

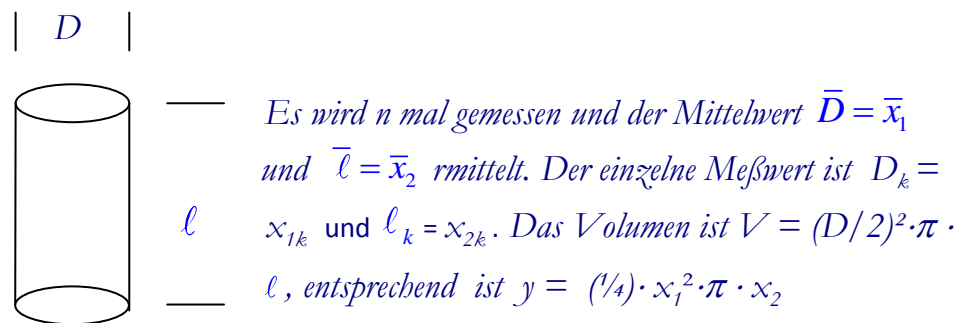
c.) Fortpflanzung von Unsicherheiten: (Teil 2)

(DIN V ENV 13005, 1999 – 06, DIN 1319 Teil 4, GUM)

Im Allgemeinen wird aus unsicherheitsbehafteten Eingangsgrößen x_1, x_2, \dots ein Ergebnis $y = y(x_1, x_2, \dots)$ berechnet. Es soll die Unsicherheit des Ergebnisses angegeben werden.

Zur Vereinfachung werden nur *zwei* direkte Eingangsgrößen x_1 und x_2 betrachtet.

Beispiel: Das Volumen eines Zylinders wird aus der Messung des Durchmessers D und der Höhe l bestimmt.



Die Unsicherheiten (= Abweichungen vom Mittelwert) sollen klein sein, so dass als Näherung für y eine Taylorentwicklung um die Mittelwerte mit Abbruch nach dem 1. Glied ausgeführt werden kann:

$$y_k = y(x_{1k}, x_{2k}) \approx \overbrace{y(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}^{\bar{y}} + \left. \frac{\partial y}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} \cdot (x_{1k} - \bar{x}_1) + \left. \frac{\partial y}{\partial x_2} \right|_{\bar{x}_2, \bar{x}_1} \cdot (x_{2k} - \bar{x}_2);$$

die partiellen Ableitungen werden am Punkt \bar{x}_1 bzw. \bar{x}_2 ausgeführt.

Obiges Beispiel: $\left. \frac{\partial y}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} = (1/2) \cdot \pi \cdot \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$

Die Standardabweichungen s_{x_1} und s_{x_2} der Verteilungen von x_1 und x_2 werden den Unsicherheiten der Eingangsgrößen x_1 und x_2 gleichgesetzt. Sie heißen **Standardunsicherheiten** der Eingangsgrößen (siehe S.9 und 10). Bei wiederholt gemessenen Größen sind dies nach(5) und S.9 die empirischen Standardabweichungen der arithmetischen Mittelwerte $s_{\bar{x}}$.

Die Standardabweichung s_y der Wahrscheinlichkeitsverteilung von y wird gleichgesetzt der Unsicherheit des Ergebnisses, der sog. „**Kombinierten Standardunsicherheit**“ (im GUM mit $u_c(y)$ bezeichnet). Bei Vielfachmessungen ist dies $s_{\bar{y}}$

Ziel ist die Angabe von realistischen Unsicherheiten, nicht von „Größtabweichungen“.

Obiges Beispiel: Es wird mit der Schieblehre gemessen, bei der eine Rechteckverteilung angenommen wird dh. $s_{x1} = 0,1 \text{ mm} / \sqrt{3}$ mit $0,1 \text{ mm}$ als halbem Intervall.

Es muß deshalb im folgenden die Standardabweichung s_y der Ergebnisgröße aus den Standardabweichungen s_{x1} und s_{x2} der Eingangsgrößen berechnet werden; die Ableitung erfolgt für Wiederholungsmessungen bei gleichem Probenumfang n der beiden Eingangsgrößen x_1 und x_2 .

$$s_y^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n \left[\left. \frac{\partial y}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} \cdot (x_{1k} - \bar{x}_1) + \left. \frac{\partial y}{\partial x_2} \right|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} \cdot (x_{2k} - \bar{x}_2) \right]^2 =$$

$$= \left(\left. \frac{\partial y}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} \right)^2 \cdot \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (x_{1k} - \bar{x}_1)^2 + \left(\left. \frac{\partial y}{\partial x_2} \right|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} \right)^2 \cdot \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (x_{2k} - \bar{x}_2)^2 +$$

$$+ 2 \cdot \left. \frac{\partial y}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} \cdot \left. \frac{\partial y}{\partial x_2} \right|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} \cdot \underbrace{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n [(x_{1k} - \bar{x}_1) \cdot (x_{2k} - \bar{x}_2)]}_{\text{Kovarianz} = s_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} = r_{x_1 x_2} \cdot s_{\bar{x}_1} \cdot s_{\bar{x}_2}}$$

mit Korrelationskoeffizient $r_{x_1 x_2} = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n [(x_{1k} - \bar{x}_1) \cdot (x_{2k} - \bar{x}_2)]}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_{1k} - \bar{x}_1)^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_{2k} - \bar{x}_2)^2}}$

$$= \frac{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n [(x_{1k} - \bar{x}_1) \cdot (x_{2k} - \bar{x}_2)]}{\sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (x_{1k} - \bar{x}_1)^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (x_{2k} - \bar{x}_2)^2}} = \frac{s_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}}{s_{\bar{x}_1} \cdot s_{\bar{x}_2}}$$

u. emp. Kovarianz der Mittelwerte = $\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n [(x_{1k} - \bar{x}_1) \cdot (x_{2k} - \bar{x}_2)] = s_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}$

Ergebnis:

$$s_y^2 = \left(\left. \frac{\partial y}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}_1} \right)^2 \cdot s_{x_1}^2 + \left(\left. \frac{\partial y}{\partial x_2} \right|_{\bar{x}_2} \right)^2 \cdot s_{x_2}^2 + 2 \cdot \left. \frac{\partial y}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}_1} \cdot \left. \frac{\partial y}{\partial x_2} \right|_{\bar{x}_2} \cdot \underbrace{r_{x_1 x_2} \cdot s_{x_1} \cdot s_{x_2}}_{\text{Kovarianz } s_{x_1 x_2}} \quad (\mathbf{c1})$$

Dies ist das Gesetz der **Fortpflanzung von Unsicherheiten**⁴. Sind x_1 und x_2 unabhängig, ist $x_{1k} - \bar{x}_1$ in den Summen genauso oft positiv wie negativ, sodass für $n \rightarrow \infty$ die empirische Kovarianz $s_{x_1x_2}$ und der Korrelationskoeffizient r gegen 0 geht und die rechte Seite von c1 null wird. Damit erhält man bei nicht korrelierten Eingangsgrößen ($r_{x_1x_2} = 0$) **das Gauß'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz**.

Mit $r = 0$ erhält man für Potenzprodukte aus c1 die vereinfachte Gleichung:

$$y = \text{const} \cdot x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \dots$$

$$\frac{s_y}{y} = \sqrt{\left(m_1 \cdot \frac{s_{x_1}}{x_1}\right)^2 + \left(m_2 \cdot \frac{s_{x_2}}{x_2}\right)^2 + \dots} \quad (c2)$$

Es gilt die Schwarz'sche Ungleichung

$$|s_{x_1x_2}| \leq s_{x_1} \cdot s_{x_2} \text{ daher } s_y^2 \leq \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \cdot s_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \cdot s_{x_2}^2 + 2 \cdot \left|\frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_2}\right| \cdot s_{x_1} \cdot s_{x_2} =$$

$$\left[\left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right| \cdot s_{x_1} + \left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\right| \cdot s_{x_2} \right]^2 ;$$

Die folgende Gleichung liefert deshalb die obere Grenze der Standardunsicherheit s_y von y , gleichgültig, ob die Abweichungen von x_1 und x_2 unabhängig oder normalverteilt sind oder nicht

$$s_y \leq \Delta s_y = \left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right| \cdot s_{x_1} + \left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\right| \cdot s_{x_2} + \dots \quad (c3)$$

Die Absolutstriche sind notwendig, da die Ableitungen negativ werden können.

Setzt man in die Gleichung die oberen Grenzen Δx_1 und Δx_2 der Abweichungen von x_1 und x_2 ein, erhält man die obere Grenze der Unsicherheit von y , die keinesfalls überschritten wird \rightarrow Größtunsicherheit:

⁴ Es zeigt, wie die Unsicherheiten der Eingangsgrößen x_1 und x_2 , gleichgesetzt den Standardabweichungen von x_1 und x_2 (bei Wiederholungsmessungen gleichgesetzt den Standardabweichungen der Mittelwerte von x_1 und x_2), die Unsicherheit der Ausgangsgröße y ergeben, die der Standardabweichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung von y gleichgesetzt wird.

$$\Delta y = \left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \right| \cdot \Delta x_1 + \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \right| \cdot \Delta x_2 + \dots \quad (c4)$$

$$\Delta y \geq \Delta s_y \geq s_z$$

= Vollständiges Differential. Für Potenzprodukte ergibt sich ::

$$y = \text{const} \cdot x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot x_3^{m_3} \dots$$

$$\frac{\Delta y}{y} = \left| m_1 \frac{\Delta x_1}{x_1} \right| + \left| m_2 \frac{\Delta x_2}{x_2} \right| + \left| m_3 \frac{\Delta x_3}{x_3} \right| + \dots \quad (c5)$$

Dies entspricht der üblichen Berechnung der Fortpflanzung systematischer Unsicherheiten.

Obiges Beispiel: Die Messung mit einer nicht-digitalen Schieblehre soll die max. Unsicherheit = 0,2 mm haben. Für Meßwerte $\bar{D} = 15,2 \text{ mm}$ und $\bar{\ell} = 51,5 \text{ mm}$ und $s_{x1} = s_{x2} = 0,1 \text{ mm} / \sqrt{3}$ wegen Rechteckverteilung (Seite 10) und einem Korrelationsfaktor von $r = 0,8$ (es wird mit derselben Schieblehre der Durchmesser und die Höhe des Zylinders bestimmt, dadurch entstehen korrelierte Messwerte, siehe auch [1]) ergibt sich:

$$y = \frac{1}{4} \cdot x_1^2 \cdot x_2 \cdot \pi; \quad \left. \frac{\partial y}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}_1} = \frac{1}{2} \cdot \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \pi; \quad \left. \frac{\partial y}{\partial x_2} \right|_{\bar{x}_2} = \frac{1}{4} \cdot \bar{x}_1^2 \cdot \pi;$$

$$s_y = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \pi \cdot \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \right)^2 \cdot s_{x1}^2 + \left(\frac{1}{4} \pi \cdot \bar{x}_1^2 \right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \pi \cdot \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \frac{1}{4} \pi \cdot \bar{x}_1^2 \cdot 0,8 \cdot s_{x1} \cdot s_{x2}}$$

$$= 0,0796 \text{ cm}^3; \quad \bar{y} = \frac{1}{4} \cdot \bar{x}_1^2 \cdot \pi \cdot \bar{x}_2 = 9,35 \text{ cm}^3; \quad V_{(c1)} = (9,35 \pm 0,08) \text{ cm}^3$$

$$\frac{\Delta y}{y} = \left| 2 \cdot \frac{0,1 \text{ mm}}{15,2 \text{ mm}} \right| + \left| \frac{0,1 \text{ mm}}{51,5 \text{ mm}} \right| = 0,015; \quad V_{(c5)} = (9,35 \pm 0,14) \text{ cm}^3$$

$$\frac{\Delta s_y}{y} = \left| 2 \cdot \frac{0,1 \text{ mm} / \sqrt{3}}{15,2 \text{ mm}} \right| + \left| \frac{0,1 \text{ mm} / \sqrt{3}}{51,5 \text{ mm}} \right| = 0,0087; \quad V_{(c3)} = (9,35 \pm 0,082) \text{ cm}^3$$

Aufgaben:

- Zeigen Sie, daß beim Beispiel der Vorderseite auch für $r = 1$ die kombinierte Standardunsicherheit gemäß der Schwarz'schen Ungleichung Δs_y nicht übersteigt.
- Wie lautet die Gleichung c1 für drei Eingangsgrößen x_1, x_2, x_3 ?
- Mit einem Digitalmultimeter der Auflösung $0,1 \text{ mV}$ (Schritt der letzten Stelle = $0,1 \text{ mV}$) für die Spannungsmessung und der Auflösung $0,01 \text{ mA}$ für die Strommessung wird ein Widerstand durch Strom- und Spannungsmessung gemäß $R = U/I$ bestimmt. Geben Sie die relative kombinierte Standardunsicherheit der Widerstandsbestimmung und die obere Grenze der relativen Unsicherheit bzw. Standardunsicherheit mit jeweiligem Meßergebnis an. $U = 60 \text{ mV}$; $I = 0,5 \text{ mA}$; $r = 0$; Rechteckverteilung; Schritt der letzten Stelle = ganzes Intervall, keine sonstigen Geräteunsicherheiten.
- Es wurden zwei unkorrelierte Meßgrößen $x_1 = (99,2 \pm 5,6)$ und $x_2 = (77,2 \pm 5,4)$ mit ihren jeweiligen Standardunsicherheiten gemessen. Bestimmen Sie die Ergebnisse y und die kombinierten Standardunsicherheiten s_y (Formel), wenn $y = x_1 + x_2$, $y = x_1 - x_2$, $y = x_1 \cdot x_2$, $y = \sqrt{x_1 / x_2}$ und $y = \ln x_1$ ist.

Matrizen:

Die Formel c1 wird rasch unübersichtlich, wenn mehr als zwei Eingangsgrößen vorhanden sind. s_y^2 läßt sich bei zB. 4 Eingangsgrößen so schreiben:

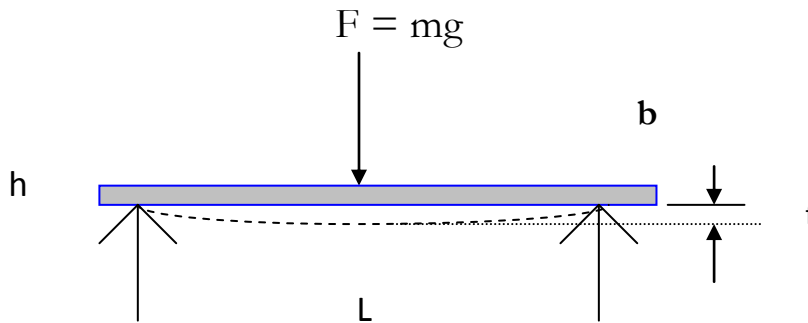
$$s_y^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} s_{x_1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} s_{x_2} \\ \frac{\partial y}{\partial x_3} s_{x_3} \\ \frac{\partial y}{\partial x_4} s_{x_4} \end{vmatrix}^T \begin{vmatrix} 1 & r_{x_1 x_2} & r_{x_1 x_3} & r_{x_1 x_4} \\ r_{x_2 x_1} & 1 & r_{x_2 x_3} & r_{x_2 x_4} \\ r_{x_3 x_1} & r_{x_3 x_2} & 1 & r_{x_3 x_4} \\ r_{x_4 x_1} & r_{x_4 x_2} & r_{x_4 x_3} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} s_{x_1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} s_{x_2} \\ \frac{\partial y}{\partial x_3} s_{x_3} \\ \frac{\partial y}{\partial x_4} s_{x_4} \end{vmatrix}$$

oder allgemein

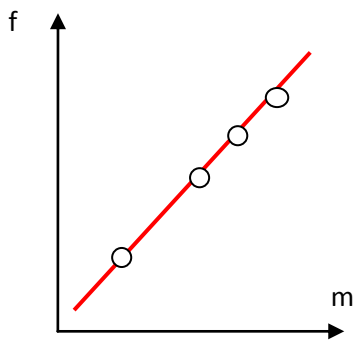
$$s_y^2 = \vec{S}_x^T \mathcal{R} \vec{S}_x$$

Die Glieder der Korrelationsmatrix stellen die Korrelationskoeffizienten zwischen den einzelnen Meßgrößen dar.

Beispiel: Bestimmung des E-Moduls aus der Durchbiegung eines Balkens (Physik-Praktikum E-Modul):



$$E_{\text{Blech}} = \frac{g}{4} \cdot \frac{L^3}{b \cdot h^3} \cdot \frac{1}{a}; a = \text{Steigung der Ausgleichsgerade } f - m$$



$$s_E^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial E}{\partial L} s_L \\ \frac{\partial E}{\partial b} s_b \\ \frac{\partial E}{\partial h} s_h \\ \frac{\partial E}{\partial a} s_a \end{pmatrix}^T \begin{vmatrix} 1 & r_{Lb} & r_{Lh} & r_{La} \\ r_{bL} & 1 & r_{bh} & r_{ba} \\ r_{hL} & r_{hb} & 1 & r_{ha} \\ r_{aL} & r_{ab} & r_{ah} & 1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial E}{\partial L} s_L \\ \frac{\partial E}{\partial b} s_b \\ \frac{\partial E}{\partial h} s_h \\ \frac{\partial E}{\partial a} s_a \end{pmatrix}$$

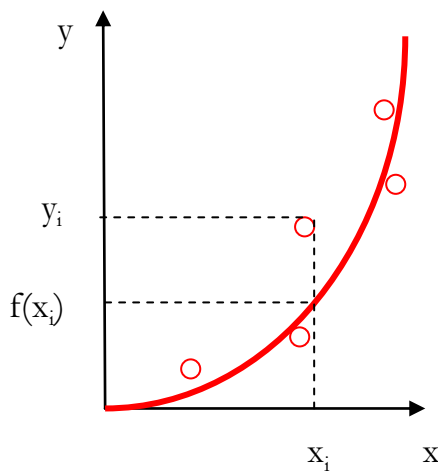
Der Korrelationskoeffizient zwischen Höhen- und Breitenmessung mit der Schieblehre ist $r = 0,8$ [1]. Alle anderen Korrelationskoeffizienten sind null.

$$s_E^2 = \begin{pmatrix} \frac{3gL^2}{4abh^3} s_L \\ -gL^3 \\ \frac{4ab^2h^3}{4abh^4} s_b \\ -gL^3 \\ \frac{4a^2bh^3}{4a^2bh^3} s_a \end{pmatrix}^T \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3gL^2}{4abh^3} s_L \\ -gL^3 \\ \frac{4ab^2h^3}{4abh^4} s_b \\ -gL^3 \\ \frac{4a^2bh^3}{4a^2bh^3} s_a \end{pmatrix}$$

Anm. zu c1: Die Standardabweichung des Ergebnisses wurde stillschweigend nach der Formel b4 für die Normalverteilung berechnet, was bei nicht normalverteilten x_1 und x_2 nicht stimmt. Abhilfe schafft der Zentrale Grenzwertsatz: **Auch wenn x_1 und x_2 nicht normalverteilt sind, läßt sich die resultierende Verteilung für y durch eine Normalverteilung annähern !**

d.) Ausgleichung:

Bei vielen Messungen entstehen Meßwertpaare x_i und y_i . Man trägt die Meßwertpaare graphisch auf und soll nun eine möglichst optimale Kurve durchlegen, wobei in den meisten Fällen bekannt ist, welche mathematische Funktion die Meßwerte beschreibt.



Die Anpassung erfolgt nach dem Gauß'schen Prinzip der kleinsten Quadrate:

Die Kurve ist so zu legen, dass die Summe aller vertikalen Abstandsquadrate der Punkte zur Kurve ein Minimum wird.

Dabei wird vorausgesetzt, dass die x_i -Werte fehlerfrei sind und sich die Streuung um die Funktion $f(x)$ nur durch Unsicherheiten von y_i ergibt.

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i)]^2 = \Phi = \text{Minimal}$$

$f(x)$ ist abhängig von Parametern a_1, a_2, a_3, \dots die partiellen Ableitungen von Φ nach diesen Parametern werden null gesetzt (=Bedingung für ein Minimum von Φ), daraus ergeben sich die sog. **Normalgleichungen**, deren Lösungen die optimalen Parameter a_1, a_2, a_3, \dots liefern.

Beispiel: Messung einer gleichförmig beschleunigten Bewegung $s = v \cdot t + 1/2 \cdot at^2$;

Ansatz: $y = f(x) = a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$;

Meßwerte: $x_i = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $y_i = \{4, 21, 35, 55, 90\}$;

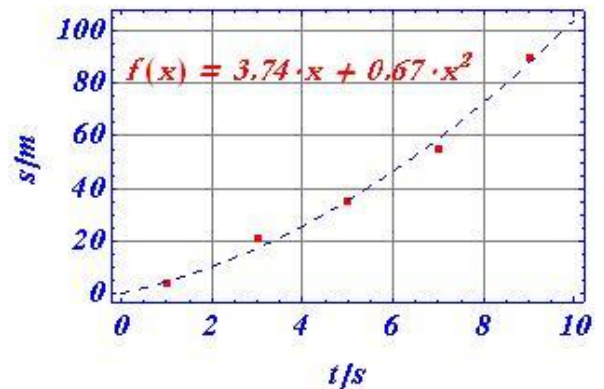
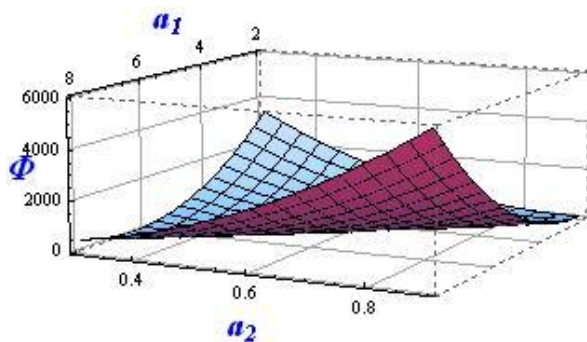
$v_i = \{y_i - f(x_i)\} = \{4 - a_1 - a_2, 21 - 3 \cdot a_1 - 9 \cdot a_2, 35 - 5 \cdot a_1 - 25 \cdot a_2, \dots\}$

$v_i^2 = \{(4 - a_1 - a_2)^2, (21 - 3 \cdot a_1 - 9 \cdot a_2)^2, (35 - 5 \cdot a_1 - 25 \cdot a_2)^2, \dots\}$

$\Phi = \{(4 - a_1 - a_2)^2 + (21 - 3 \cdot a_1 - 9 \cdot a_2)^2 + (35 - 5 \cdot a_1 - 25 \cdot a_2)^2 + \dots\}$

$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = -2874 + 330 \cdot a_1 + 2450 \cdot a_2 = 0$; $\frac{\partial \Phi}{\partial a_2} = -22106 + 2450 \cdot a_1 + 19338 \cdot a_2 = 0$;

$\rightarrow a_1 = 3,74$; $a_2 = 0,67$; $\Phi_{\min} = 34,8$;



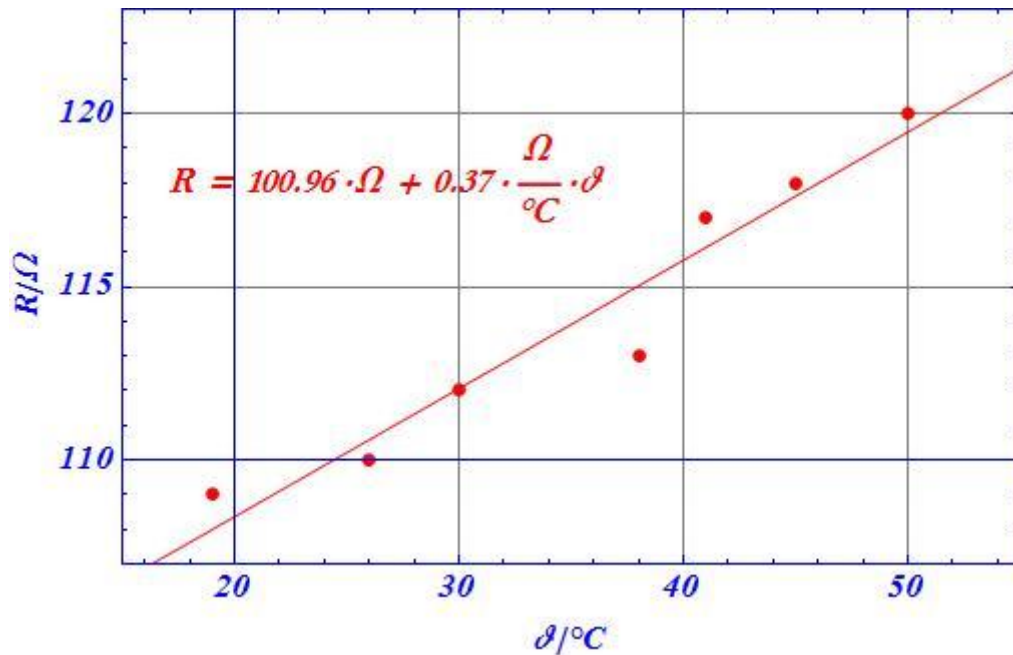
Bei $a_1 \approx 3,74$ und $a_2 = 0,67$ befindet sich das Minimum von Φ .

Aufgabe: Bei verschiedenen Temperaturen wird der el. Widerstand bestimmt.

Meßwerte: $\{x = 19, 26, 30, 38, 41, 45, 50 = \text{Temperatur in } ^\circ\text{C}\}$

$\{y = 109, 110, 112, 113, 117, 118, 120 = \text{Widerstand in } \Omega\}$

Bestimmen Sie die Ausgleichsgerade.



In den meisten Fällen ist die Steigung b einer Ausgleichgeraden mit Steigungsunsicherheit s_b und der Achsenabschnitt a mit Standardunsicherheit s_a gesucht. Die dazu nötigen Formeln lauten:

$$y = a + b \cdot x; \text{ Ordinatenabschnitt } a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$\text{Steigung } b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2}; s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_i (y_i - \bar{y})^2} = \text{Standardabweichung};$$

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \text{Kovarianz}; r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \text{Korrelationskoeffizient}$$

Die Anwendung der Gauß'schen Fortpflanzung (c1) ohne Korrelation auf b und a (wobei nur die y -Werte als unsicher angenommen werden, nicht die x -Werte) liefert die Unsicherheiten der Parameter a und b

$$s_b = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}} \cdot \frac{s_y}{s_x}; s_a = \sqrt{\frac{(n-1)s_x^2 + n \cdot \bar{x}^2}{n}} \cdot s_b$$

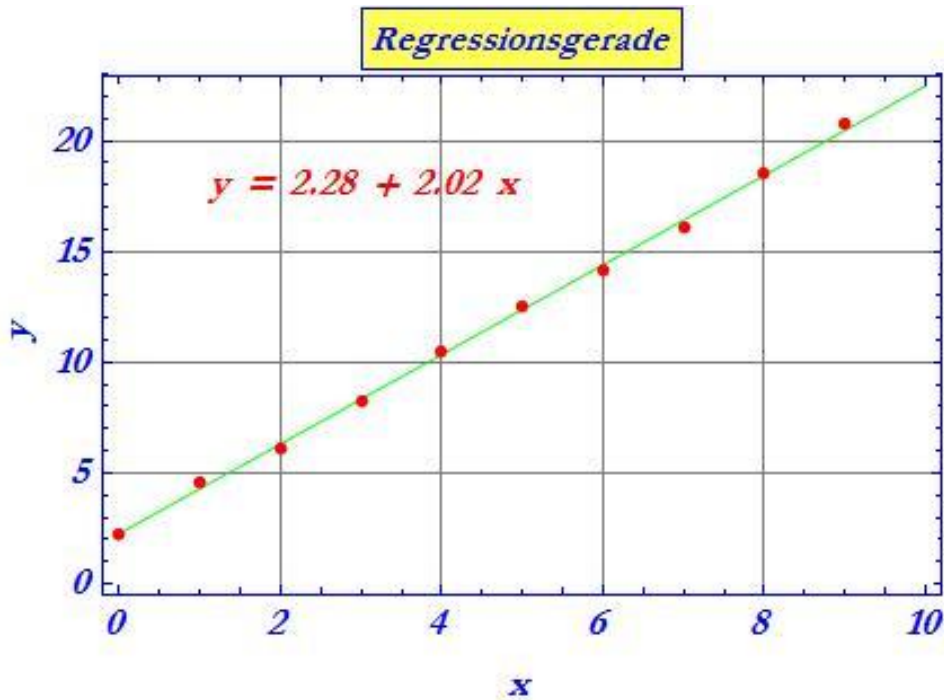
Lösung Aufgabe oben: $s_\theta = 11^\circ\text{C}$; $s_R = 4,2 \Omega$; $s_{R\theta} = 45^\circ\text{C} \Omega$; $b = 0,37 \Omega/^\circ\text{C}$; $a = 100,96 \Omega$; $r = 0,97$; $s_b = 0,042 \Omega/^\circ\text{C}$; $s_a = 1,58 \Omega$;

Aufgabe:

Es wurden folgende x - y -Wertepaare gemessen:

$\{0,00/2,25\}, \{1,00/4,55\}, \{2,00/6,12\}, \{3,00/8,28\}, \{4,00/10,54\}, \{5,00/12,54\},$
 $\{6,00/14,19\}, \{7,00/16,07\}, \{8,00/18,49\}, \{9,00/20,73\};$

Bestimmen Sie die Steigung b und den Achsenabschnitt a der Ausgleichsgerade mit den Standardunsicherheiten s_a und s_b . ($s_b = 0,025$; $s_a = 0,132$)



e.) Konfidenzintervalle:

Ähnlich, wie man mithilfe der Student-Verteilung (S.11) Konfidenzintervalle für Mittelwerte angeben kann, lassen sich **Konfidenzbereiche** für Regressionsgeraden angeben, siehe dazu zB. Erwin Kreyszig, „Statistische Methoden und ihre Anwendung“, VandenHoeck&Ruprecht [5] bzw. Softwareprogramme zB. Mathematica.

Unter der Voraussetzung, dass die vertikalen Abstände der y_i – Werte zur Ausgleichsgerade bei vielen Wiederholungen normalverteilt um einen Mittelwert $\mu(x)$ (repräsentiert durch die Regressionsgerade und selbst normalverteilt) sind und die x_i – Werte als Werte ohne Unsicherheit gelten können, ergeben sich hyperbelartige Bereiche für die Konfidenzintervalle des geschätzten Mittelwertes $\mu(x)$ von y (blau in den Abbildungen) bzw. für die Konfidenzintervalle

der prognostizierten, unabhängigen Einzel-Beobachtungen y_i (grün in den Abbildungen) :

$$\Delta y(x) = \pm t_{p,n} \cdot h \cdot s_{yx}; h_{\mu} = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}; h_y = \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}};$$

$h = h_{\mu}$ bzw. h_y ;

$$s_{yx} = \sqrt{\frac{1}{n-2} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - a - b \cdot x_i)^2} = \text{ sog. Reststandardabweichung}$$

$$\Phi = (n-1) \cdot (s_y^2 - b^2 \cdot s_x^2);$$

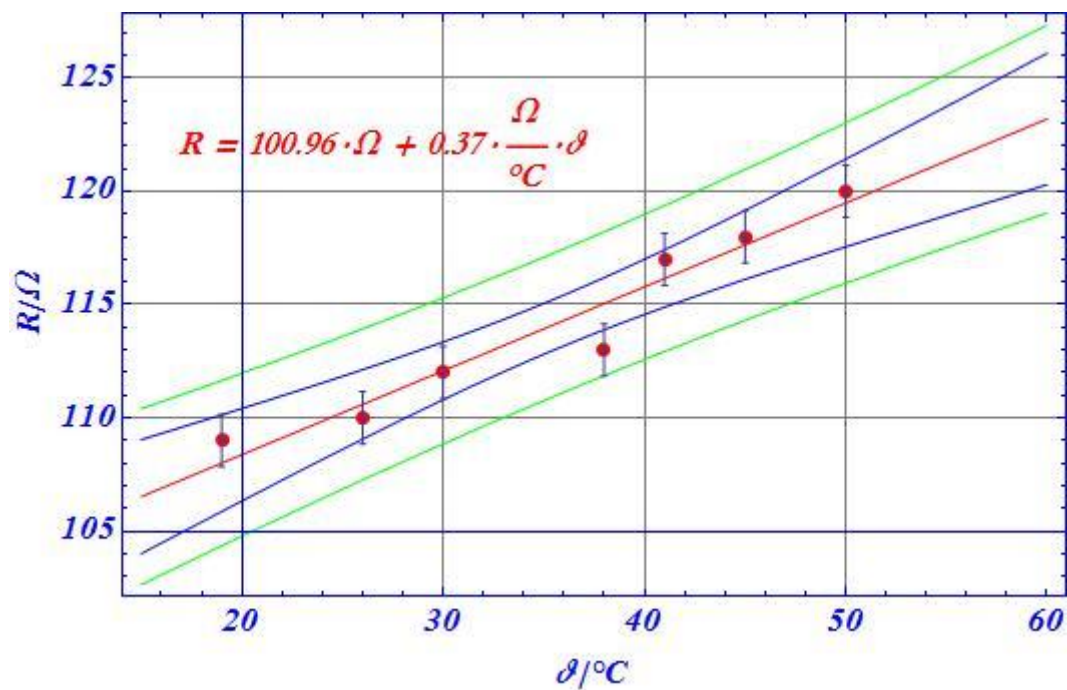
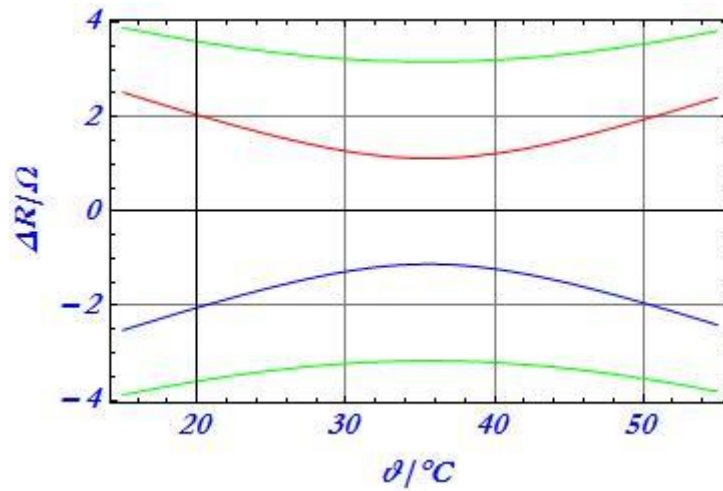
$$b = \frac{s_{xy}}{s_x^2}; \text{ Ausgleichsgerade} \rightarrow y = b(x - \bar{x}) + \bar{y};$$

n	60%	80%	90%	95%	99%	99,9%
3	1,38	3,08	6,31	12,7	63,66	636,62
4	1,06	1,89	2,92	4,30	9,92	31,60
5	0,98	1,64	2,35	3,18	5,84	12,92
6	0,94	1,53	2,13	2,78	4,60	8,61
7	0,92	1,48	2,02	2,57	4,03	6,87
8	0,91	1,44	1,94	2,45	3,71	5,96
9	0,90	1,42	1,90	2,37	3,50	5,41
10	0,89	1,40	1,86	2,31	3,36	5,04
15	0,87	1,35	1,77	2,16	3,01	4,22
20	0,86	1,33	1,73	2,10	2,88	3,92
30	0,86	1,31	1,70	2,05	2,76	3,67
∞	0,84	1,28	1,65	1,96	2,58	3,29

$t_{p,n}$ wird aus der Tabelle entnommen, zB $\cdot t_{95\%, n=7} = 2,57$

Die Tabelle S.13 kann als Ergänzung dienen, wenn man berücksichtigt, dass die Zahl der Freiheitsgrade beim Konfidenzintervall für den Mittelwert $\nu = n - 1$ und beim Konfidenzintervall für die Regressionsgerade $\nu = n - 2$ ist. (2 Parameter a und b) Die Zeilen für gleiche ν -Werte sind bei gleichen Wahrscheinlichkeitswerten P identisch zB. Zeile $n = 4 = \nu + 1 \rightarrow \nu = 3$ S. 13 und Zeile $n = 5 = \nu + 2 \rightarrow \nu = 3$ S. 28 sind gleich bei gleichen P - Werten.

Mit der Stichprobe von Aufgabe S.25 und einem gewählten 95%- Konfidenzintervall ergibt sich :



$$\Delta R_{\mu}(\vartheta) = \sqrt{1,25 \cdot \Omega^2 + 0,012 \cdot \frac{\Omega^2}{^{\circ}\text{C}^2} \cdot (\vartheta - 35,57 \cdot ^{\circ}\text{C})^2}$$

$$\Delta R(\vartheta) = \sqrt{10,02 \cdot \Omega^2 + 0,012 \cdot \frac{\Omega^2}{^{\circ}\text{C}^2} \cdot (\vartheta - 35,57 \cdot ^{\circ}\text{C})^2}$$

$\vartheta_{\min} = 35,57 \text{ }^{\circ}\text{C} = \bar{\vartheta} = \text{arithmetisches Mittel der Temperaturwerte.}$

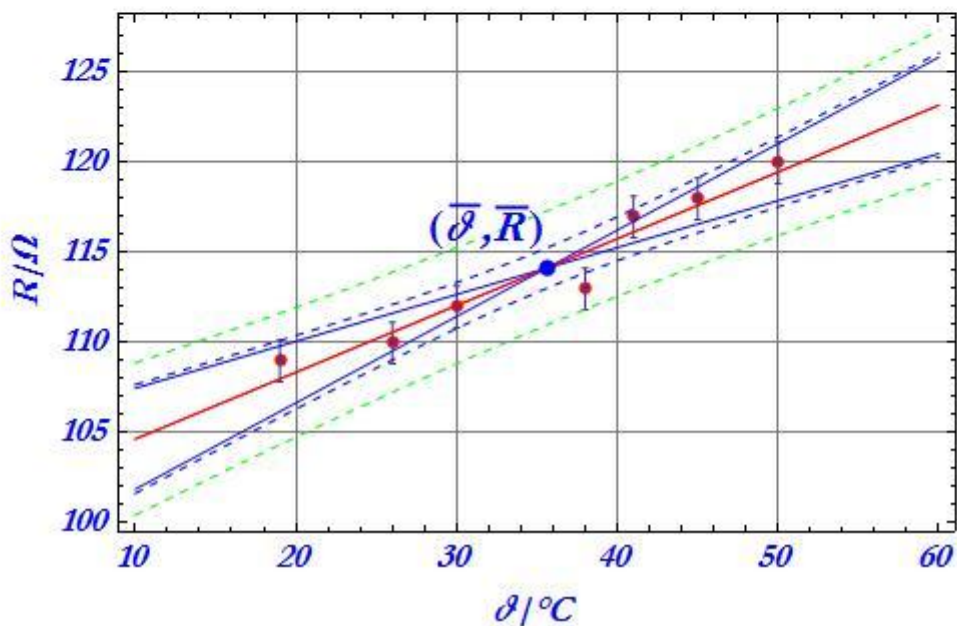
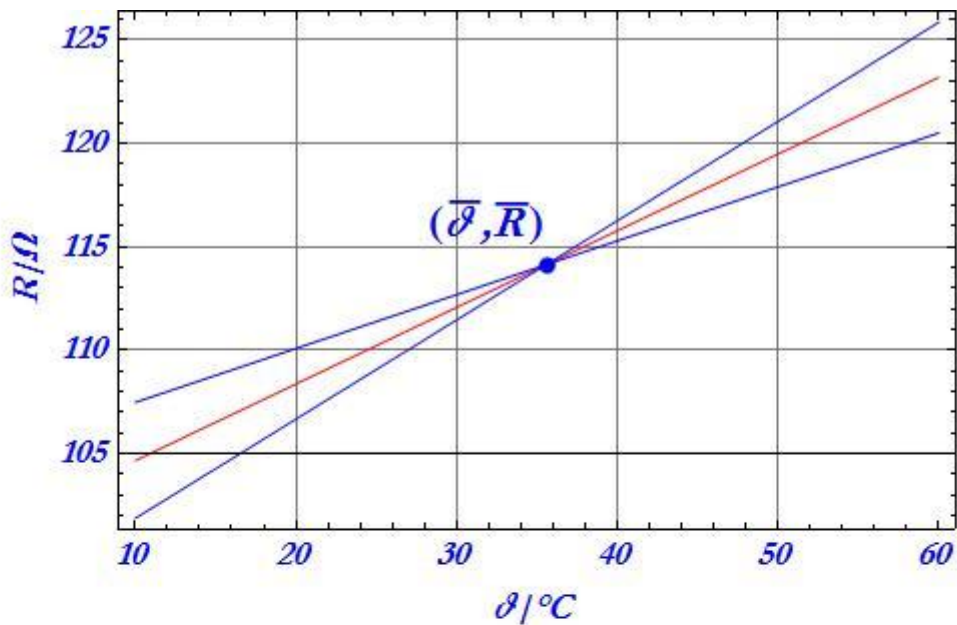
Die Konfidenzintervalle für den **Regressionskoeffizienten b** (Steigungsmaß) ergeben sich nach

$$\Delta b = \pm t_{P,n} \cdot s_{yx} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \left[\frac{\Omega}{^\circ\text{C}} \right]$$

Die Formeln werden in [5] bewiesen. Für $t = 1$ sind Δb und s_b gleich.

Im vorliegenden Beispiel erhält man für $P = 95\%$ und $n = 7$

$$\Delta b = 0,11 \text{ } \Omega/^\circ\text{C}$$



mit den beiden Geraden

$$R_1(\vartheta) = 97,08\Omega + 0,48 \frac{\Omega}{^\circ\text{C}} \cdot \vartheta$$

$$\text{bzw. } R_2(\vartheta) = 104,88\Omega + 0,26 \frac{\Omega}{^\circ\text{C}} \cdot \vartheta$$

$$\Phi = 6,637\Omega^2$$

Die Fehlerbalken ergeben sich nach der Formel S. 28

$$s_{yx} = \sqrt{\frac{1}{n-2} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - a - b \cdot x_i)^2} = 1,15\Omega$$

das ist die empirische Standardabweichung der vertikalen Abstände der y-Werte von der Regressionsgeraden (sog. Reststandardabweichung)

und ein Maß für deren Einzelwert-Unsicherheit bei $\nu = n - 2$ Freiheitsgraden (2 Parameter a und b).

Voraussetzung ist immer neben der Normalverteilung die vorherige Korrektur um systematische Beiträge.

f.) Fortpflanzung von Verteilungen (GUM S1) :

In dem 2008 vorgestellten Supplement 1 zum GUM („Guide to the expression of uncertainty in measurement“) wird eine Monte Carlo Methode (MCM) zur Bestimmung der Fortpflanzung von Messunsicherheiten angewendet. Anstatt die Fortpflanzung von Standardunsicherheiten (Kapitel c) anhand einer Taylorentwicklung zu verfolgen, wird hier die Fortpflanzung der Wahrscheinlichkeitsdichten $f(x)$ (Seite 2) der Eingangsgrößen angegeben und daraus die Standardunsicherheit s_y und das 95%-Konfidenzintervall der Ergebnisgröße bestimmt. Dabei werden die Wahrscheinlichkeitsdichten der Eingangsgrößen aus den Schätzwerten der jeweiligen Erwartungswerte $\mu =$ Mittelwerte x_1, x_2, \dots und den jeweiligen Schätzwerten für die Erwartungswerte der Standardabweichungen $\sigma =$ empirische Standardabweichungen s_1, s_2, \dots numerisch mit Zufallsgeneratoren (Mathematik-Software) erzeugt. Diese bilden zB. normalverteilte oder rechteckverteilte Zufallszahlen, die dann gemäß dem „Modell“ der Messung $y = f(x_1, x_2, \dots)$ zur Wahrscheinlichkeitsdichte $f(y)$ der Ergebnisgröße kombiniert werden. Korrelationen werden durch Bildung der Cholesky-Zerlegung (siehe Beispiel unten) berücksichtigt. Die Methode soll anhand eines Beispiels und der Behandlung der Aufgabe S. 21 gezeigt werden, dabei sollen der Einfachheit halber nur der Fall mit zwei Eingangsgrößen x_1 und x_2 betrachtet werden, eine Erweiterung und kompliziertere Fälle sind in GUM S1 beschrieben. Der Vorteil der MCM-Methode liegt unter anderem auch darin, dass 95%-Konfidenzintervalle für jede Verteilung und auch für nichtlineare Modelle angegeben werden können, nach der Fortpflanzung von Unsicherheiten gemäß Kapitel c ist dies nur bei normalverteilten und ganz speziellen Modellen möglich.

Beispiel:

Der Zusammenhang zwischen Eingangsgrößen und Ergebnis, das Modell, sei

$Y = X_1^2 + \sqrt{X_2}$, daraus ergibt sich für die Schätzwerte $\bar{y} = \bar{x}_1^2 + \sqrt{\bar{x}_2}$, \bar{x}_1 und \bar{x}_2 sind die Mittelwerte einer gemessenen Stichprobe einer normalverteilten Grundgesamtheit. Zum Vergleich von MCM und Fortpflanzung nach Kapitel c wird s_y nach c1 S.19 berechnet:

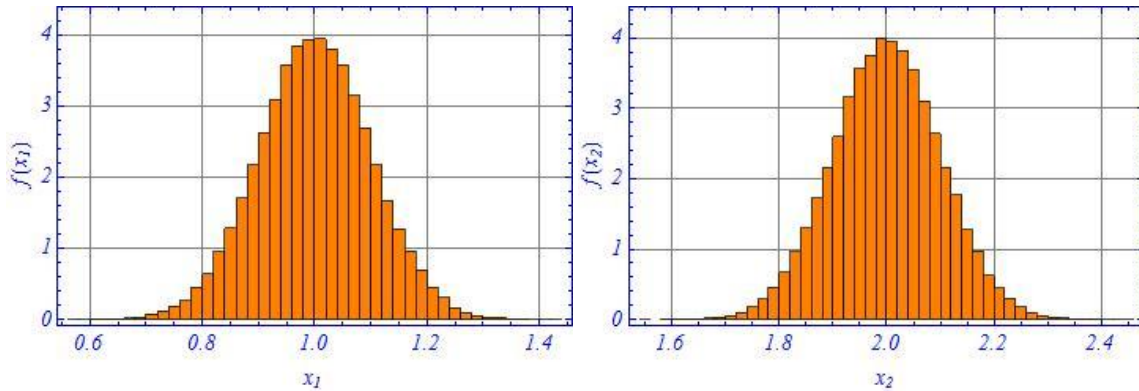
$$s_y = \sqrt{2 \cdot \bar{x}_1 \cdot s_{x_1} \cdot \left(2 \cdot \bar{x}_1 \cdot s_{x_1} + \frac{r_{x_1 x_2} \cdot s_{x_2}}{\sqrt{\bar{x}_2}} \right) + \frac{s_{x_2}^2}{4 \cdot \bar{x}_2}}$$
 mit s_{x_1}, s_{x_2} als empirische Standardabweichung von x_1 und x_2 und $r_{x_1 x_2}$ als Korrelationskoeffizient von x_1 und x_2 .

Die Meßwerte sind $\bar{x}_1 = 1,0$; $\bar{x}_2 = 2,0$; $s_{x_1} = s_{x_2} = 0,1$ und $r_{x_1 x_2} = 0,8$.

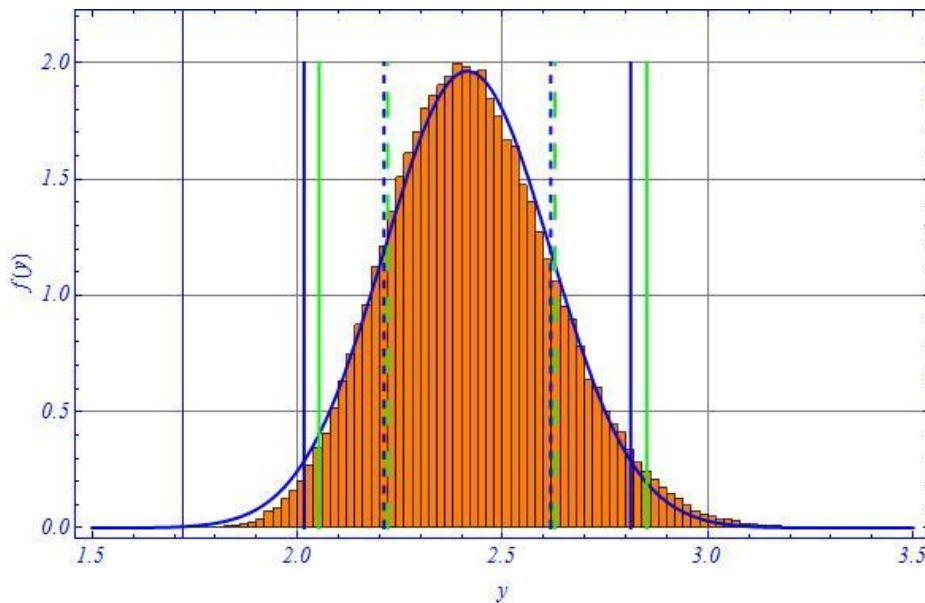
a) $r_{x_1x_2} = 0$

Zunächst wird $r_{x_1x_2} = 0$ angenommen.

$s_y = \sqrt{4 \cdot \bar{x}_1^2 \cdot s_{x_1}^2 + \frac{s_{x_2}^2}{4 \cdot \bar{x}_2}} = 0,2; \bar{y} = 2,41$; in den folgenden Abbildungen sind die Wahrscheinlichkeitsdichten von x_1, x_2 dargestellt, die aus 10^5 normalverteilten Zufallsvariablen mit x_1, s_{x_1} bzw. x_2, s_{x_2} gebildet wurden.



Gemäß Modell wird daraus die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(y)$ gebildet.



Das Integral von $-\infty$ bis $+\infty$ über die Wahrscheinlichkeitsdichten ist definitionsgemäß stets eins, die Wahrscheinlichkeiten für Intervalle können nach (a1) aus den Teilflächen berechnet werden. Bei $f(y)$ ist eine Gaußkurve (Mittelwert y und $\sigma = s_y$ nach c1), das 95% -Konfidenzintervall nach MCM (grün) und der Gaußkurve (blau), bzw. s_y nach MCM (grün gestrichelt) und s_y nach c1 (blau gestrichelt) eingezeichnet. Die Übereinstimmung von s_y ist sehr gut, das 95%

Konfidenzintervall gemäß Gaußkurve nicht, dh. Konfidenzintervalle nach Methode Kapitel c sind üblicherweise nicht möglich.

b) Korrelationsfaktor $r(x_1, x_2) \neq 0$

Es müssen normalverteilte Zufallswerte x_1 und x_2 gebildet werden, die die Kovarianzmatrix

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} s_{x_1}^2 & r_{x_1, x_2} s_{x_1} s_{x_2} \\ r_{x_1, x_2} s_{x_1} s_{x_2} & s_{x_2}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.008 \\ 0.008 & 0.01 \end{pmatrix} \text{ bzw. } r_{x_1, x_2} = 0,8 \text{ erfüllen. Dies gelingt mit}$$

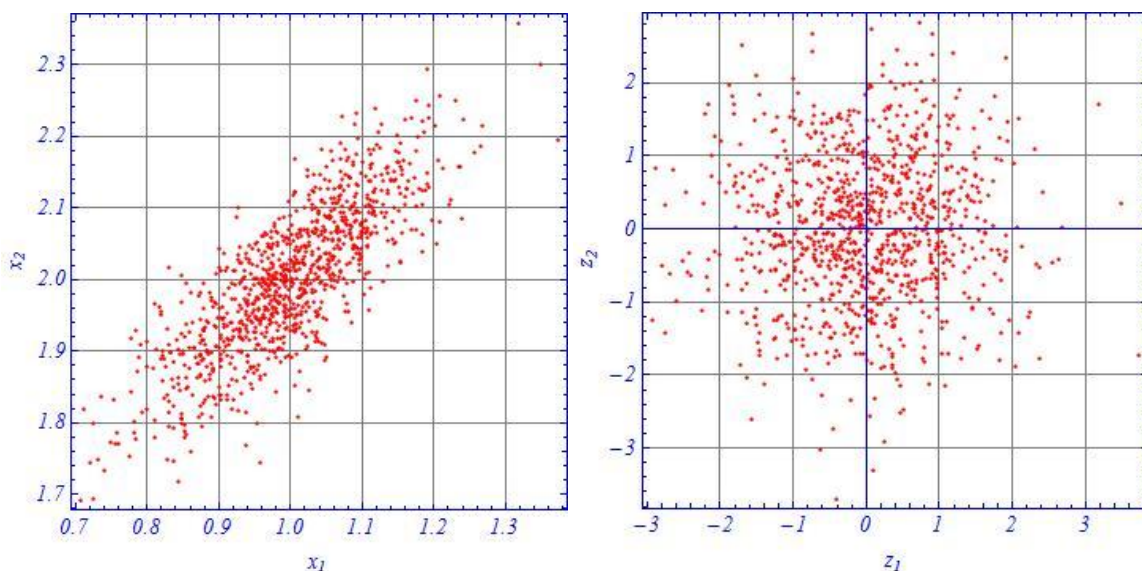
der Cholesky-Zerlegung (Cholesky-Decomposition) von $\mathbf{V} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$ mit der Eigenschaft $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{V}$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,08 \\ 0 & 0,06 \end{pmatrix}; \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.008 \\ 0.008 & 0.01 \end{pmatrix} = \mathbf{V}; \text{ danach ergeben sich die } x_1 \text{ bzw. } x_2 -$$

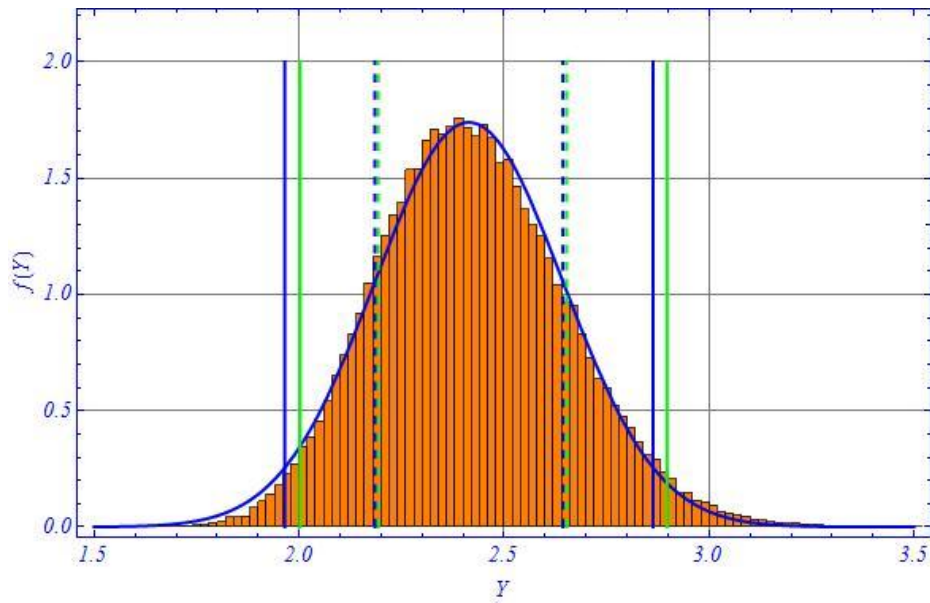
Werte nach

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{x}_2 & \bar{x}_2 & \bar{x}_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} + \mathbf{R}^T \mathbf{Z} \text{ mit } \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdot & \cdot \\ z_{21} & z_{22} & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \text{ wobei } z_{11}, z_{12}, \dots$$

Zufallswerte der Standardnormalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ sind, im vorliegenden Fall 10^5 Werte, die Zahl der Spalten der ersten Matrix beträgt ebenfalls 10^5 .



Zur Verdeutlichung sind die x_1 und x_2 bzw. z_1 und z_2 -Werte für 1000 Proben gegeneinander aufgetragen; man erkennt die Korrelation der x -Werte, während die z -Werte unkorreliert sind. Das Ergebnis ist in der folgenden Abbildung dargestellt, die Bedeutung der Linien ist dieselbe wie oben beim Fall $r = 0$.

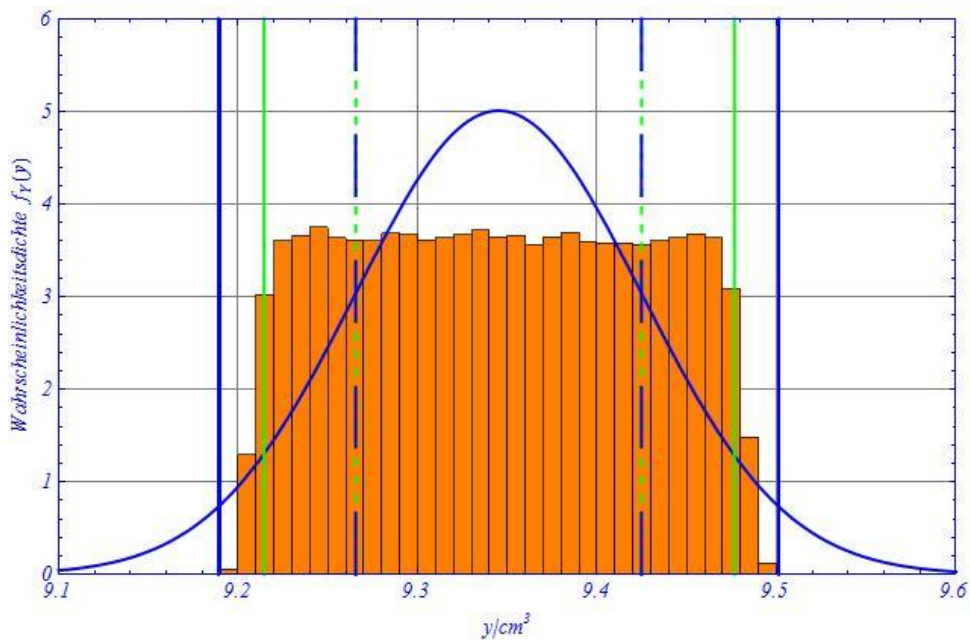


Eine allgemeine Beschreibung des Verfahrens ist in GUM S1 Kapitel C5 dargestellt.

Aufgabe:

Wenden Sie das dargestellte Verfahren auf das Beispiel S.21 an.

Ergebnis



$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} 0,00577 & 0,00461 \\ 0 & 0,00346 \end{pmatrix}$$