

## 2) Sonnenuhren

Sonnenuhren mit Schattenstab und Zifferblatt zur Zeitmessung gibt es seit dem 3. vorchristlichen Jahrtausend zuerst bei den Babyloniern und dann bei den Griechen. Die Einteilung des Tages in 12 gleiche Stunden (hora, Temporalstunden) wurde von den Babyloniern übernommen und ist seit der Zeit Alexanders d. Gr. bekannt. Die Abhängigkeit des Zifferblattes von der geographischen Breite ist ab dem 3. Jahrhundert vor Christus verstanden worden. Die größte Sonnenuhr der alten Welt war das Horologium Augusti auf dem Marsfeld in Rom mit einem Obelisk als Gnomon (Abschn.j)



Spätestens seit dem Mittelalter sind die „Polos“-Sonnenuhren, bei denen der Schattenstab parallel zur Erdachse zum Polarstern weist, im Gebrauch. Dadurch überdecken sich die Schattenlinien der Stunden der wahren Ortszeit unabhängig von der Jahreszeit.<sup>1</sup>

Ein Beispiel stellt die Sonnenuhr von Peter Apian (1524, siehe Abbildung links aus Knesch, Holtzhausen „Licht und Zeit“, Hochneder'sche Buchhandlung, Landshut) an der Burg Trausnitz in Landshut dar.

Sie zeigt die wahre Ortszeit, Tierkreislinien, Temporalstunden, babylonische und italienische Stunden, Höhe und Azimut der Sonne an. Ihre Funktion wurde allerdings durch den späteren Anbau einer Altane eingeschränkt.

Eine schöne und umfassende Zusammenstellung der geschichtlichen Entwicklung der Sonnenuhren enthält das Buch von R. J. Rohr „Die Sonnenuhr“ (Callwey Verlag München) mit vielen Bildern, Ableitungen von Formeln und Literatur.[1]

Im folgenden soll im wesentlichen die Berechnung des Zifferblattes von Polos-Sonnenuhren mit ebener Uhrenfläche behandelt werden, wobei von der Verwendung einer Mathematik-Software ausgegangen wird (zB. Mathematica).

Unterschieden wird die Süd-Sonnenuhr mit einer Stabwurzel in der Wand von West- oder Ostsonnenuhren mit nicht erreichbarem Uhrenzentrum, dh. der Schattenstab ist bei diesen Sonnenuhren über der Wand mit zwei Abstandshaltern montiert.

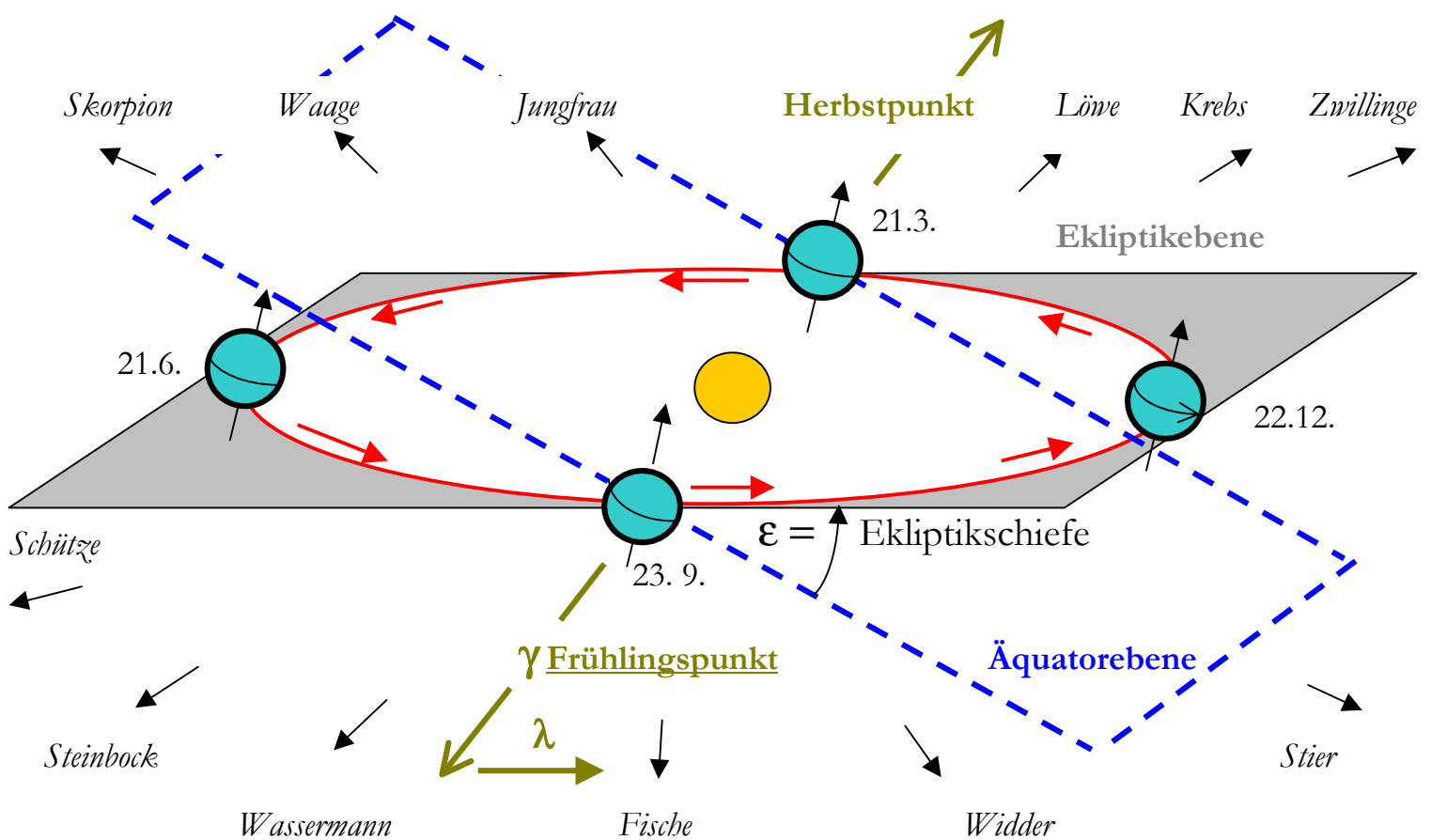
Es handelt sich bei allen aufgeführten Sonnenuhren um „Punktsonnenuhren“, die Information liefert der Schatten eines auf dem Zeiger angemerkten Punktes (Kugel, Öse oder auch Stabende), der linienförmige Schatten der reinen „Stabsonnenuhren“ beinhaltet wesentlich weniger Information auf der Uhrenfläche.

<sup>1</sup> Man unterscheidet Gnomon (γνώμων) = auf dem Zifferblatt senkrecht stehender Schattenstab und Polos = erdachspareller Schattenstab.

a) Allgemeine Grundlagen

Soll eine Sonnenuhr mehr als die Stundenlinien der wahren Ortszeit anzeigen, bei der die Sonne um 12.00 Uhr im Meridian des Aufstellungsortes steht, sind auch zur Ableseung bereits Grundkenntnisse der Himmelsmechanik notwendig. Umso höher ist die Leistung eines Peter Apian einzuschätzen, der bereits 1520 diese Kenntnisse in hohem Maße besaß.

Da es sehr gute Einführungen in die Grundbegriffe der Himmelskunde gibt [2], wird aus Platzgründen zur genauen Erläuterung der Begriffe auf die Literatur verwiesen. Von der Erde aus gesehen durchwandert die Sonne im Verlauf eines Jahres die sog. Eklptik ( $\epsilon\kappa\lambda\epsilon\upsilon\psi\iota\varsigma$  = Finsternis) und „verfinstert“ dabei die hinter ihr liegenden Sternbilder (Abbildung, Tabelle). Die Eklptik wird seit den Babyloniern in 12 gleiche 30°-Sektoren eingeteilt und die Lage der Sonne auf ihr durch die sog. Eklptische Länge  $\lambda$  gekennzeichnet, die vom Frühlingspunkt  $\gamma$  (= Schnittpunkt Fläche Eklptik – Fläche Himmelsäquator) aus in Winkelgraden gezählt wird.



Wegen der Erdpräzession wandert der Frühlingspunkt in 25700 Jahren = *Platonisches Jahr* einmal in der Ekliptik ganz herum, sodaß 140 n. Chr., als Ptolemaeus sein dreizehnbändiges Werk *Almagest* verfaßt hat, der Sektor 0 – 30° im Sternbild Widder lag, während er sich heute im Sternbild Fische befindet und sich dem Wassermann nähert. Trotzdem werden auch heute an den Sonnenuhren die Symbole der damaligen Sternbilder als *Tierkreiszeichen* (*Tierkreisring*) angebracht, obwohl sich diese inzwischen um 30° verschoben haben.

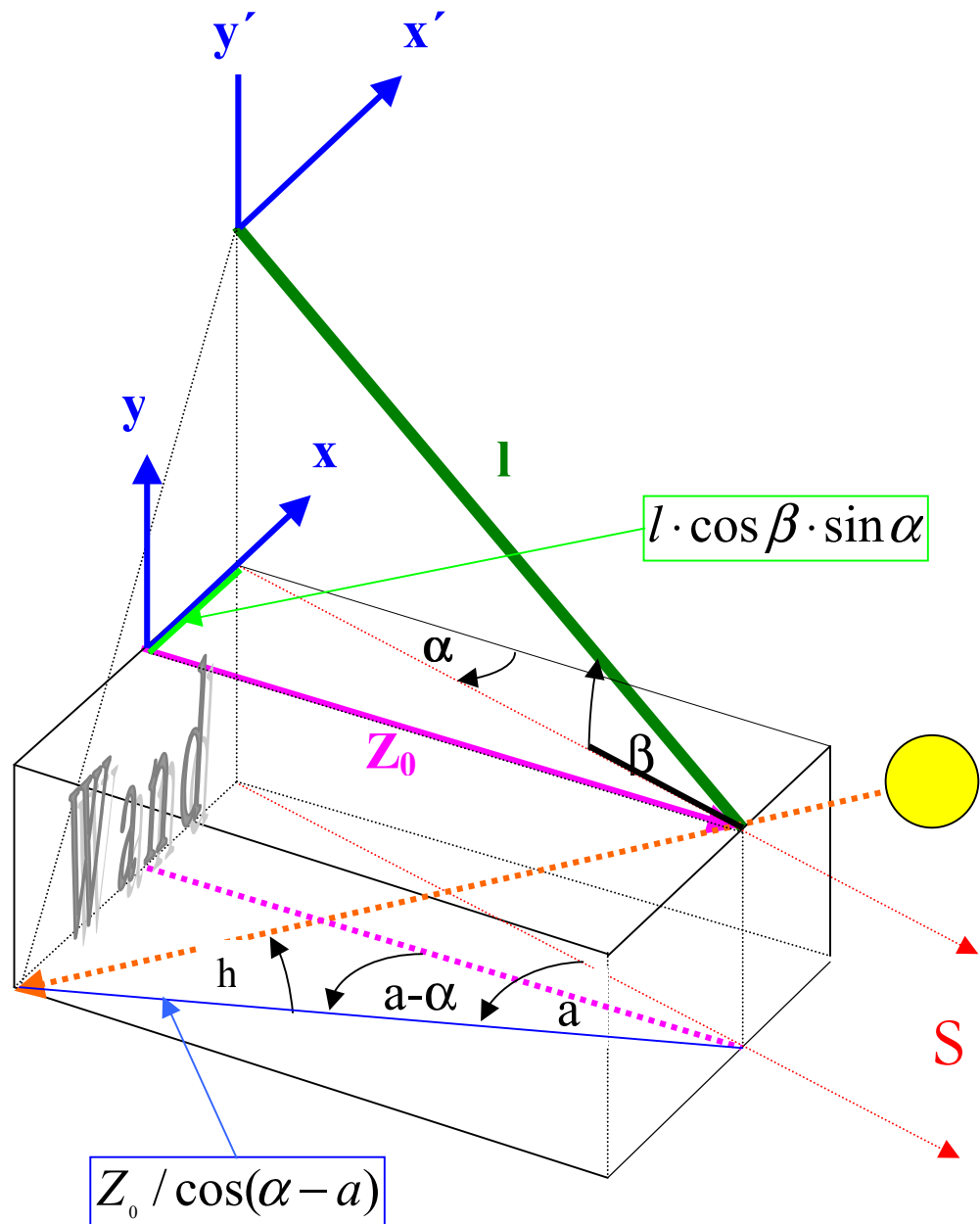
Datum	$\lambda$	Deklination $\delta$	Sternbild heute	Sternbild vor 2000 Jahren	Bemerkung
21.3.*	0°	0°			Tag- und Nachtgleiche
20.4.	30°	11,47°	Fische	Widder = aries	
21.5.	60°	20,15°	Widder	Stier = taurus	
21.6.	90°	23,44°	Stier	gemini	Sommersonnenwende
23.7.	120°	20,15°	Zwillinge	cancer	
23.8.	150°	11,47°	Krebs	leo	
23.9.	180°	0°	Löwe	virgo	Tag- und Nachtgleiche
23.10.	210°	-11,47°	Jungfrau	libra	
22.11.	240°	-20,15°	Waage	scorpius	
22.12.	270°	-23,44°	Skorpion	sagittarius	Wintersonnenwende
21.1.	300°	-20,15°	Schütze	capricornus	
19.2.	330°	-11,47°	Steinbock	aquarius	
21.3.	360°	0°	Wassermann	pisces	

\*Anm.: Die genauen Zeitpunkte müssen den astronomischen Jahrbüchern entnommen werden[3]

In der Tabelle ist auch die *Deklination* der Sonne über das Jahr eingetragen, das ist der vom Himmelsäquator aus in Richtung Himmelspol gezählte Winkel der Sonne [2]. Bei den Tag- und Nachtgleichen beträgt die Deklination 0°. (siehe Abschn. j S.39)

Für die Berechnung des Schattenpunktes auf der Uhrenfläche benötigt man den *Azimuth*  $a$ , die *Höhe*  $h$  der Sonne, die *geographische Breite*  $\beta$  und den *Wandwinkel*  $\alpha$ ; daraus werden nach den folgenden Abbildungen die x- bzw. y Koordinaten des Schattenpunktes auf der Uhrenfläche entweder bezüglich der Stabwurzel ( $x', y'$ ) oder, da diese bei der Westuhr fehlt, bezüglich des Fußpunktes der Kugel auf der Uhrenfläche ( $x, y$ ) bestimmt.

Süduhr:



$$x = Z_0 \tan(a - \alpha)$$

$$y = -Z_0 \cdot \frac{\tan(h)}{\cos(a - \alpha)}$$

$$x' = x + l \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha$$

$$y' = y - l \cdot \sin \beta$$

$$Z_0 = l \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha$$

$$x' = l \cdot \cos \beta \cdot \frac{\sin a}{\cos(\alpha - a)}$$

$$y' = -l \cdot \cos \beta \cdot \left[ \frac{\tan h \cdot \cos \alpha}{\cos(\alpha - a)} + \tan \beta \right]$$

$\alpha$  = Wandwinkel (Winkel Wandnormale gegen Süd, bei östl. Wand negativ)

$a$  = Azimut der Sonne = Winkel in der horizontalen Ebene ab Meridian im Uhrzeigersinn gemessen

$h$  = Höhe der Sonne, Winkel der Sonne gegen die Horizontalebene.

$Z_0$  = Normalenvektor zur Wand

$S$  = Südrichtung

$\beta$  = Geographische Breite

$l$  = Stablänge

$x', y'$  = Koordinaten des Schattenpunktes mit der Stabwurzel als Nullpunkt

$x, y$  = Koordinaten des Schattenpunktes mit Fußpunkt des Stabendes als Nullpunkt

N.R.:

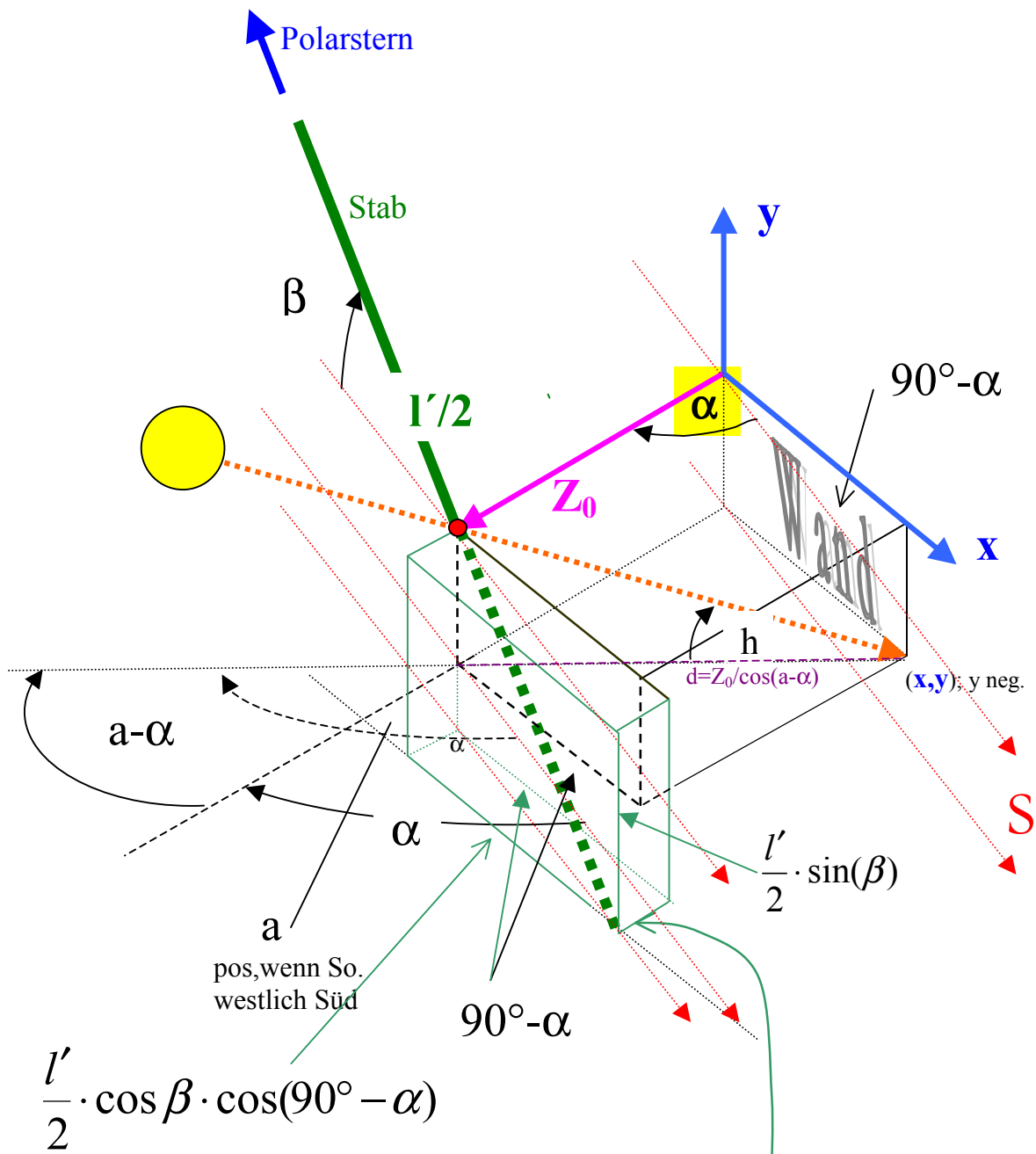
$$x' = l \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha \cdot \tan(a - \alpha) + l \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha$$

$$x' = l \cdot \cos \beta \cdot \left\{ \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \frac{\sin(a - \alpha)}{\cos(a - \alpha)} \right\}$$

$$x' = l \cdot \cos \beta \cdot \left\{ \frac{\sin(a - \alpha) \cdot \cos \alpha + \cos(a - \alpha) \cdot \sin \alpha}{\cos(a - \alpha)} \right\}$$

$$x' = l \cdot \cos \beta \cdot \left\{ \frac{\sin(a - \alpha + \alpha)}{\cos(a - \alpha)} \right\} = l \cdot \cos \beta \cdot \frac{\sin a}{\cos(a - \alpha)};$$

Westuhr Stabprojektion: ( $\alpha < 90^\circ$ )



$$x = Z_0 \tan(a - \alpha)$$

$$y = -Z_0 \cdot \frac{\tan(h)}{\cos(a - \alpha)}$$

$$\frac{l'}{2} \cdot \cos \beta \cdot \sin|(90^\circ - \alpha)|$$

$\alpha$  = Wandwinkel (Winkel Wandnormale gegen SÜD), pos. bei westlicher Wand  
 $a$  = Azimut der Sonne, pos., wenn die Sonne westlich SÜD,  $h$  = Höhe der Sonne  
 $Z_0$  = Normalenvektor zur Wand  
 $S$  = Südrichtung,  $\beta$  = geogr. Breite  $l'$  = Stablänge,  
 $Z_0$  = senkrechter Abstand der schattenwerfenden Kugel von der Wand  
 $x, y$  = Koordinaten des Schattenpunktes,  $y$  ergibt einen negativen Wert.

Ähnliche Zusammenhänge  $a(\lambda, \tau), h(\lambda, \tau) \Rightarrow x(\lambda, \tau), y(\lambda, \tau)$  sind für jede Art von Sonnenuhr, zB. Horizontaluhr, Äquatorialuhr, Zylinderuhr usw. zu bilden, wenn das Zifferblatt berechnet und nicht umständlich geometrisch konstruiert werden soll. Es wird aber davon ausgegangen, daß nicht nur die Stundenlinien der wahren Ortszeit – da würde die geometrische Konstruktion genügen – gewünscht werden, sondern ein Liniennetz ähnlich der Apian'schen Uhr oder Teilen davon, eventuell auch mit MEZ- Linien und Zeitgleichungsschleifen.

Horizontaluhr ( $x, y$  von der Stabwurzel aus gerechnet):

$$x = \frac{l \cdot \sin \beta}{\tan h} \cdot \sin a; y = \frac{l \cdot \sin \beta}{\tan h} \cdot \cos a + l \cdot \cos \beta;$$

Äquatorialuhr (Ortsäquatorsystem siehe S.39):

$$x = \frac{\tau^\circ \cdot \pi}{180^\circ} \cdot r; y = r \cdot \tan(-\delta(\lambda)); x, y = \text{Koordinaten des Schattenpunktes auf der abgewickelten Zylinderfläche; } r = \text{Radius der Zylinderfläche.}$$

Die Höhe  $h$  und der Azimut  $a$  der Sonne muß nach allgemein bekannten astronomischen Formeln [4] aus der Deklination  $\delta$ , der ekliptischen Länge  $\lambda$  und dem Stundenwinkel  $\tau$  gewonnen werden. (Transformationsformeln Ortsäquatorsystem  $\rightarrow$  Horizontales Koordinatensystem, Abb. S. 39,  $\tau =$  im Grad- oder Zeitmaß im Sinne der täglichen Bewegung der Gestirne gemessener Winkel; er wird vom Süd- Meridian aus auf dem Himmelsäquator gezählt; 4 min entsprechen  $1^\circ$  [2], siehe Abb. S. 39).  $\tau$  erhält man aus der wahren Ortszeit WOZ oder Mitteleuropäischen Zeit MEZ nach den Formeln (6) und (7).

$$\sin h(\lambda) = \sin \beta \cdot \sin \delta(\lambda) + \cos \beta \cdot \cos \delta(\lambda) \cdot \cos \tau^\circ; \quad (1)$$

$$\tan \frac{a(\lambda)}{2} = \frac{\cos h(\lambda) + \cos \beta \cdot \sin \delta(\lambda) - \sin \beta \cdot \cos \delta(\lambda) \cdot \cos \tau^\circ}{\cos \delta(\lambda) \cdot \sin \tau^\circ} \quad (2)$$

$$\tan a(\lambda) = \frac{\sin \tau^\circ}{\sin \beta \cdot \cos \tau^\circ - \cos \beta \cdot \tan \delta(\lambda)}; \quad (3)$$

$$\sin \delta(\lambda) = \sin \varepsilon \cdot \sin \lambda; \varepsilon = \text{Ekliptikschiefe [4];} \quad (4)$$

$$\tan \alpha_R(\lambda) = \cos \varepsilon \cdot \tan \lambda; \alpha_R = \text{Rektaszension [2];} \quad (5)$$

$$\tau_{WOZ}^o = (t_{WOZ}^h - 12h) \cdot 15^o \cdot h^{-1}; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \tau_{MEZ}^o &= (t_{MEZ}^h + Z^h - 13h) \cdot 15^o \cdot h^{-1} + L\ddot{A}^o \\ &= (t_{MEZ}^h - 13h) \cdot 15^o \cdot h^{-1} + Z^o + L\ddot{A}^o \end{aligned} \quad (7)$$


---

Z ist die sog. *Zeitgleichung* [1, 2], die den Zusammenhang zwischen MEZ und Stundenwinkel bzw. wahrer Ortszeit herstellt; sie wird in Grad oder Stunden gezählt.

Um zu einem gleichmäßigen Zeitmaß zu kommen, hat man eine mittlere Sonne definiert, die sich mit konstanter Geschwindigkeit auf dem Himmelsäquator bewegt und davon die heutigen mittleren Normal-Zonenzeiten abgeleitet.

Die Differenz zur wahren Ortszeit, die durch die Stundenlinien einer Sonnenuhr angezeigt wird mit der Meridianlinie um 12.00 Uhr WOZ, ist durch die Zeitgleichung und geographische Länge LÄ (östliche Länge zählt positiv) gegeben.

Die Zeitgleichung ändert sich im Laufe eines Jahres von + 14 Minuten (Februar) bis – 16 Minuten (November). Am 15.4, 15.6., 1.9. und 25.12. ist sie null.

Indem man Z und die geographische Länge mit entsprechender Abbildungsvorschrift auf das Sonnenuhrzifferblatt überträgt (es ergeben sich Schleifen, die einer Acht ähneln), kann man die Mitteleuropäische Zeit aus der Lage des Schattenpunktes entnehmen.

Ein besonderes Problem bringt die Bestimmung des Wandwinkels  $\alpha$  mit sich; soll sie genau erfolgen, muß ein gewisser Aufwand an Messungen getrieben werden, siehe dazu [5,6,7].



## b) Tierkreislinien, Deklinationskurven

Es genügt, die Deklinationskurven für die ekliptische Länge  $\lambda = 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 240^\circ$  und  $270^\circ$  zu berechnen, die restlichen Kurven fallen wegen gleicher Deklination (siehe Tabelle Seite 10) mit diesen zusammen.

Eine Deklinationskurve stellt den Tagebogen des Schattenpunktes von Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang auf der Uhrenfläche für ein bestimmtes Datum (Tabelle) dar.

Trifft der Schattenpunkt auf eine dieser Deklinationslinien, kann das Datum abgelesen werden bzw. bei einer Lage dazwischen abgeschätzt werden.

Bei den Tag- und Nachtgleichen (Äquinoktien, 21. März, 23. September) sind die Tagebögen Geraden, ansonsten Hyperbeln.

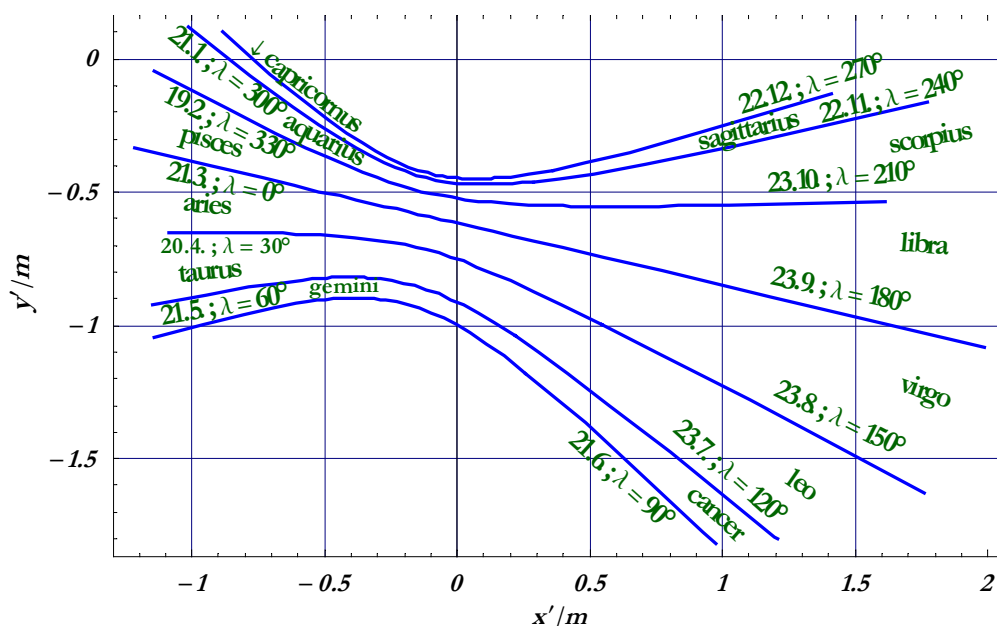
Als Ekliptikschiefe  $\epsilon$  wird  $23,44^\circ$  verwendet; da sie sich im Laufe der Zeit leicht ändert, müßte man sie strenggenommen als Funktion des Julianischen Datums berechnen [4,8], was aber bei Sonnenuhren eine übertriebene Genauigkeitsanforderung wäre.

Aus den 7 ekliptischen Längen erhält man nach Formel (4) die sieben  $\delta$ -Werte der Tabelle S. 10 und damit die Höhe  $h(\delta, \tau)$  und den Azimut  $a(\delta, \tau)$  nach (1) und (2) (Ableitung siehe [4]), schließlich durch Einsetzen die Schattenpunkte auf der Uhrenfläche  $x'(\delta, \tau)$  und  $y'(\delta, \tau)$  nach den Formeln Seite 12 oben bei der Süduhr. Das ist die Parameterdarstellung für die Hyperbeln der Tagebögen.

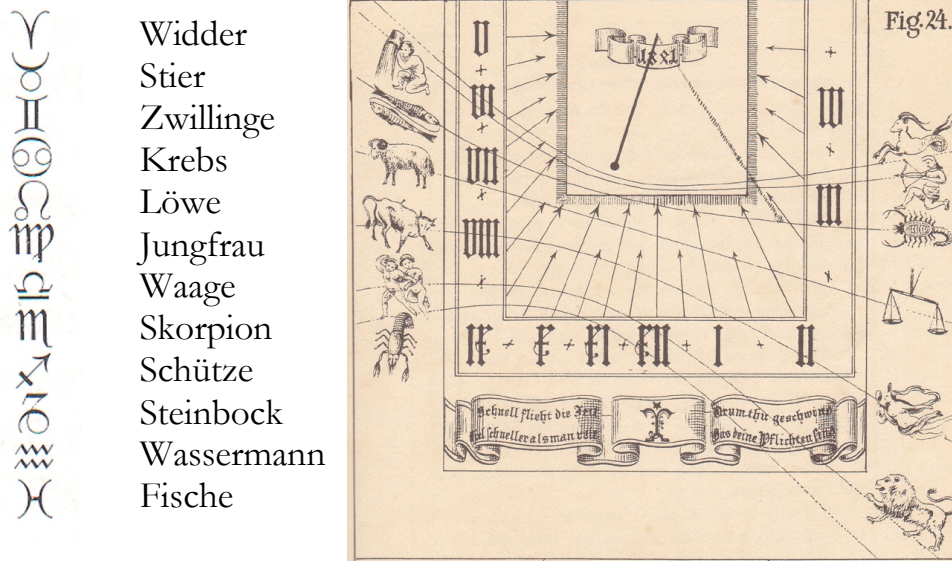
Die Stundenwinkel  $\tau$  sind nicht beliebig, trifft nämlich der Schattenpunkt nicht mehr die Wand, so wird  $x'$  und  $y'$  unendlich.  $\tau$  erhält man nach (6) aus der wahren Ortszeit  $t_{\text{WOZ}}$ , die bei einer Süduhr je nach östlicher oder westlicher Ausrichtung und der Deklination  $\delta$  in der Gegend 6.....17 Uhr oder 7.....18 Uhr liegt.

*Beispiel: Süduhr mit nach Osten ausgerichteter Wand*

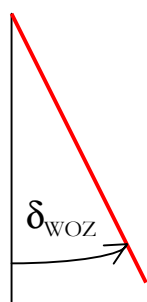
Wandwinkel  $\alpha = -15,27^\circ$ ; Geogr. Breite  $\beta = 48,547^\circ$ ; östliche Länge  $L\ddot{A} = 12,08^\circ$   
 Stablänge  $l = 0,462$  m; zu den angegebenen Werten der ekliptischen Längen  $\lambda$  gehören die in Tabelle S. 10 aufgeführten Deklinationen  $\delta$ .



Das Anbringen der Tierkreiszeichen an den Deklinationskurven kann künstlerisch gestaltet werden. Beispiel rechts aus [9]



c) Stundenlinien der wahren Ortszeit



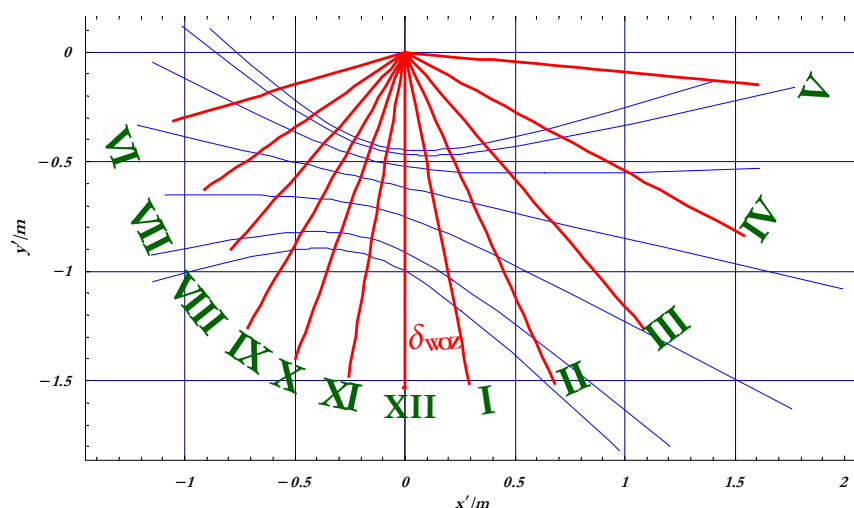
Der Winkel einer Stundenlinie gegen die Meridianlinie ergibt sich entweder aus

$$\delta_{WOZ}(\tau) = -atan \frac{x'(\tau)}{y'(\tau)} \text{ oder aus}$$

$$\tan \delta_{WOZ}(\tau) = \frac{\cos \beta}{\cos(-\alpha) \cdot \cot \tau + \sin \alpha \cdot \sin \beta} \text{ Ableitung [1,7]}$$

$\tau$  erhält man aus der gewünschten Stunde der wahren Ortszeit nach (6) Seite 15.

Beispiel:

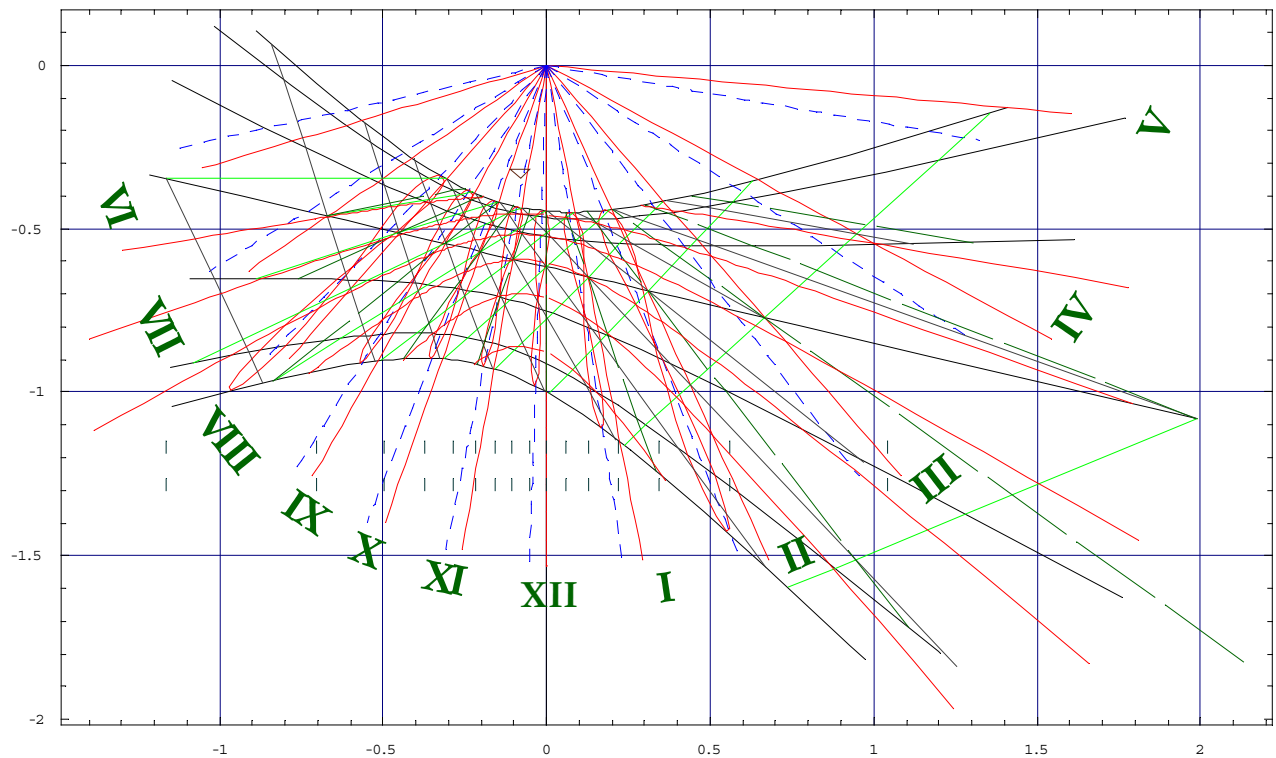


$t_{WOZ}$	$\tau$	$\delta_{WOZ}$
6	-90°	-73,4°
7	-75°	-55,5°
8	-60°	-41,2°
9	-45°	-29,7°
10	-30°	-19,5°
11	-15°	-9,9°
12	0°	0°
13	15°	11°
14	30°	24,2°
15	45°	40,8°
16	60°	61,5°
17	75°	84,7°

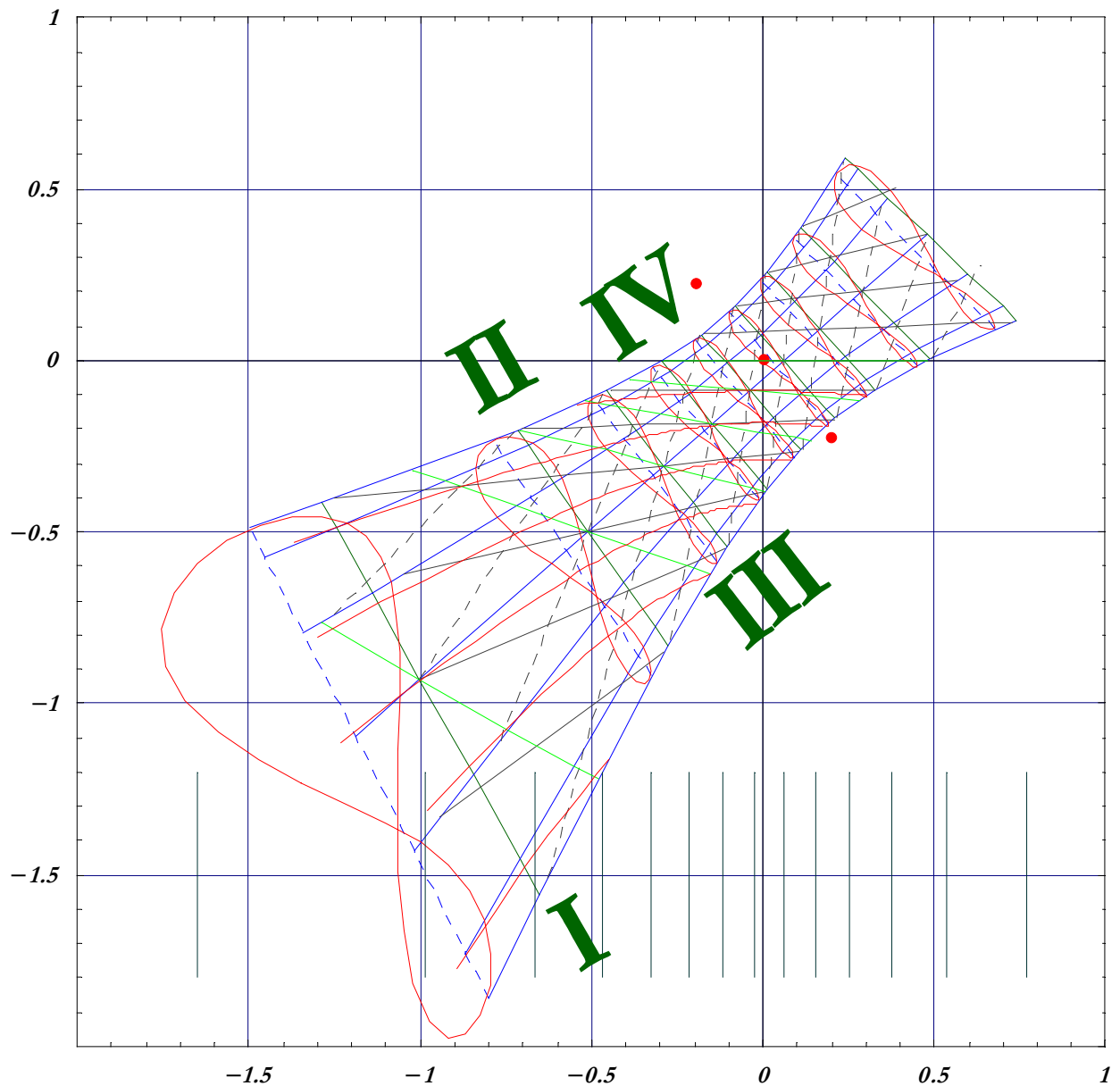
Die wahre Ortszeit  $t_{\text{WOZ}}$  läuft von 6 – 17 Uhr, der Stundenwinkel  $\tau$  entsprechend von  $-90^\circ$  bis  $75^\circ$ .

*Stundenlinien der wahren Ortszeit und Deklinationskurven gehören zum häufigsten Liniennetz der Sonnenuhren.*

*Die nun folgenden Kurven und Linien sind nur bei umfangreicheren Uhren vorhanden.*



Die dargestellte Vertikale Süduhr, die schon teilweise im vorliegenden Teil behandelt wurde, wird in dem folgenden 3. Teil weiterentwickelt.



Vertikale Westuhr mit nicht erreichbarem Uhrenzentrum,  $\alpha = 83,12^\circ$ ,  
 östl.Länge =  $12,08^\circ$ ,  $\beta = 48,55^\circ$ .

Der gesamte Artikel steht im Netz unter

- <http://www.fh-muenchen.de/home/fb/fb06/professoren/hingsammer/z1.pdf>
- <http://www.fh-muenchen.de/home/fb/fb06/professoren/hingsammer/z2.pdf>
- <http://www.fh-muenchen.de/home/fb/fb06/professoren/hingsammer/z3.pdf>
- <http://www.fh-muenchen.de/home/fb/fb06/professoren/hingsammer/z4.pdf>
- <http://www.fh-muenchen.de/home/fb/fb06/professoren/hingsammer/z5.pdf>