I-1 Messunsicherheiten:[1]

Lit.: [1] Prof. Dr. Gerz „Wahrscheinlichkeitsrechnung und Unsicherheits-berechnung"

[2] ISO/BIPM-Leitfaden "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement", GUM (2008 überarbeitet, die deutsche Fassung ist [3])

[3] Vornorm DIN V ENV 13005, Ausgabe : 1999 – 06

[4] John R. Taylor: „An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertaintes in Physical Measurements"

a.) Histogramme:

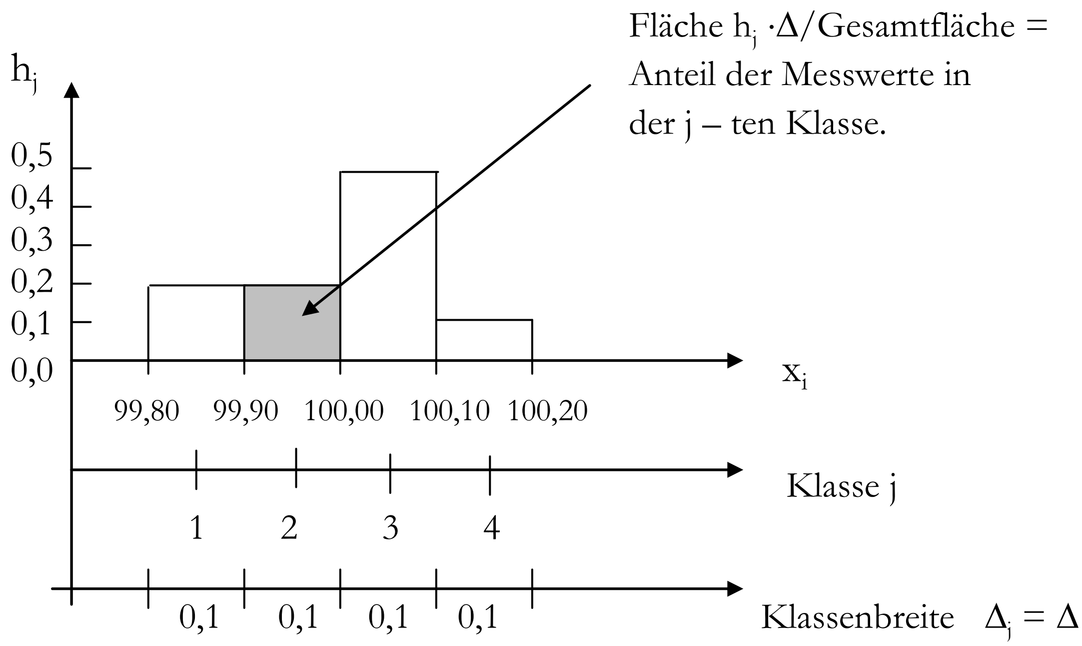
Die meisten Messungen von physikalischen Größen haben einen kontinuierlichen Bereich möglicher Werte zB.

100,04	99,83	99,89	100,07	99,99
100,02	100,08	100,09	99,93	100,13

Um über Streuung, statistische Verteilung und wahren Wert einer Messgröße Aussagen machen zu können, werden die Messwerte in Intervalle = Klassen j eingeteilt und die Zahl der Messwerte in den Klassen aufgetragen.

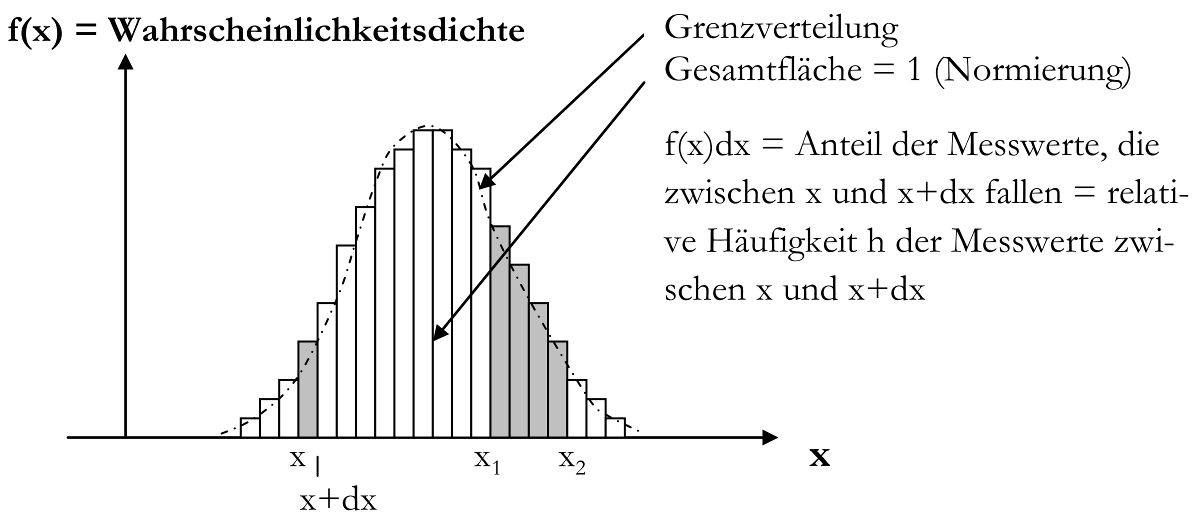
Klassengrenzen	j	Abs.Häufigkeit n_j in Klasse j	Rel.Häufigkeit $n_j/n= h_j$	Rel.Summenhäufigkeit F_j (Klassenende)
99,80 - < 99,90	1	2	0,2	0,2
99,90 - < 100,00	2	2	0,2	0,4
100,00 - < 100,10	3	5	0,5	0,9
100,10 - < 100,20	4	1	0,1	1,0
		$\sum = n = 10$	$\sum = 1$	

[1] Prof. Dr. Hingsammer, HM, Nachdruck verboten



Grenzverteilung, Wahrscheinlichkeitsdichte:

Die Zahl der Messwerte wird immer weiter erhöht, aus der Häufigkeitsverteilung entsteht die **Wahrscheinlichkeitsdichte f(x).**



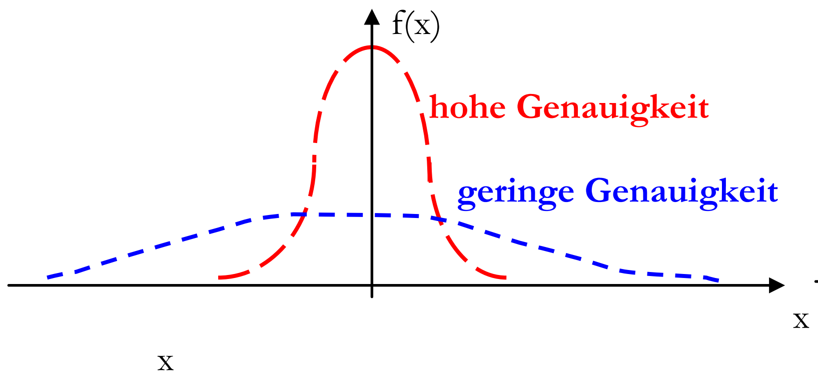
Bedeutung der Grenzverteilung bzw. der Wahrscheinlichkeitsdichte:
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiges Messergebnis zwischen x_1 und x_2 liegt ist :

Fläche zwischen x_1 und x_2 / Gesamtfläche = 1 wegen Normierung

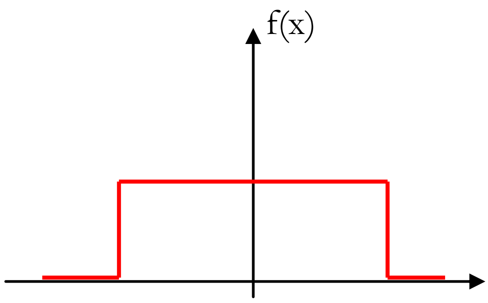
$$= \frac{\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx}$$ dh.

$$P(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \qquad (a1)$$

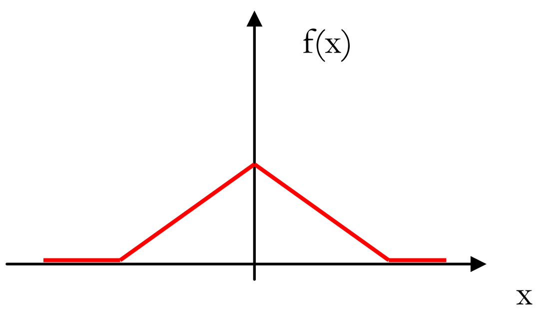
Verteilungen, die in der Messtechnik häufig vorkommen:



Normalverteilung



Rechteckverteilung



Dreieckverteilung

Aufgabe :

Bei einer Längenmessung erhält man folgende Messwerte:

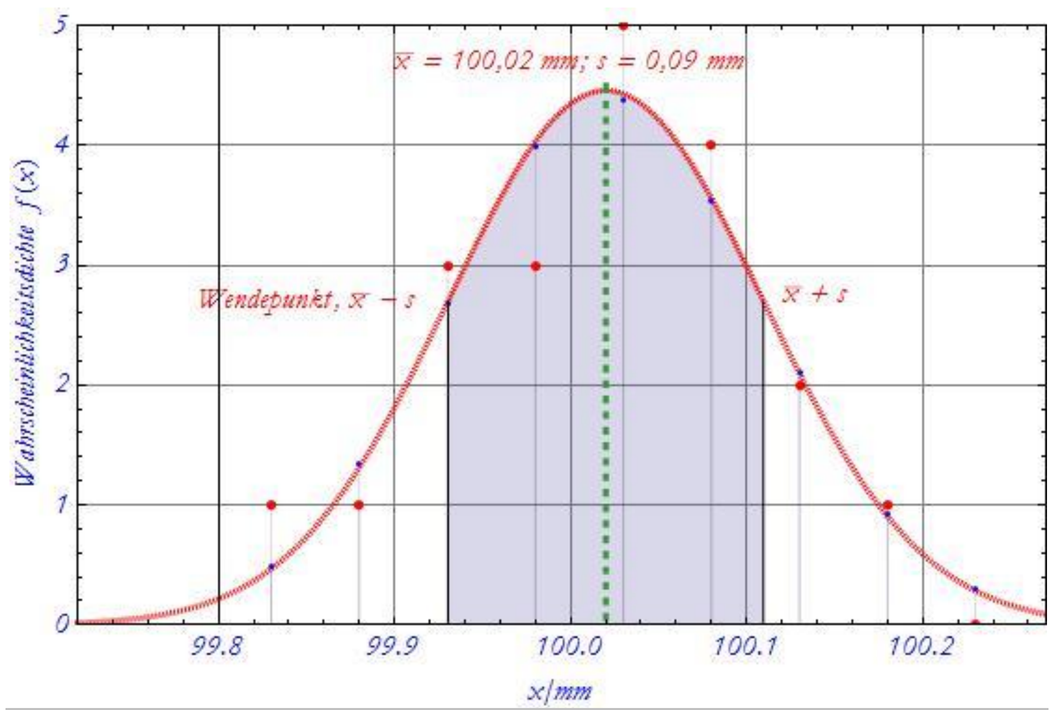
Länge	*100,04*	*99,89*	*99,99*	*100,08*	*99,93*	*100,01*	*100,19*	*99,94*	*100,13*	*100,09*
x_i/mm	*99,83*	*100,07*	*100,02*	*100,09*	*99,99*	*100,03*	*100,14*	*99,93*	*100,04*	*99,97*

Teilen Sie die Messwerte in Klassen ein und geben Sie die absoluten Häufigkeiten n_j, die relativen Häufigkeiten h_j in den Klassen j und die relative Summenhäufigkeit F_j tabellarisch an. Tragen Sie das Histogramm auf.

b.) Häufige Verteilungen:

Normalverteilung (stetig):

Damit wird die Streuung rein zufälliger Messwerte beschrieben (die Abbildung bezieht sich auf die obige Aufgabe)



$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (b1)$$

Zum Schätzwert von σ und μ siehe Abschnitt Varianz und Erwartungswert.
Die Zahl der beobachteten Messwerte in den Klassen erhält man näherungsweise, indem man das Integral von f(x) über die jeweiligen Klassengrenzen ausführt und mit der Zahl der Messwerte multipliziert. Das gibt den Erwartungswert E_k der Messwerte in den Klassen , der bei einer Vielzahl von Wiederholungsmessungen im Mittel auftritt.

Die Wahrscheinlichkeit P, Messwerte im Intervall $a < x \leq b$ zu finden, ist

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[erf \frac{(b-\mu)}{\sigma\sqrt{2}} - erf \frac{(a-\mu)}{\sigma\sqrt{2}} \right]; \qquad (b2)$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} \cdot erf \frac{z}{2} + \frac{1}{2}; \Phi(-z) = 1 - \Phi(z); \Phi(-\infty) = 0;$$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}; Bronstein \rightarrow \Phi(z) = \Phi_0(z) + 0,5$$

Φ ist die sog. **Verteilungsfunktion** der **Standard**-Normalverteilung[1] und **erf** die sog. **Errorfunction**; beides ist in Formelsammlungen bzw. Softwareprogrammen (Mathematica) tabellarisch dokumentiert, da das Integral in (b2) nicht elementar lösbar ist. Siehe nächste Seite !

Im Bereich $\mu - \sigma$ bis $\mu + \sigma$ sind 68,3% aller Messwerte enthalten

„ „ $\mu - 2\sigma$ bis $\mu + 2\sigma$ sind 95,5% aller Messwerte enthalten

„ „ $\mu - 3\sigma$ bis $\mu + 3\sigma$ sind 99,7% aller Messwerte enthalten

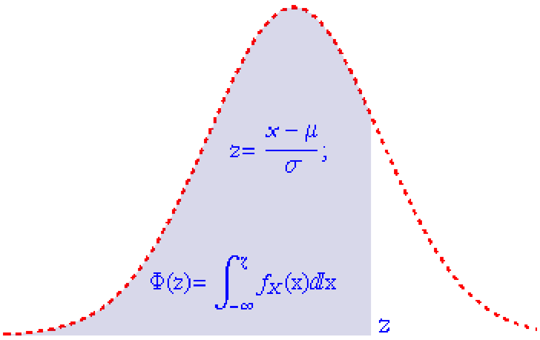
<u>Aufgabe:</u>

- *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei $\mu = 50$ mm und $\sigma = 10$ mm ein Messwert im Intervall (45-55) mm liegt bzw. kleiner 45 mm ist ? (0,383; 0,3085)*

---

[1] Die Standard-Normalverteilung ist symmetrisch mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$. Jede allgemeine Gauß´sche

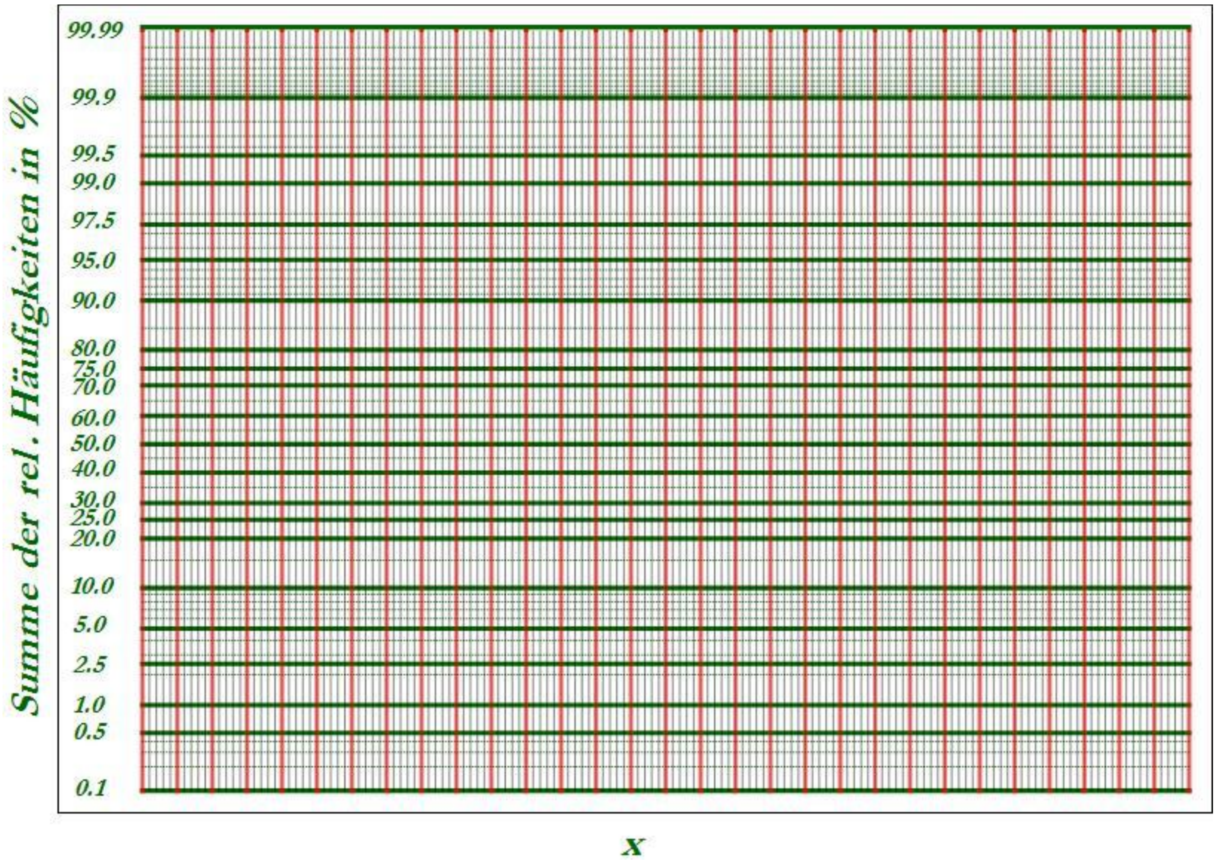
Verteilungsfunktion $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$ läßt sich auf sie zurückführen.



z	ϕ(-z)	ϕ(z)	z	ϕ(-z)	ϕ(z)	z	ϕ(-z)	ϕ(z)
0.01	0.4960	0.5040	0.51	0.3050	0.6950	1.01	0.1562	0.8438
0.02	0.4920	0.5080	0.52	0.3015	0.6985	1.02	0.1539	0.8461
0.03	0.4880	0.5120	0.53	0.2981	0.7019	1.03	0.1515	0.8485
0.04	0.4840	0.5160	0.54	0.2946	0.7054	1.04	0.1492	0.8508
0.05	0.4801	0.5199	0.55	0.2912	0.7088	1.05	0.1469	0.8531
0.06	0.4761	0.5239	0.56	0.2877	0.7123	1.06	0.1446	0.8554
0.07	0.4721	0.5279	0.57	0.2843	0.7157	1.07	0.1423	0.8577
0.08	0.4681	0.5319	0.58	0.2810	0.7190	1.08	0.1401	0.8599
0.09	0.4641	0.5359	0.59	0.2776	0.7224	1.09	0.1379	0.8621
0.10	0.4602	0.5398	0.60	0.2743	0.7257	1.10	0.1357	0.8643
0.11	0.4562	0.5438	0.61	0.2709	0.7291	1.11	0.1335	0.8665
0.12	0.4522	0.5478	0.62	0.2676	0.7324	1.12	0.1314	0.8686
0.13	0.4483	0.5517	0.63	0.2643	0.7357	1.13	0.1292	0.8708
0.14	0.4443	0.5557	0.64	0.2611	0.7389	1.14	0.1271	0.8729
0.15	0.4404	0.5596	0.65	0.2578	0.7422	1.15	0.1251	0.8749
0.16	0.4364	0.5636	0.66	0.2546	0.7454	1.16	0.1230	0.8770
0.17	0.4325	0.5675	0.67	0.2514	0.7486	1.17	0.1210	0.8790
0.18	0.4286	0.5714	0.68	0.2483	0.7517	1.18	0.1190	0.8810
0.19	0.4247	0.5753	0.69	0.2451	0.7549	1.19	0.1170	0.8830
0.20	0.4207	0.5793	0.70	0.2420	0.7580	1.20	0.1151	0.8849
0.21	0.4168	0.5832	0.71	0.2389	0.7611	1.21	0.1131	0.8869
0.22	0.4129	0.5871	0.72	0.2358	0.7642	1.22	0.1112	0.8888
0.23	0.4090	0.5910	0.73	0.2327	0.7673	1.23	0.1093	0.8907
0.24	0.4052	0.5948	0.74	0.2296	0.7704	1.24	0.1075	0.8925
0.25	0.4013	0.5987	0.75	0.2266	0.7734	1.25	0.1056	0.8944
0.26	0.3974	0.6026	0.76	0.2236	0.7764	1.26	0.1038	0.8962
0.27	0.3936	0.6064	0.77	0.2206	0.7794	1.27	0.1020	0.8980
0.28	0.3897	0.6103	0.78	0.2177	0.7823	1.28	0.1003	0.8997
0.29	0.3859	0.6141	0.79	0.2148	0.7852	1.29	0.0985	0.9015
0.30	0.3821	0.6179	0.80	0.2119	0.7881	1.30	0.0968	0.9032
0.31	0.3783	0.6217	0.81	0.2090	0.7910	1.31	0.0951	0.9049
0.32	0.3745	0.6255	0.82	0.2061	0.7939	1.32	0.0934	0.9066
0.33	0.3707	0.6293	0.83	0.2033	0.7967	1.33	0.0918	0.9082
0.34	0.3669	0.6331	0.84	0.2005	0.7995	1.34	0.0901	0.9099
0.35	0.3632	0.6368	0.85	0.1977	0.8023	1.35	0.0885	0.9115
0.36	0.3594	0.6406	0.86	0.1949	0.8051	1.36	0.0869	0.9131
0.37	0.3557	0.6443	0.87	0.1922	0.8078	1.37	0.0853	0.9147
0.38	0.3520	0.6480	0.88	0.1894	0.8106	1.38	0.0838	0.9162
0.39	0.3483	0.6517	0.89	0.1867	0.8133	1.39	0.0823	0.9177
0.40	0.3446	0.6554	0.90	0.1841	0.8159	1.40	0.0808	0.9192
0.41	0.3409	0.6591	0.91	0.1814	0.8186	1.41	0.0793	0.9207
0.42	0.3372	0.6628	0.92	0.1788	0.8212	1.42	0.0778	0.9222
0.43	0.3336	0.6664	0.93	0.1762	0.8238	1.43	0.0764	0.9236
0.44	0.3300	0.6700	0.94	0.1736	0.8264	1.44	0.0749	0.9251
0.45	0.3264	0.6736	0.95	0.1711	0.8289	1.45	0.0735	0.9265
0.46	0.3228	0.6772	0.96	0.1685	0.8315	1.46	0.0721	0.9279
0.47	0.3192	0.6808	0.97	0.1660	0.8340	1.47	0.0708	0.9292
0.48	0.3156	0.6844	0.98	0.1635	0.8365	1.48	0.0694	0.9306
0.49	0.3121	0.6879	0.99	0.1611	0.8389	1.49	0.0681	0.9319
0.50	0.3085	0.6915	1.00	0.1587	0.8413	1.50	0.0668	0.9332

Prüfung auf Normalverteilung:

Soll geprüft werden, ob eine vorhandene Verteilung einer Normalverteilung = Gaußverteilung entspricht, trägt man die relativen Summenhäufigkeiten in ein Wahrscheinlichkeitsdiagramm ein, dessen Ordinate so geteilt ist, daß bei Normalverteilung eine Gerade entsteht. Bei $x = \mu \pm \sigma$ ist die relative Summenhäufigkeit 15,87% bzw. 84,13% .



Aufgabe:

Prüfen Sie anhand des Wahrscheinlichkeitsdiagrammes die Häufigkeitsverteilung der Aufgabe Seite 4 auf Normalverteilung.

Varianz und Erwartungswert:

Der Erwartungswert von $(x-\mu)^2$ ergibt die Varianz σ^2 , ein Maß für die Streuung der Messwerte, der Erwartungswert von x liefert den Mittelwert μ .

$$\mu = E(X) = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} x \cdot f_X(x)\,dx \qquad (b3)$$

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sigma^2 = E\left(\left[X-\mu\right]^2\right) = \int_{x=-\infty}^{x=\infty} (x-\mu)^2 \cdot f_X(x)\,dx$$

Der Erwartungswert μ ist die Summe aller mit ihrer Wahrscheinlichkeit multiplizierten Messwerte oder das arithmetische Mittel bei unendlich vielen Messwerten x_i. x_j = x-Wert der Klassenmitte.
Da nur eine endliche Zahl von Messwerten vorliegt, läßt sich μ und σ nicht bestimmen, sondern nur ein **Schätzwert $\bar{x}$** = **Arithmetisches Mittel** für μ und ein Schätzwert s_x = **Empirische Standardabweichung** (Streuung) für die Standardabweichung σ:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i;\; s_x = \sqrt{\frac{1}{(n-1)}\sum (x_i - \bar{x})^2} \qquad (b4)$$

<u>Streuung des arithmetischen Mittels:</u>

Werden verschiedene Messreihen erstellt, erhält man i.a. jedesmal andere arithmetische Mittelwerte, dh.auch die Mittelwerte streuen, nur wesentlich geringer, wie die Messwerte. Man erhält allgemein für jede Verteilung:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (b5)$$

Das Arithmetische Mittel ist also normalverteilt mit σ/√n

Bem.: Zufallsvariable werden großgeschrieben, ihre Schätzwerte (Messwerte, Mittelwerte) klein. In der vorliegenden Broschüre werden sie näherungsweise oft gleichgesetzt.

Aufgabe nach Kapitel a:

Urliste der Meßwerte:

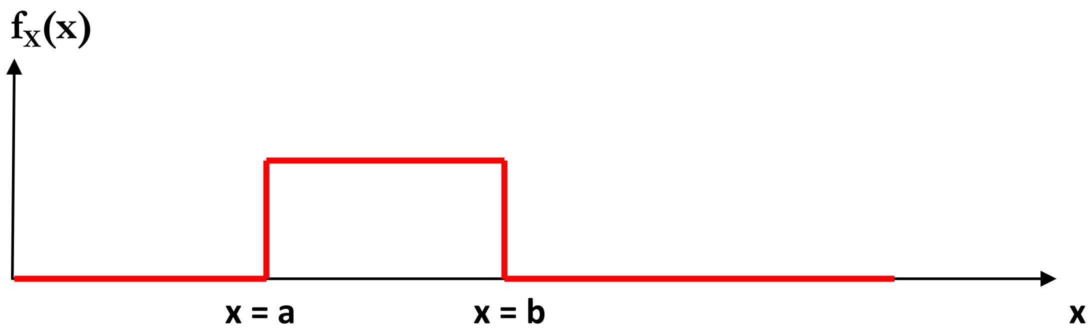
Länge x_i in mm	100,04	99,89	99,99	100,08	99,93	100,01	100,19	99,94	100,13	100,09
	99,83	100,07	100,02	100,09	99,99	100,03	100,14	99,93	100,04	99,97

Bestimmen Sie den Mittelwert , die Standardabweichung der Messwerte und die Streuung des arithmetischen Mittels. (100,02 mm; 0,0875 mm; 0,02 mm)

Wichtige Anwendung:
s /√n wird als sog. Standardunsicherheit nach DIN ENV 13005 bei Vielfachmessungen verwendet, dh. als Unsicherheit des als Ergebnis angegebenen arithmetischen Mittelwertes. (Kapitel c)

Rechteckverteilung:

Jede Lage von Messwerten x_i innerhalb eines bestimmten Bereiches soll gleich wahrscheinlich sein:



$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \quad fuer\ a \le x \le b \qquad (b6)$$
$$= 0\ sonst$$

Wegen der Normierungsbedingung (S.2 und 3) muß die Wahrscheinlichkeitsdichte f(x) im Bereich a bis b den Wert 1/(b-a) besitzen und null für alle übrigen x-Werte. Für den Erwartungswert von X = μ und den Erwartungswert von (X-μ)² = σ² = **Varianz** von X erhält man:

$$\mu = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{2}\left[x^2\right]_a^b = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2 = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{3}\left[(x-\mu)^3\right]_a^b =$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^3\right] = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2(b-a)^3}{8} = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

$$s = \sqrt{\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{12}}(b-a) = \frac{2(b-a)}{2\sqrt{12}} = \frac{\left((b-a)/2\right)}{\sqrt{3}} = \frac{\text{halbes Intervall}}{\sqrt{3}};$$

Wichtige Anwendung:
s ist die Standardunsicherheit (Kap. c) nach DIN, wenn zu vermuten ist, daß die Messwerte mit ihren Unsicherheiten gleichmäßig über ein Intervall verteilt sind , zB. bei Geräten mit einer Fehlergrenze.

Fehlergrenze nach DIN 1319-1: Es handelt sich hier um vereinbarte oder garantierte Höchstwerte für Abweichungen einer Messeinrichtung vom richtigen Wert, der wirklich gemessene Wert liegt irgendwo innerhalb des garantierten Intervalles.

Aufgaben:

- *Bei der Produktion von 100 gleichartigen Längenmeßgeräten wird die Messlänge 1 cm mit einem Endmaß von 1 cm Länge (wahrer Wert) verglichen. Man erhält eine Häufigkeitsverteilung für die Anzeige bei der wahren Länge 1 cm, die zwischen 0,999 cm und*
 1,001 cm gleichmäßig verteilt ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, Anzeigen im oberen Drittel des Intervalls 0,999 cm – 1,001 cm bei der Messung von 1 cm zu erhalten.
 (1/3)
- *Zeigen Sie, daß bei der Rechteckverteilung die Normierungsbedingung*

 $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

 erfüllt ist.

- *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Dreiecksverteilung unter Verwendung der Normierungsbedingung und die Standardabweichung.*
- *Der Hersteller einer Personenwaage garantiert, daß der tatsächliche Wert innerhalb des Intervalles [abgelesener Messwert x ± 100 g] liegt. Wie groß ist die Standardunsicherheit s_x? (100 g /√3)*

t-(Student[1] -) Verteilung (stetig)

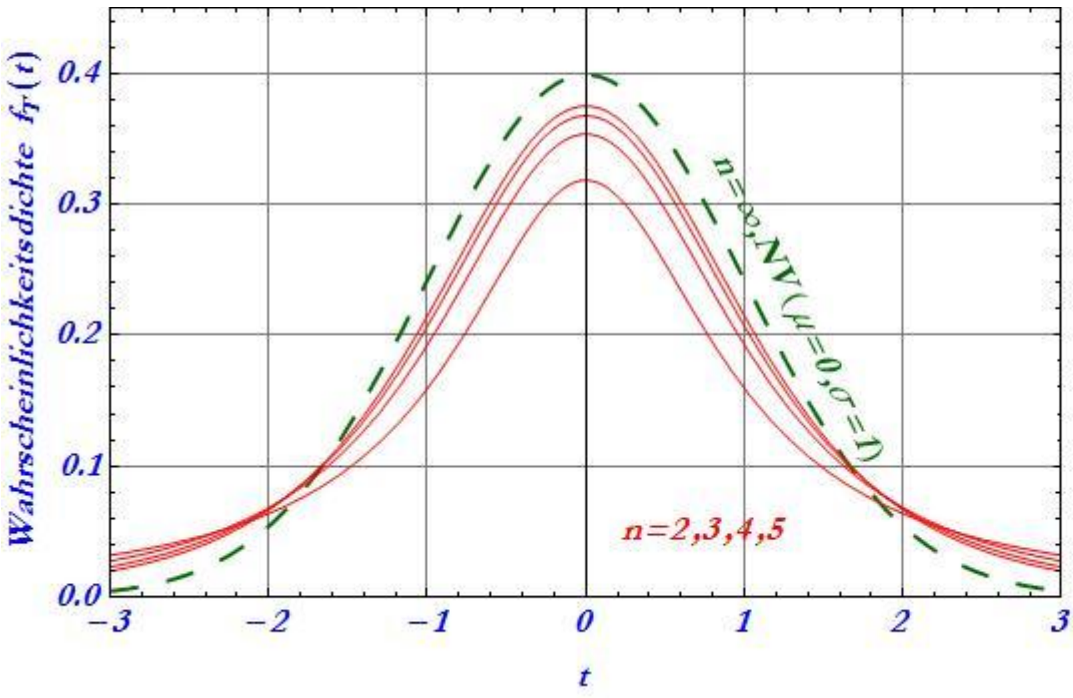
Dies ist die Verteilung der Zufallsvariablen

$$T^{(2} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \qquad (b7)$$

Mit S als empirischer Standardabweichung, μ als wahren Wert und $\bar{X}$ als arithmetischen Mittelwert der n Messungen, dh. Schätzwert von μ.

Für n $\rightarrow \infty$ geht die Verteilung in die Normalverteilung mit μ = 0 und

$\sigma = 1$ über.



Die Wahrscheinlichkeit, einen Wert von T im Intervall –t……+t zu erhalten ist

$$P(-t \le T \le t) = F_T(t) - F_T(-t) = (1-\alpha);\,(1-\alpha) = Vertrauensnivau^{(3} \qquad (b8)$$

$$F_T(t) = P(T \le t) = \int_{-\infty}^{t} f_T(t') \cdot dt' \,;\; f_T(t) = Wahrscheinlichkeitsdichte$$

(1 Wurde von W.S.Gosset unter dem Pseudonym „Student“ veröffentlicht.

(2 Zufallsvariable werden mit Großbuchstaben gekennzeichnet, ihre Schätzwerte (Messwerte, Mittelwerte) mit Kleinbuchstaben;

(3 auch Konfidenzkoeffizient

$F_T(t)$ ist die Verteilungsfunkion analog zu Φ in (b2). Die Ungleichung (b8) kann folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$-t \le \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - \mu}{S} \le +t \; \Big| \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$-t \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \le \bar{X} - \mu \le +t \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \; \Big| \cdot (-1)$$

$$t \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \ge \mu - \bar{X} \ge -t \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \; \Big| + \bar{X}$$

$$\bar{X} + t \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \ge \mu \ge \bar{X} - t \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Damit kann (b8) auch so geschrieben werden:

$$P\left(\bar{X} - t \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + t \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha = F_T(t) - F_T(-t) \qquad (b9)$$

Die Wahrscheinlichkeit $P = 1 - \alpha$ heißt **Konfidenzkoeffizient**, **Vertrauensniveau** oder **Konfidenzniveau**, α Irrtumswahrscheinlichkeit.

Ist von einer normalverteilten Größe der arithmetische Mittelwert $\bar{x}$ und die empirische Standardabweichung s bekannt, so gibt (b9) die Wahrscheinlichkeit $P = (1 - \alpha)$ an, den wahren Mittelwert μ im **Konfidenzintervall**

$$\left[\bar{x} - t_{P,n} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \,;\, \bar{x} + t_{P,n} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right] \; bzw. \;\; \mu = \bar{x} \pm t_{P,n} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \Big|_{P,n}$$

anzutreffen.

$P = F_T(t) - F_T(-t) = 1-\alpha$ ist als 68,26%, 90%, 99% , 99,5% und 99,73% als Tabelle unten angegeben; in Abhängigkeit von P und n entnimmt man daraus $t_{P,n}$. Die Verteilungsfunktion $F_T(t)$ und die Dichtefunktion $f_T(t)$ ist in Formelsammlungen und Software tabelliert oder kann nach den Formeln unten berechnet werden.

n	68,26%	90%	95%	99%	99,5%	99,73%
2	1,84	6,31	12,71	63,66	127,32	235,8
3	1,32	2,92	4,30	9,93	14,09	19,21
4	1,20	2,35	3,18	5,84	7,45	9,22
5	1,15	2,13	2,78	4,60	5,60	6,62
6	1,11	2,02	2,57	4,03	4,77	5,51
8	1,08	1,90	2,37	3,50	4,03	4,53
10	1,06	1,83	2,26	3,25	3,69	4,09
13	1,05	1,78	2,18	3,05	3,43	3,76
20	1,03	1,73	2,09	2,86	3,17	3,45
30	1,02	1,70	2,05	2,76	3,04	3,28
32	1,02	1,70	2,04	2,74	3,02	3,26
50	1,01	1,68	2,01	2,68	2,94	3,16
80	1,00	1,66	1,99	2,64	2,89	3,10
100	1,00	1,66	1,98	2,63	2,87	3,08
125	1,00	1,66	1,98	2,62	2,86	3,07
200	1,00	1,65	1,97	2,60	2,84	3,04
>200	1,00	1,65	1,96	2,58	2,81	3,00

$$f_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\cdot\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{(\nu+1)/2}}\;;\nu = n-1$$

$$F(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\cdot\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\int_{-\infty}^{t}\frac{dt'}{\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{(\nu+1)/2}}\;;\nu = Zahl\ der\ Freiheitsgrade$$

Beispiel anhand der Urliste der Messwerte Seite 8 unten (Teil 1) soll das 90% Konfidenzintervall angegeben werden. Dabei wird eine Länge zwanzigmal in mm gemessen :

100,04	99,89	99,99	100,08	99,93	100,01	100,19	99,94	100,13	100,09
99,83	100,07	100,02	100,09	99,99	100,03	100,14	99,93	100,04	99,97

$$\overline{x} = 100{,}02\,mm\,,\, s_x = \sqrt{\frac{1}{19}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - 100{,}02\,mm\right)^2} = 0{,}09\,mm$$

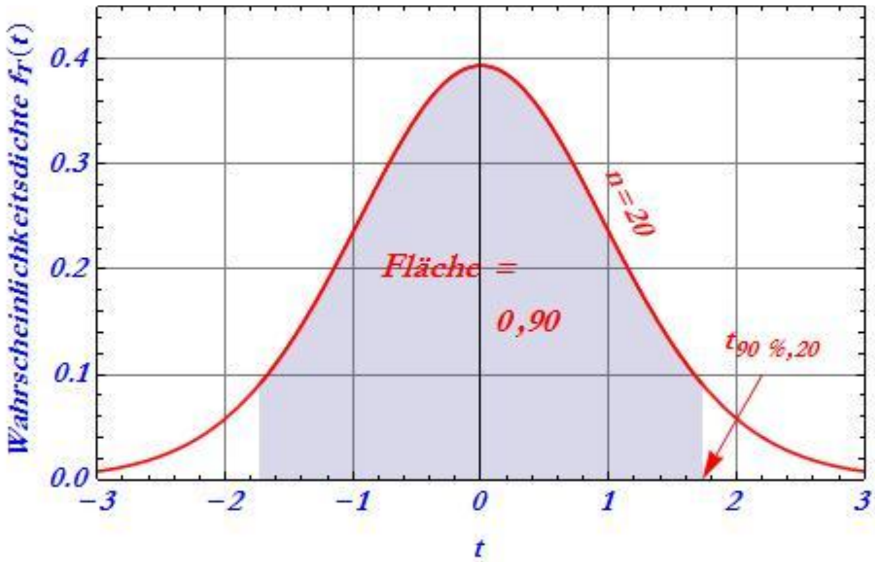
$$\frac{s_x}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}09\,mm}{\sqrt{20}};\textit{Vertrauensniveau}\,90\%\ \textit{und}\ \ n = 20 \rightarrow t = 1{,}73\ \textit{aus Tabelle}$$

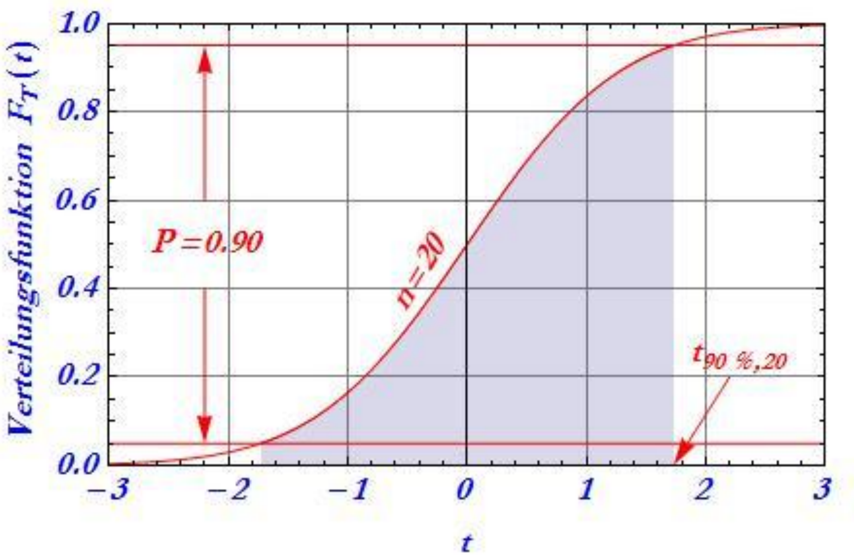
$$\frac{t}{\sqrt{n}}\cdot s_x = 0{,}035\,mm;\ \textit{fuer das}\ 90\% - \textit{Konfidenzintervall erhaelt man}$$

$$\left[\overline{x} - t_{P,n}\cdot\frac{s_x}{\sqrt{n}};\overline{x} + t_{P,n}\cdot\frac{s_x}{\sqrt{n}}\right] = \left[99{,}98\,mm;100{,}06\,mm\right]_{90\%,n=20}\ bzw.$$

$$\mu = \overline{x} \pm t\cdot\frac{s_x}{\sqrt{n}}\bigg|_{90\%,n=20} = \left(100{,}02 \pm 0{,}035\right)mm\big|_{90\%,n=20}$$

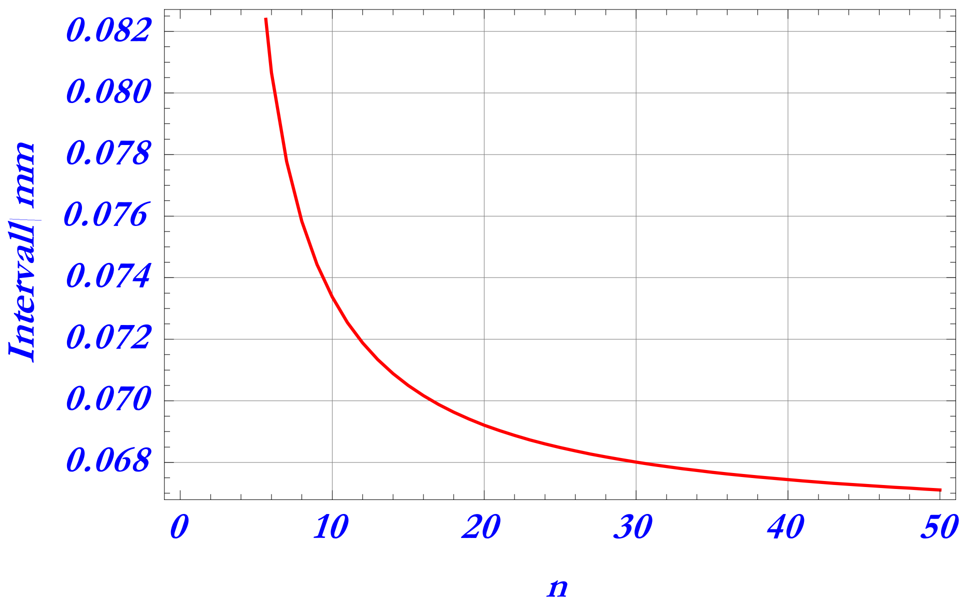
Bedeutung: in 90% aller Fälle dh. in 90 von 100 Fällen beinhaltet das angegebene Intervall den wahren Mittelwert μ. μ muß also nicht zwingend im Intervall enthalten sein.





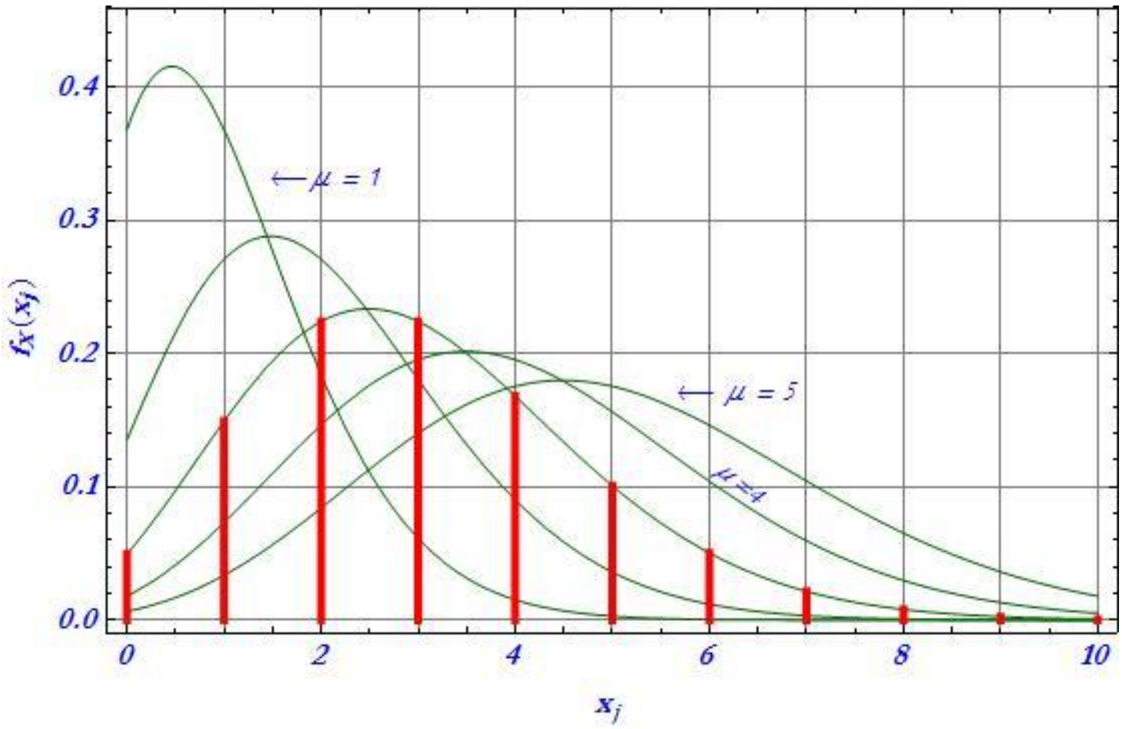
Wegen $F(t_{90\%,n=20}) - F(-t_{90\%,n=20}) = 0{,}90$ nach (b9) kann man aus der Verteilungsfunktion gemäß Abbildung direkt das $t_{90\%,n=20}$ entnehmen.

Die nächste Abbildung zeigt die Länge des Konfidenzintervalles in Abhängigkeit vom Stichprobenumfang n : je geringer n, desto größer muß das Konfidenzintervall gewählt werden, um den wahren Mittelwert μ mit 90% iger Wahrscheinlichkeit darin zu finden.



Poisson[1] - Verteilung (diskret)

Neben anderen wichtigen Anwendungen beschreibt sie in der Physik die Messung radioaktiver Strahlung mit einem Zählrohr.



Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $f_X(x_j)$ existiert nur an den diskreten Werten $x_1, x_2 \ldots x_n$. $f_X(x_j)$ ist die Wahrscheinlichkeit, einen Wert x_j zu erhalten. Für $\mu \geq 5$ nähert sich die Verteilung immer mehr der Normalverteilung (Zentraler Grenzwertsatz der Statistik). In der Abbildung sind die Hüllkurven gezeichnet, für μ=3 die tatsächlichen Wahrscheinlichkeitsfunktionen. (Nach DIN 1319 Teil 4 wird $f_X(x_j)$ Wahrscheinlichkeitsfunktion genannt)

$$f_X\left(x_j\right) = \frac{\mu^{x_j}}{x_j!} \cdot e^{-\mu} \qquad (b10)$$

[1] von S.D.Poisson 1837 eingeführt

Für den Erwartungswert = Mittelwert von X und die Varianz ergibt sich :

$$P\left(X = x_j\right) = f_X\left(x_j\right); \quad E\left(X\right) = \sum_j x_j f_X\left(x_j\right) = \mu$$

$$E\left(\left[X - \mu\right]^2\right) = \sum_j \left(x_j - \mu\right)^2 \cdot f_X\left(x_j\right) = \sigma^2 = \mu \qquad (b11)$$

$$\sigma_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{\mu}{n}} = \text{Standardabweichung des Mittelwertes}$$

$$\mu \sim \overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \left(x_1 + x_2 + ...x_n\right); \; s_{\overline{x}}^2 = \frac{\overline{x}}{n};$$

Bei praktischen Messungen ist $\overline{x}$ die Schätzfunktion für den Mittelwert μ der Grundgesamtheit, die empirische Standardabweichung s der Schätzwert für die Standardabweichung σ der Grundgesamtheit und s_x^2 der Schätzwert für die Varianz des Mittelwertes der Grundgesamtheit μ (s_x = Standardabweichung des arithmetischen Mittels, man erhält diese, weil bei jeder neuen Versuchsreihe andere Mittelwerte gemessen werden). Korrelationen werden in DIN1319 Teil 4 behandelt.

Beispiel:

In n=500 Beobachtungen werden x_j Impulse pro Zeitintervall mit einem Zählrohr erfaßt. μ=2,99; s= 1,73 ;

Urliste x_j	x_j geordnet	Häufigkeit H_j gemessen	$f_X(x_j) \cdot 500$, berechnet
$x_1=4$	0	20	25
$x_2=8$	1	80	75
$x_3=5$	2	110	112
	3	115	112
	4	85	84
	5	50	50
	6	25	25
	7	10	11
	8	4	4
.	9	1	1
.	10	0	0,4
$x_{500}=7$		500	