

Frühe Zeitmessgeräte: Wasseruhr und Sonnenuhr

Bis zur Entwicklung bzw. Erfindung der Mechanischen Uhren im 14. Jahrhundert etwa waren Wasseruhr und Sonnenuhr die fast ausschließlich verwendeten Zeitmessgeräte. Im folgenden soll die Physik der heute kaum mehr verwendeten Wasseruhr und die Berechnung des Zifferblattes von Sonnenuhren beschrieben werden.

1) Die Wasseruhr

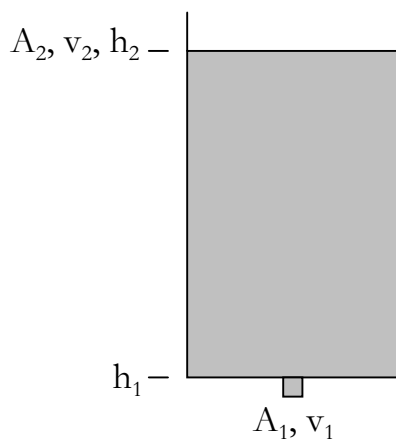
Mit der Wasseruhr (in Griechenland κλεψύδρα genannt) war eine wetter- und tagelichtunabhängige Zeitmessung möglich. Sie war im einfachsten Fall eine „Auslaufuhr“, bei der in einem meist konischen Gefäß Wasser durch ein Loch im Boden ausfloß.



Durch die Beobachtung des sinkenden Wasserspiegels mittels Markierungen war eine Zeitmessung möglich. Die Wasseruhr soll bereits im 3. vorchristlichen Jahrtausend von den Ägyptern erfunden worden sein, Galilei beschreibt eine abgewandelte Form in „Discorsi a due nuove scienze“ (1638). Die Form des stumpfen Kegels sollte einen gleichmäßigen Wasserausfluß bewirken, sodaß die Marken zur Zeitmessung gleiche Abstände besaßen.

Die Problematik der Wasseruhr besteht darin, daß nur ein Gefäß der Form einer Parabel 4. Grades (siehe weiter unten) einen gleichmäßigen Ausfluß garantiert; der Kegelstumpf, bei dem eine Neigung 1:3 verwendet wurde und der obere Durchmesser doppelt so groß wie der untere gewählt wurde, erfüllt diese Bedingung nur unvollkommen.

a) Zylinderförmiges Gefäß.



Um die Ausflußzeit $T_{h \rightarrow 0}$ bzw. die Höhe des Wasserspiegels $h(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit berechnen zu können, benötigt man zwei Gleichungen, die Bernoulli- und die Kontinuitätsgleichung:

$$I) \quad h_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} = h_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g}$$

$p_1 = p_2 = \text{Atmosphärendruck}$, $\rho = \text{Dichte des Wassers}$, $g = \text{Erdbeschleunigung}$

$$II) \quad v_2 \cdot A_2 = v_1 \cdot A_1; v_1, v_2 = \text{Strömungsgeschwindigkeit an Ausfluß und Oberfläche, } A_1 = r_1^2 \cdot \pi, A_2 = r_2^2 \cdot \pi$$

Flächen von Ausfluß und Oberfläche. $v_2 = -\frac{dh}{dt}$

v_2 aus II in I eingesetzt und nach v_1 aufgelöst ergibt:

$$h_2 \cdot 2 \cdot g + v_1^2 \cdot \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 = h_1 \cdot 2 \cdot g + v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{(h_2 - h_1) \cdot 2 \cdot g}{1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2}}$$

mit $h_1 = 0$, $h_2 = h$ und $A_1 \ll A_2$ ergibt sich näherungsweise nach Torricelli $v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$

Damit erhält man aus II eine Differentialgleichung mit trennbaren Variablen:

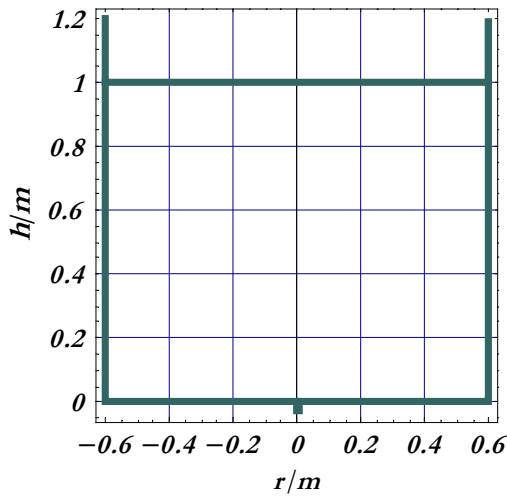
$$-A_2 \cdot \frac{dh}{\underbrace{dt}_{=v_2}} = A_1 \cdot \frac{h \cdot 2 \cdot g}{\underbrace{\sqrt{1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2}}_{v_1}} \Rightarrow \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{2 \cdot g}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2}} \cdot dt = -\frac{2 \cdot g}{\sqrt{\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 - 1}} \cdot dt;$$

$$\int_{h_2}^{h(t)} \frac{dh}{\sqrt{h}} = 2 \cdot \sqrt{h} \Big|_{h_0}^{h(t)} = -\frac{2 \cdot g}{\sqrt{\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 - 1}} \cdot t \text{ mit } h_2 = h_0 \Rightarrow \sqrt{h(t)} - \sqrt{h_0} = -\frac{1}{2} \frac{2 \cdot g}{\sqrt{\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 - 1}} \cdot t;$$

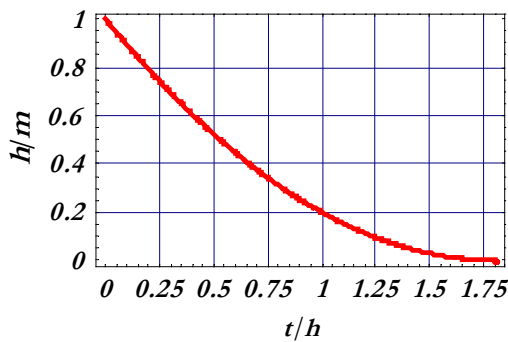
$$\sqrt{h(t)} = -\frac{1}{2} \frac{2 \cdot g}{\sqrt{\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 - 1}} \cdot t + \sqrt{h_0} \Rightarrow h(t) = \left\{ -\frac{1}{2} \frac{2 \cdot g}{\sqrt{\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 - 1}} \cdot t + \sqrt{h_0} \right\}^2; \text{ Ausflußzeit } T$$

$$\text{mit } h(t = T_{h_0 \rightarrow 0}) = 0 \Rightarrow T_{h_0 \rightarrow 0} = 2 \cdot \sqrt{h_0} \cdot \sqrt{\frac{\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 - 1}{2 \cdot g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot h_0}{g} \left[\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 - 1 \right]}$$

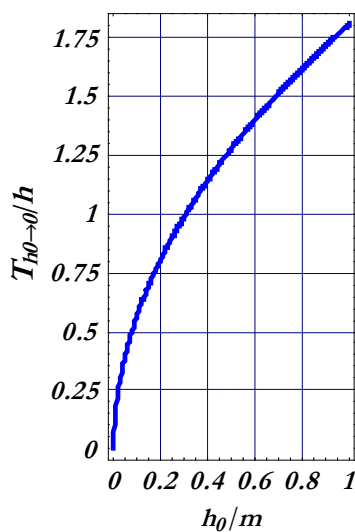
Beispiel:



In der Abbildung ist der Zylinder mit seinen Abmessungen dargestellt, einem Radius der Ausflußöffnung von 5 mm und einer anfänglichen Wasserspiegelhöhe von 1 m.



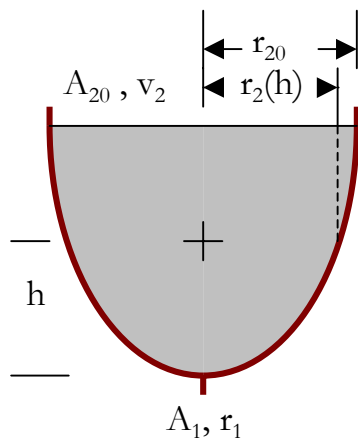
Gezeichnet ist die Höhe h des Wasserspiegels in Abhängigkeit von der Zeit, die Abnahme ist nur anfangs in guter Näherung linear. Die Nichtlinearität rührt vom Absinken des Pegels her. Um dies zu vermeiden, wurden komplizierte Regelungsmechanismen geschaffen (Ktesibios, 3. Jh.v.Chr.) oder man verwendete große Gefäße.



Hier ist die Ausflußzeit des Wassers von der Höhe h_0 auf $h=0$ dargestellt. Bei großen Ausgangshöhen ergibt sich näherungsweise Linearität.

Bei allen Berechnungen sind Reibungsverluste, seitliche Strömungen und Turbulenzen vernachlässigt worden, sodaß die Ausflußzeiten in Wirklichkeit länger sind und die $h(t)$ – Kurve flacher wird.

b) Optimale Gefäßform:



Die optimale Gefäßform ist erreicht, wenn $v_2 = -dh/dt$ bei jeder Höhe des Wasserspiegels konstant ist, dh. die Wasseroberfläche $A_2(h)$ höhenabhängig so durch das rotationssymmetrische Gefäß gestaltet wird, daß die Geschwindigkeit der Pegelabsenkung v_2 eine Konstante ist.

Durch Umstellung der Differentialgleichung von a) erhält man

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} \cdot \sqrt{A_2(h)^2 - A_1^2} = -A_1 \sqrt{2 \cdot g} \cdot dt; \text{ Ansatz: } A_2^2(h) - A_1^2 = \frac{h}{h_0} \cdot A_{20}^2 \text{ mit } A_2^2(h=h_0) - A_1^2 = A_{20}^2;$$

$$dh \text{ mit } A_2(h=h_0) = A_{20} \Rightarrow A_{20}^2 = A_{20}^2 - A_1^2$$

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} \cdot \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h_0}} = -\frac{A_1 \cdot \sqrt{2 \cdot g}}{\sqrt{A_{20}^2 - A_1^2}} \cdot dt \Rightarrow dh = -\frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h_0}}{\sqrt{\frac{A_{20}^2}{A_1^2} - 1}} \cdot dt \Rightarrow \int_{h_0}^{h(t)} dh = h(t) - h_0 = -\frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h_0}}{\sqrt{\frac{A_{20}^2}{A_1^2} - 1}} \cdot t$$

$$h(t) = h_0 - \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h_0}}{\sqrt{\frac{A_{20}^2}{A_1^2} - 1}} \cdot t; \text{ Ausflußzeit } T_{h_0 \rightarrow 0} = \sqrt{\frac{h_0}{2 \cdot g} \cdot \left(\frac{A_{20}^2}{A_1^2} - 1 \right)};$$

$$v_2 = -\frac{dh}{dt} = -\frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h_0}}{\sqrt{\frac{A_{20}^2}{A_1^2} - 1}} = \text{const.} = \text{Geschwindigkeit der Pegelabsenkung}$$

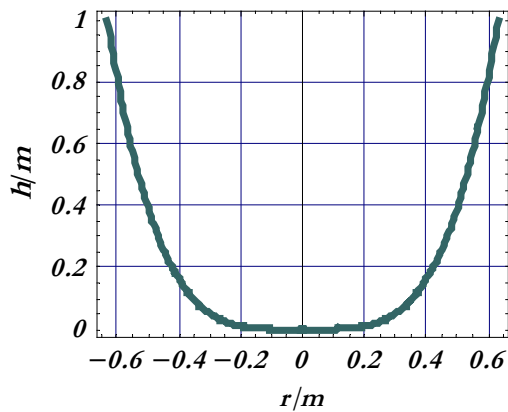
Für die höhenabhängige Fläche $A_2(h) = r_2^2(h) \cdot \pi$ erhält man:

$$A_2(h) = \sqrt{\frac{h}{h_0} \cdot (A_{20}^2 - A_1^2) + A_1^2} \text{ bzw. } r_2^2(h) = \sqrt{\frac{h}{h_0} \cdot (r_{20}^4 - r_1^4) + r_1^4}$$

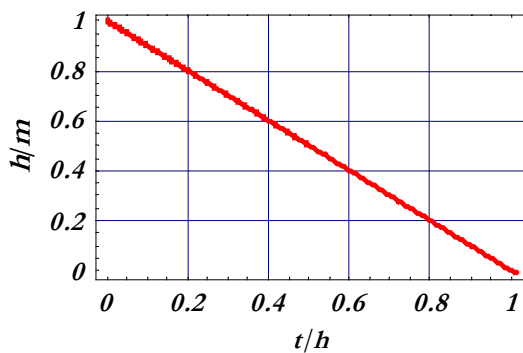
$$r_2(h) = \sqrt[4]{\frac{h}{h_0} \cdot (r_{20}^4 - r_1^4) + r_1^4}; \quad h(r) = h_0 \cdot \frac{(r^4 - r_1^4)}{(r_{20}^4 - r_1^4)}$$

$h(r)$ ist die Gleichung für die Kurve, durch die der Seitenriß der Gefäßwand gebildet wird.

Beispiel:



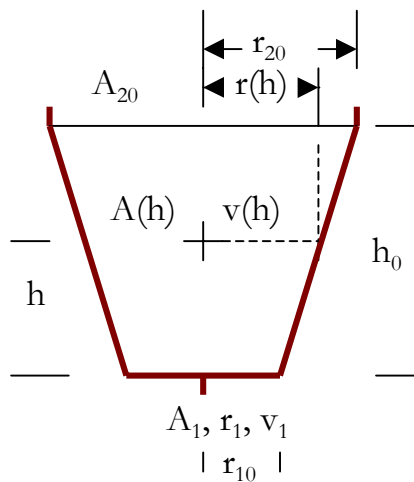
In der Abbildung ist der Seitenriß der optimalen Gefäßform mit den Abmessungen maßstabsgetreu dargestellt.



Höhe h des Wasserspiegels in Abhängigkeit von der Zeit t , die Abnahme ist linear. Radius der Ausflußöffnung = 5 mm, anfängliche Wasserspiegelhöhe = 1 m

Bei allen Berechnungen sind Reibungsverluste, seitliche Strömungen beim Ausfluß und Turbulenzen vernachlässigt worden.

c) Kegelstumpf:



$$\frac{h}{r(h) - r_{10}} = \frac{h_0}{r_{20} - r_{10}}; \Rightarrow r(h) = r_{10} + \frac{h \cdot (r_{20} - r_{10})}{h_0};$$

$A(h)$ = Fläche des Wasserspiegels bei der Höhe h

$$A(h) = \left(r_{10} + \frac{h \cdot (r_{20} - r_{10})}{h_0} \right)^2 \cdot \pi = \frac{\pi}{h_0^2} \cdot [r_{10} \cdot h_0 + h \cdot (r_{20} - r_{10})]^2;$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{h \cdot 2 \cdot g}{1 - \left(\frac{A_1}{A(h)} \right)^2}} \text{ nach Seite 2}$$

$$dh = -v(h)dt; v(h) = \frac{A_1}{A(h)} \cdot v_1 = \frac{A_1}{A(h)} \cdot \sqrt{\frac{h \cdot 2 \cdot g}{1 - \left(\frac{A_1}{A(h)} \right)^2}} = \sqrt{\frac{h \cdot 2 \cdot g}{\left(\frac{A(h)}{A_1} \right)^2 - 1}};$$

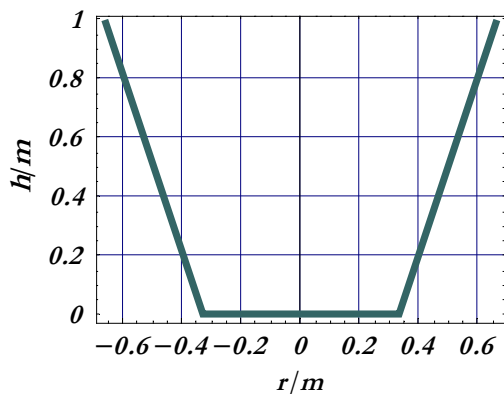
$$dh = - \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{\sqrt{\left(\frac{A(h)}{A_1} \right)^2 - 1}} \cdot dt = - \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{\sqrt{\left\{ \frac{\frac{\pi}{h_0^2} \cdot [r_{10} \cdot h_0 + h \cdot (r_{20} - r_{10})]^2}{A_1} \right\}^2 - 1}} \cdot dt$$

$$\frac{dh \cdot \sqrt{\left\{ \left[r_{10} + \frac{h \cdot (r_{20} - r_{10})}{h_0} \right]^2 \cdot \pi \right\}^2 - A_1^2}}{\sqrt{h}} = -\sqrt{2 \cdot g} \cdot A_1 \cdot dt \Rightarrow$$

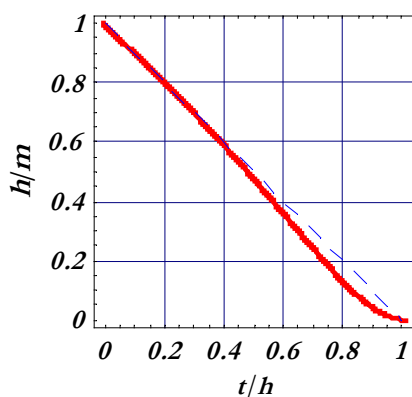
$$\int_{h_0}^{h(t)} \sqrt{\frac{\left[r_{10} + \frac{h \cdot (r_{20} - r_{10})}{h_0} \right]^4 \cdot \pi^2 - A_1^2}{h}} \cdot dh = -\sqrt{2 \cdot g} \cdot A_1 \int_0^t dt = -\sqrt{2 \cdot g} \cdot A_1 \cdot t$$

Die Lösung des Integrals ergibt die Höhe $h(t)$ des Wasserspiegels nach der Zeit t .

Beispiel:



Maßstabsgetreuer Seitenriß des Kegelstumpfes. Die Steigung der Gefäßwand ist 1:3, der obere Durchmesser ist doppelt so groß wie der untere. Radius der Ausflußöffnung = 5 mm, anfängliche Wasserspiegelhöhe = 1 m



Höhe h des Wasserspiegels in Abhängigkeit von der Zeit t , die Abnahme ist anfangs näherungsweise linear. Die Kurve ist einer Geraden besser angenähert als beim Zylinder.

Bei allen Berechnungen sind Reibungsverluste, seitliche Strömungen beim Ausfluß und Turbulenzen vernachlässigt worden. Man kann sie näherungsweise mit einer dimensionslosen „Ausflußzahl μ “ berücksichtigen (siehe z.B. *Techn. Physik, Band 2, Mechanik der Flüssigkeiten und Gase*, Horst Kerr, Verlag Europa-Lehrmittel).

Die Höhe $h(t)$ des Wasserspiegels nach der Zeit t ohne Reibung ist dann gleich der Höhe $h(t')$ nach der längeren Zeit $t' = t/\mu$ bei Vorhandensein von Reibung; die Zeitachse wird gedehnt, das bedeutet die $h(t)$ – Kurven werden flacher, die Entleerungszeiten nehmen um den Faktor $1/\mu$ zu. Die Ausflußzahl bewegt sich in der Größenordnung 0,85.....0,95.

Der gesamte Artikel steht im Netz unter

<http://www.fh-muenchen.de/home/fb/fb06/professoren/hingsammer/z1.pdf>

<http://www.fh-muenchen.de/home/fb/fb06/professoren/hingsammer/z2.pdf>

<http://www.fh-muenchen.de/home/fb/fb06/professoren/hingsammer/z3.pdf>

<http://www.fh-muenchen.de/home/fb/fb06/professoren/hingsammer/z4.pdf>

<http://www.fh-muenchen.de/home/fb/fb06/professoren/hingsammer/z5.pdf>