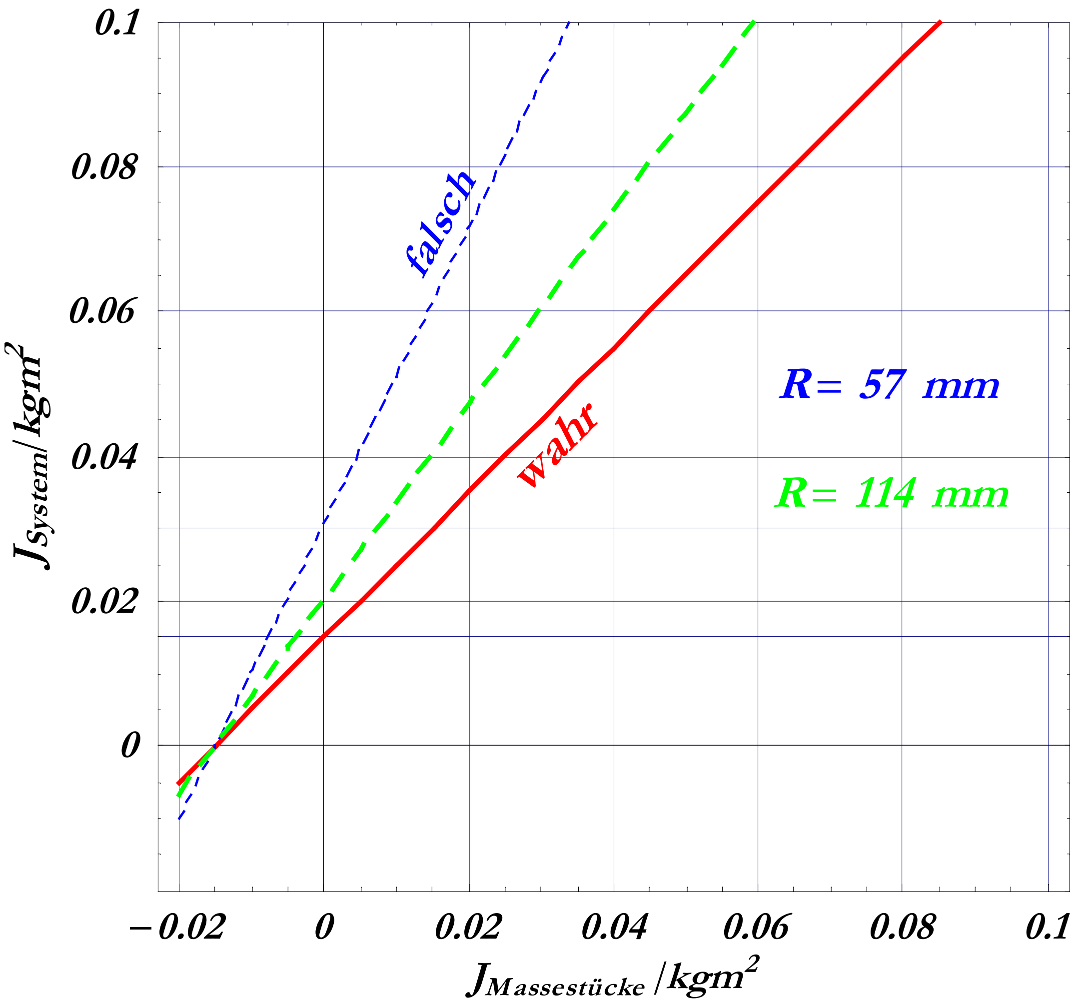
$$J_{Systemfalsch} = (m_G \cdot g - m_G \cdot a) \cdot \frac{R_{SS}^2}{a} = \frac{m_G \cdot g \cdot R_{SS}}{m_G \cdot g \cdot R_{SS} - M_R} \cdot J_{Ma} + \frac{m_G \cdot g \cdot R_{SS} \cdot (J_{SS} + J_{St}) + m_G \cdot R_{SS}^2 \cdot M_R}{m_G \cdot g \cdot R_{SS} - M_R}$$

$$es\ wird\ a\ von\ oben\ eingesetzt.\ Für\ J_{Ma} = -(m_G \cdot R_{SS}^2 + J_{SS} + J_{St})\ ist$$

$$J_{Systemwahr} = J_{Systemfalsch} = -m_G \cdot R_{SS}^2$$

Damit ergibt sich eine Möglichkeit $J_{Systemwahr}$. zu bestimmen: Man konstruiert von A aus eine 45°-Linie, die $J_{Systemwahr}$. als Funktion von J_{Ma} ergibt; der Ordinatenschnittpunkt ist das gesuchte tatsächliche $J_{SS} + J_{St}$





Für verschiedene Schnurscheiben ergeben sich unterschiedliche gemessene Geraden. In dem Beispiel ist $m_G \cdot R^2$ sehr klein (0,000065 kgm²)