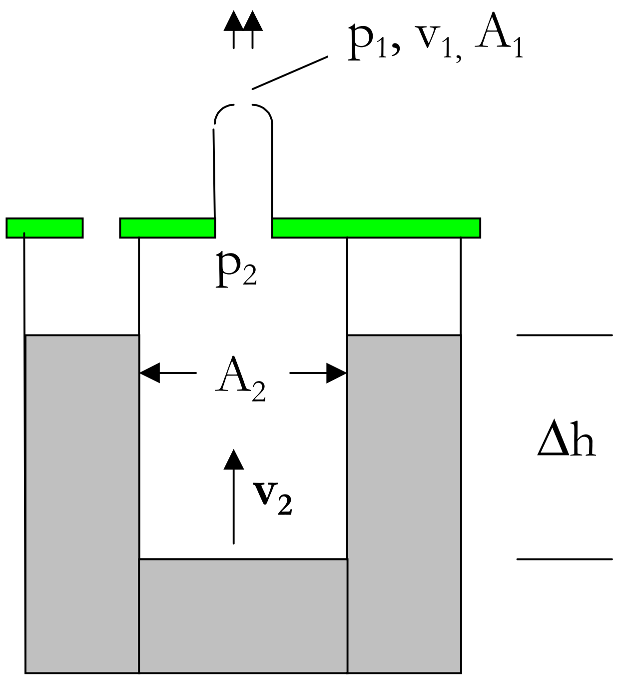
Protokoll zum Versuch 8 Physikpraktikum

Bestimmung der Gasdichte mit dem Effusiometer

Namen:	
Datum:	
Kurs/Gruppe:	
Temperatur:	± °C
Luftdruck:	± hPa

Effusiometer



$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho_W \cdot g \cdot \Delta h; v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho}}$$

$$\frac{\rho_G}{\rho_L} = \left(\frac{t_G}{t_L}\right)^2; \mathrm{Re} = \frac{v \cdot l \cdot \rho}{\eta}; \eta = 1{,}82 \cdot 10^{-5}\, Pa \cdot s$$

Versuche:

t ist jeweils die Zeit, in der der Wasserspiegel von der unteren zur oberen Markierung steigt. Diese Zeit ist proportional zur Wurzel aus der Gasdichte dh. $t = const \cdot \sqrt{\rho}$; wie im Kapitel „Ableitungen" gezeigt wird, ist die Konstante für alle Gase gleich.
Da die Standardunsicherheit* von Digitaluhren (Schritt der letzten Stelle/$\sqrt{3}$) kleiner als die Streuung der Meßwerte t_i ist, ergeben Vielfachmessungen eine Reduzierung der Unsicherheit im Ergebnis (der sog.kombinierten Standardunsicherheit*)
Zur Bestimmung von v_1 bzw. der Reynolds-Zahl sind maximale und minimale Wasserstandsdifferenzen im Gefäß zu bestimmen:
h_{max} ist die Höhendifferenz zwischen innerem Wasserspiegel an der unteren Marke und dem äußeren Wasserspiegel
h_{min} ist die Höhendifferenz zwischen innerem Wasserspiegel an der oberen Marke und dem äußeren Wasserspiegel.
Es genügt,die Differenzen grob zu schätzen.

h_{max} =	±
h_{min} =	±
Düsenbohrung 1 (∅)=	±
Düsenbohrung 2 (∅) =	±

Raumtemperatur und Luftdruck müssen mit Unsicherheit bestimmt werden und oben eingetragen werden; siehe S.6 Mitte.

***** nach dem „Leitfaden zur Angabe von Unsicherheiten beim Messen", Beuth-Verlag 1995 wird eine Rechteckverteilung für die Verteilung von Meßwerten innerhalb eines Schrittes bei Digitalgeräten angenommen, deren Standardabweichung Intervall/$\sqrt{3}$ beträgt. Diese Unsicherheit wird als Standardunsicherheit bezeichnet. Die sich aus einzelnen unsicherheitsbehafteten Meßgrößen ergebende Unsicherheit des Ergebnisses heißt „kombinierte Standardunsicherheit"

Nr.	t_{Luft}/s 1mm	t_{Ar}/s 1mm	t_{CO2}/s 1mm	t_{Luft}/s 0,5mm
	30 – 50 Messungen sind nötig			Nur 10 Messungen sind nötig!
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				
25				
26				
27				
28				
29				
30				
31				
32				
33				

34				
35				
36				
37				
38				
39				
40				
41				
42				
43				
44				
45				
46				
47				
48				
49				
N=50				
	Mittelwert			
$\overline{t}$				
	Standardabweichung			
s_t				
Standardabweichung des Mittelwertes= Standardunsicherheit der t - Messung $s_{t,G}$				
$s_t/\sqrt{N}$				

Unsicherheitsrechnung und Auswertung:

Nach der neuen Unsicherheitsrechnung (DIN) werden Standardunsicherheiten von Meßgrößen angegeben (Bemerkung S.2 unten); im vorliegenden Fall der Vielfachmessung ist das die Streung des Mittelwertes der Ausströmzeiten für Luft bzw. Gas

$$t_L = \bar{t}_L \pm \frac{s_L}{\sqrt{N}}; s_L = \text{Standardabweichung der } t\text{ - Messungen von Luft};$$

$$N = 50; s_{t,L} = \frac{s_L}{\sqrt{N}} = \text{Standardunsicherheit der } t - \text{Messung von Luft}.$$

Da außer bei der Bestimmung der Reynoldszahl alle Ergebnisse aus Produktfunktionen berechnet werden, kann die Unsicherheit des Ergebnisses mit vereinfachter Berechnung ohne partielle Ableitungen angegeben werden, was bei Vernachlässigung von Korrelationen zu der früheren Gauß´schen Fehlerfortpflanzung führt.(Genaueres siehe bei Versuch E-Modul).

Bestimmung von Gasdichten:

Nach Anleitung ist die Dichte des Gases $\boldsymbol{\rho_{G,n}}$ bei Normalbedingungen gesucht.

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\rho_G}{\rho_L} = \frac{\rho_{G,n}}{\rho_{L,n}} = \frac{\bar{t}_G^{2}}{\bar{t}_L^{2}} \Rightarrow \frac{s_{\rho G,n}}{\rho_{G,n}} = \sqrt{\left(2 \cdot \frac{s_{t,G}}{\bar{t}_G}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{s_{t,L}}{\bar{t}_L}\right)^2} \\ bzw. \quad \rho_{G,n} = \rho_{L,n} \cdot \frac{\bar{t}_G^2}{\bar{t}_L^2}; \bar{t} = \text{arithmetisches Mittel};\end{gathered}}$$

mit $s_{t,G}$ und $s_{t,L}$ als Standardunsicherheiten der Ausströmzeitmessungen von Luft und Gas = jeweilige Standardabweichungen/√N und $\boldsymbol{\rho_{L,n}}$ **=1,293 kg/m³** **(**fehlerlos).
Die Dichte der Luft bei Laborbedingungen kann aus der Dichte bei Normalbedingungen (**T_n= 273,15 K; θ_n = 0°C; p_n = 1013 hPa, 1 Pa = $75\cdot10^{-4}$ Torr = $75\cdot10^{-4}$ mmHg; 1 Torr =1,333... $\cdot10^2$ Pa**) mit Druck und Temperatur bei La-

borbedingungen berechnet werden.Daraus erhält man dann die Dichte vom Gas bei Laborbedingungen bzw. die komb. Standardunsicherheit $s_{\rho G}$ nach:

$$\rho_G = \frac{\bar{t}_G^{-2}}{\bar{t}_L^{-2}} \cdot \rho_L = \frac{\bar{t}_G^{-2}}{\bar{t}_L^{-2}} \cdot \frac{T_n \cdot p \cdot \rho_{L,n}}{T \cdot p_n}$$

$$\boxed{\frac{s_{\rho G}}{\rho_G} = \sqrt{\left(\frac{s_p}{p}\right)^2 + \left(\frac{s_T}{T}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{s_{t,L}}{\bar{t}_G}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{s_{t,G}}{\bar{t}_G}\right)^2}}$$

Die Standardunsicherheit der Temperaturmessung ergibt sich als kleinster Schritt der Digitalanzeige/√3, die Standardunsicherheit der Druckmessung erhält man aus der Ablesung der Höhe h´ der Quecksilbersäule des Barometers zu 0,1 mm/√3 , was nach p/Pa = 133,3· h_0/mm in Pa umgerechnet wird. Da das Barometer für 0°C geeicht ist, muß der Barometerstand zuerst nach Tabelle um die Längenzunahme des Maßstabes infolge der Temperaturdifferenz zwischen Raum-und Eichtemperatur korrigiert werden, dh. h_0 = h´-Δh; (Δh aus der aufliegenden Tabelle)

Reynoldszahl:

Die maximale bzw. minimale Reynoldszahl wird bestimmt, indem man in die Gleichung für die Reynoldszahl einmal die größte Ausströmgeschwindigkeit bei h_{max} und einmal die kleinste Ausströmgeschwindigkeit bei h_{min} einsetzt :

$$\mathrm{Re} = \frac{v_1 \cdot \ell \cdot \rho}{\eta}; \; v_{\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot \rho_{Wasser} \cdot g \cdot h_{\max}}{\rho_L}};$$

$$\mathrm{Re}_{\max} = \frac{\ell \cdot \rho_L}{\eta} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \rho_{Wasser} \cdot g_{München} \cdot h_{\max}}{\rho_L}}$$

$$\mathrm{Re}_{\max} = \frac{\ell}{\eta} \cdot \sqrt{2 \cdot \rho_L \cdot \rho_{Wasser} \cdot g_{München} \cdot h_{\max}}$$

$$g_{München} = 9{,}80733 \, m/s^2$$

Für beide Düsendurchmesser kann danach geprüft werden, ob laminare oder turbulente Strömung vorhanden ist.

Ausströmzeit bei kleiner Düse:

Nach Anleitung sollen auch Ausströmzeiten bei kleiner Düse mit Durchmesser **Φ**= 0,5 mm gemessen werden. Gemäß Ableitung ergibt sich für die Ausströmzeit

$$t = \frac{A_2}{A_1} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \rho_L}{\rho_{Wasser} \cdot g}} \cdot \left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1}\right); dh. \ \frac{t_{0,5mm}}{t_{1mm}} = \frac{1}{0{,}5^2} = 4$$

Beim Vergleich mit den Messungen muß die Unsicherheit vom gemessenen Verhältnis $z = t_{0,5}/t_1$ berechnet werden:

$$\frac{s_z}{\bar{z}} = \sqrt{\left(\frac{s_{t;0,5}}{\bar{t}_{0,5}}\right)^2 + \left(\frac{s_{t;1}}{\bar{t}_1}\right)^2} ; \bar{z} = \frac{\bar{t}_{0,5}}{\bar{t}_1} ; Ergebnis: \ z = \bar{z} \pm s_z$$

Die Standardunsicherheiten $s_{t;0,5}$ und $s_{t;1}$ sind die Standardabweichungen der Mittelwerte. (Für ∅ = 1 mm Wert von oben; für ∅ =0,5 mm ⇒ $s_{t;0,5}$ =Standardabweichung der t-Werte mit 0,5 mm-Düse/√(N=10) . s_z ist die kombinierte Standardunsicherheit des Meßergebnisses .

Liegt das theoretische Ergebnis z = 4 innerhalb des Intervalls $\bar{z} \pm 3s_z$ dh. innerhalb der dreifachen kombinierten Standardunsicherheit des Meßergebnisses, kann von einer signifikanten Übereinstimmung von Theorie und Messung ausgegangen werden.

Ableitungen:

Der tatsächliche Strahlquerschnitt A_1 ist infolge Strahlkontraktion kleiner als der geometrische Düsenquerschnitt , ebenso sind die tatsächlichen Geschwindigkeiten durch Reibungsverluste, die von der Düsenform und von der Zähigkeit des Gases dh. von der Gasart abhängen, kleiner als die idealen Ausströmgeschwindigkeiten.Deshalb beschreibt die theoretische Ableitung nur begrenzt die tatsächlichen Verhältnisse.

Mit $h(t) = \Delta h(t)$ = zeitlich veränderliche Höhendifferenz zwischen äußerem und innerem Wasserspiegel und dem die Düse durchströmenden Volumen V(t) erhält man:

$$\frac{dV(t)}{dt} = A_1 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \delta p}{\rho_G}}\,;\ \delta p = \rho_W \cdot g_M \cdot h(t);\ V(t) = h_0 \cdot A_2 - h(t) \cdot A_2\ ;$$

$$-A_2 \cdot \frac{dh(t)}{dt} = A_1 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \rho_W \cdot g_M \cdot h(t)}{\rho_G}}\,;$$

$$\int_{h_0}^{h(t)} \frac{dh}{\sqrt{h}} = 2 \cdot \sqrt{h}\Big|_{h_0}^{h(t)} = -\frac{A_1}{A_2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \rho_W \cdot g_M}{\rho_G}} \cdot t \Rightarrow h(t) = \left\{-\frac{1}{2} \cdot \frac{A_1}{A_2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \rho_W \cdot g_M}{\rho_G}} \cdot t + \sqrt{h_0}\right\}^2$$

$$h(t) = h_0 - \frac{A_1}{A_2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \rho_W \cdot g_M \cdot h_0}{\rho_G}} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{A_1^2}{A_2^2} \cdot \frac{\rho_W \cdot g_M}{\rho_G} \cdot t^2\ ;$$

$$V(t) = \frac{A_1}{\sqrt{\rho_G}} \cdot \sqrt{2 \cdot \rho_W \cdot g_M \cdot h_0} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \frac{A_1^2}{A_2^2} \cdot \frac{\rho_W \cdot g_M}{\rho_G} \cdot t^2\ ;$$

$h_0 = h_{max}$ ist die anfängliche Differenz zwischem äußeren und innerem Wasserspiegel. Die Kurven für h(t) und V(t) sind auf Seite 10 aufgetragen.
Setzt man in die Zeile 3 feste Integrationsgrenzen h_0 und h_1 ein, wobei $h_0 = h_{max}$ die anfängliche Differenz zwischen innerem und äußerem Wasserspiegel an der unteren Markierung und $h_1 = h_{min}$ die Höhendifferenz zwischen äußerem und inneren Wasserspiegel an der oberen Markierung ist und löst die integrierte Gleichung für h(t) nach t auf, erhält man:

$$2\cdot\left(\sqrt{h_1}-\sqrt{h_0}\right)=-\frac{A_1}{A_2}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot\rho_{Wasser}\cdot g_M}{\rho_G}}\cdot t$$

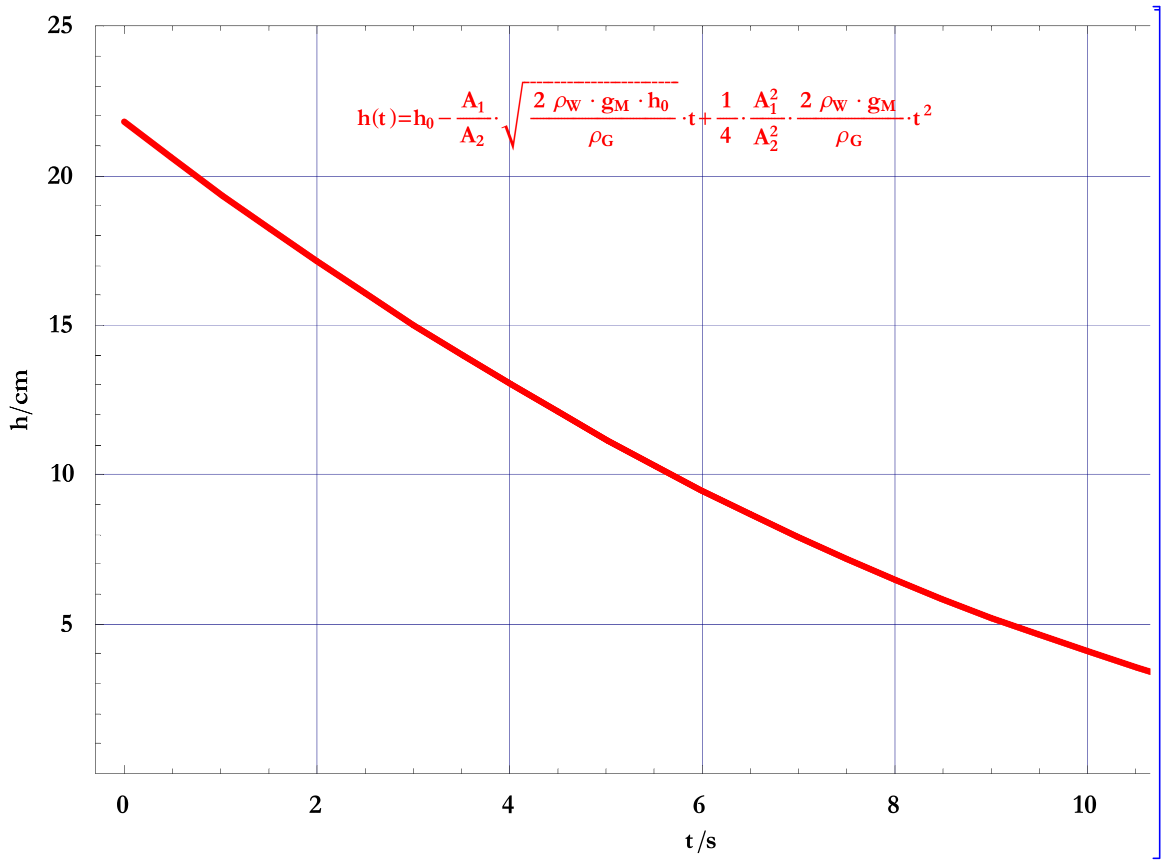
$$\boxed{t=\frac{\sqrt{h_1}-\sqrt{h_0}}{-\frac{A_1}{A_2}\cdot\sqrt{\frac{\rho_{Wasser}\cdot g_M}{2\cdot\rho_G}}}=\frac{A_2}{A_1}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot\rho_G}{\rho_{Wasser}\cdot g_M}}\cdot\left(\sqrt{h_0}-\sqrt{h_1}\right)}$$

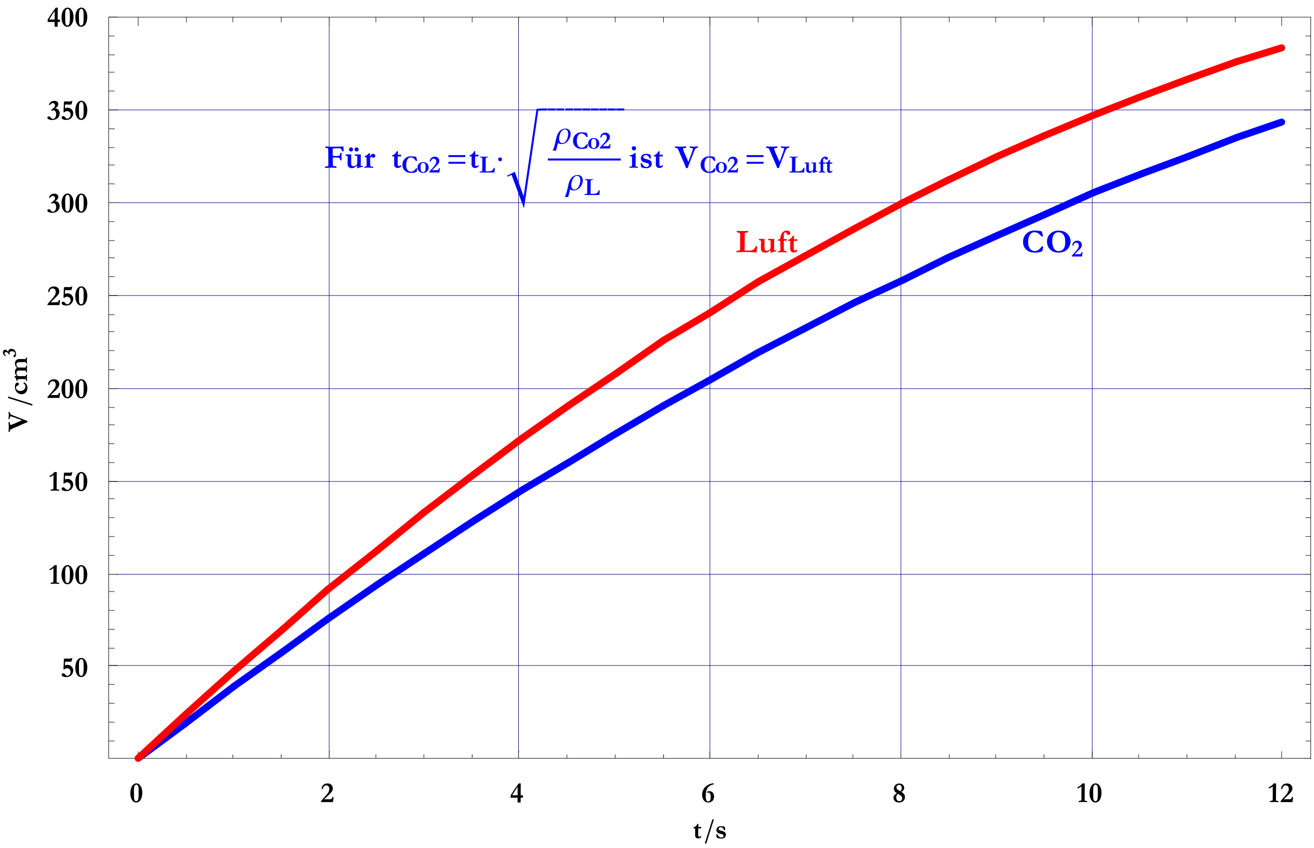
t ist dann die Zeit, die der innere Wasserspiegel von der unteren zur oberen Markierung benötigt, dh. die gemessene Ausströmzeit..

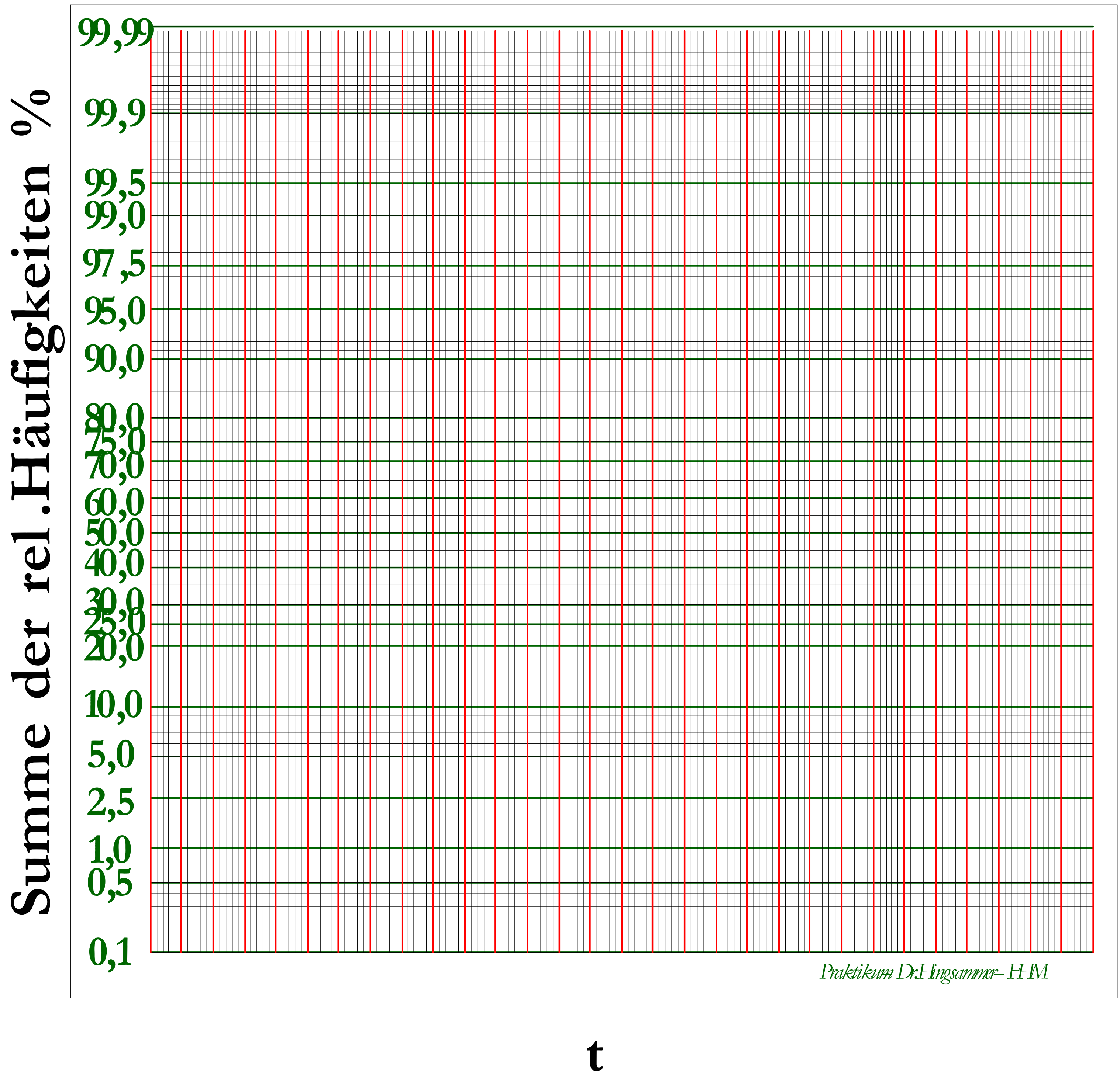
Daraus folgt, daß die Ausströmzeiten für verschiedene Gase proportional zur Wurzel ihrer Dichte sind und daß bei ein und derselben Apparatur die Konstante für alle Gase gleich ist, dh. t(Gas) = const $\cdot\sqrt{\rho}$*(Gas) .*

Bei der kleinen Düse ändert sich $A_1 = (\varnothing_1/2)^2\cdot\pi$ mit $\varnothing_1 = 0{,}5$ mm statt 1 mm, alle weiteren Größen bleiben konstant, weil in diesm Fall nur Luft untersucht wird.

Auf S.11 ist Summenhäufigkeitspapier aufgetragen, um nach Anleitung festzustellen, ob die gemessenen Ausströmzeiten normalverteilt sind.


h(t)=h0 − A1/A2 · √(2 ρW · gM · h0 / ρG) · t + 1/4 · A1²/A2² · 2 ρW · gM / ρG · t²
h/cm
t/s
25
20
15
10
5
0
2
4
6
8
10


Für tCo2 = tL · √(ρCo2 / ρL) ist VCo2 = VLuft
Luft
CO2
V/cm³
t/s
400
350
300
250
200
150
100
50
0
2
4
6
8
10
12


Summe der rel. Häufigkeiten %
99,99
99,9
99,5
99,0
97,5
95,0
90,0
80,0
75,0
70,0
60,0
50,0
40,0
30,0
25,0
20,0
10,0
5,0
2,5
1,0
0,5
0,1
Praktikum Dr.Hingsammer – FHM
t