

d) Stundenlinien der Mitteleuropäischen Zeit MEZ

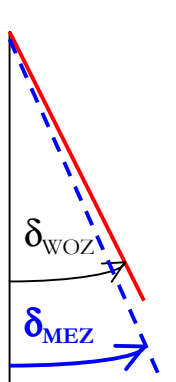
Eine Sonnenuhr zeigt primär die wahre Ortszeit WOZ an dh. wenn die Sonne die Meridianebene bei ihrer Wanderung von Ost nach West überquert, ist 12.00 Uhr WOZ; auf der vertikalen Sonnenuhr durchschreitet der Schattenpunkt hierbei die vertikale Linie. Der Stundenwinkel τ der Sonne ist dann 0° . Will man die dazugehörige MEZ berechnen, so ergibt sich nach Formel (7) mit $\tau_{MEZ} = 0 \Rightarrow$

$$t_{MEZ, Meridian}^h = (-Z^\circ - L\ddot{A}^\circ) \cdot \frac{1}{15^\circ h^{-1}} + 13^h$$

Beispiel von S.16 mit $Z^\circ = 0$ $\approx B$ am 15.4. (siehe S.15) und $L\ddot{A} = 12,08^\circ$

$t_{MEZ, Meridian}^h = (0 - 12,08^\circ) \cdot \frac{1}{15^\circ h^{-1}} + 13^h = 12^h,194667 = 12^h 11^m 40,8^s$ dh. der Meridiandurchgang der Sonne ist um $12^h 11^m 40,8^s$ MEZ ; das muß auch so sein, weil nach Definition die MEZ die mittlere Ortszeit für den 15. Östlichen Längengrad ist dh. die Sonne geht erst später durch den Meridian eines westlich davon gelegenen Ortes oder die mittlere Sonne benötigt $11^m 40,8^s$, um vom Längengrad 15° zum Längengrad $12,08^\circ$ östlich zu kommen.

Um die MEZ - Stundenlinien an der Uhrenfläche für $Z = 0$ angeben zu können, müssen zunächst die Stundenwinkel τ_{MEZ} der wahren Sonne nach (7) mit $Z = 0$ berechnet werden und damit dann nach Formel S. 17 die Winkel δ_{MEZ} angegeben werden.

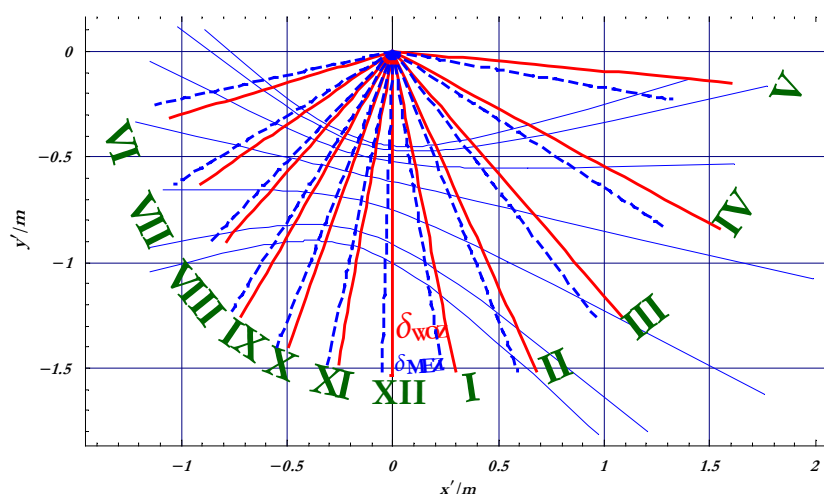


$$\delta_{MEZ}(\tau) = -atan \frac{x'(\tau_{MEZ})}{y'(\tau_{MEZ})}$$

$$tan \delta_{MEZ}(\tau) = \frac{cos \beta}{cos(-\alpha) \cdot cot \tau_{MEZ} + sin \alpha \cdot sin \beta}$$

τ_{MEZ} erhält man aus der gewünschten Stunde der MEZ nach (7) Seite 15 mit $Z = 0$.

Beispiel:



t_{MEZ}	τ_{MEZ}	δ_{MEZ}
6	$-92^\circ,92$	$-77,4^\circ$
7	$-77^\circ,92$	$-58,6^\circ$
8	$-62^\circ,92$	$-43,8^\circ$
9	$-47^\circ,92$	$-31,8^\circ$
10	$-32^\circ,92$	$-21,4^\circ$
11	$-17^\circ,92$	$-11,7^\circ$
12	$-2^\circ,92$	$-2^\circ,0$
13	$12^\circ,08$	$8,7^\circ$
14	$27^\circ,08$	$21,4^\circ$
15	$42^\circ,08$	$37,2^\circ$
16	$57^\circ,08$	$57,2^\circ$
17	$72^\circ,08$	$80,2^\circ$

Der Stundenwinkel τ_{MEZ} der wahren Sonne für die Stunden der MEZ unterscheidet sich immer um denselben Betrag vom Stundenwinkel τ_{WOZ} der wahren Sonne für die Stunden der WOZ ($Z = 0$); es gilt

$$\tau_{MEZ}^0 - \tau_{WOZ}^0 = (t_{MEZ}^h - 13h) \cdot 15^0 \cdot h^{-1} + Z^0 + L\ddot{A} - (t_{WOZ}^h - 12h) \cdot 15^0 \cdot h^{-1}$$

$$\Delta = \tau_{MEZ}^0 - \tau_{WOZ}^0 = -13h \cdot 15^0 \cdot h^{-1} + L\ddot{A} + 12h \cdot 15^0 h^{-1} = L\ddot{A}^0 - 15^0$$

Beispiel: $\Delta = 12,08^0 - 15^0 = -2,92^0$ dh. $\tau_{MEZ} = \tau_{WOZ} - 2,92^0$; da $1^0 \equiv 4$ min entspricht (S.14) ist $\Delta = 2,92^0 \cdot 4$ min = 11,68 min = $11^m 40,8^s$ im Einklang mit der vorigen Seite.

e) Zeitgleichungsschleifen

Wenn der Schattenpunkt auf der Uhrenfläche die MEZ – Linien der vorigen Seite passiert, dann liest man auch auf einer Taschenuhr die entsprechende mitteleuropäische Zeit ab, allerdings nur zu den Zeiten, an denen die Zeitgleichung den Betrag null hat, also am 15.4., 15.6., 1.9. und 25.12.

An den übrigen Tagen muß die Zeitgleichung $Z =$ wahre Ortszeit – mittlere Ortszeit berücksichtigt werden (S.15).

Natürlich erhebt sich die Frage, ob man auf einer Sonnenuhr die MEZ ablesen soll, nachdem jeder einfacher diese Zeit auf der Taschenuhr entnehmen kann. Um Sonnenuhren interessanter zu gestalten, hat man aber von jeher solche Uhren konstruiert zB. am Alten Peter in München, sichtbar vom Viktualienmarkt aus. Erkennbar sind diese Uhren an den Schleifen in Form einer Acht.

Die Einführung einer mittleren Orts- oder Zonenzeit wie die MEZ war notwendig geworden, weil der Lauf der Erde um die Sonne ungleichförmig ist, schnell im Perihel (2. Januar), langsam im Aphel (3. Juli) und gleichzeitig die Erdachse gegenüber der Erdbahnebene mit (90^0 - Ekliptikschiefe ε) $\cong 66,5^0$ geneigt ist. Die Zeitdauer von Mitternacht zu Mitternacht oder Kulmination der Sonne bis zur nächsten mit 24 h ist deshalb abhängig von der Jahreszeit und damit auch die zeitliche Länge einer Stunde. Im Industriezeitalter vermied man diesen Umstand durch Einführung einer fiktiven mittleren Sonne mit dem Stundenwinkel τ_{ms} , die sich gleichmäßig am Himmelsäquator bewegt. Die mittlere Ortszeit t_{MOZ}^h bzw. MEZ t_{MEZ}^h ist damit

$$t_{MOZ}^h = \tau_{ms}^h + 12^h = t_{MEZ}^h - 1h + L\ddot{A}^0 / 15^0 h^{-1};$$

Für 15^0 östlicher Länge wird $t_{MOZ}^h = t_{MEZ}^h$ dh. hier ist die MEZ gleich der mittleren Ortszeit MOZ. Die Zeitgleichung Z ist $Z^h = t_{WOZ}^h - t_{MOZ}^h$ also die Differenz der wahren Ortszeit und der mittleren Ortszeit.

Eine Tabelle für die Zeitgleichung im Verlaufe eines Jahres findet man in den Büchern [1], im Astronomical Almanac [3] einen formelmäßigen näherungsweise Zusammenhang.

Im Rahmen eines Programmes kann Z und die Deklination δ (4) S.14 aus der ekliptischen Länge λ bestimmt werden und zwar für mindestens ca. 36 verschiedene Werte von $0^0 \dots 360^0$, andernfalls bekommt man zu eckige Schleifen.

$i = 0 \dots 36$; $\lambda_i = i \cdot 10^\circ$; $Z_i = \lambda_i - v_i + m_i - \alpha_{R_i}$ mit der wahren Anomalie v , der mittleren Anomalie m und der Rektaszension α der Sonne; näheres siehe [4,10].

Der Stundenwinkel der wahren Sonne für eine bestimmte Stunde der MEZ in Abhängigkeit von λ bzw. δ ergibt sich nach (7) S.15

$$\tau_{MEZ,i}^0 = (t_{MEZ}^h - 13h) \cdot 15^\circ \cdot h^{-1} + Z_i^0 + L\ddot{A}^0 \quad \text{zB. für } t_{MEZ}^h = 12h$$

$$\tau_{MEZ,i,12}^0 = (-1h) \cdot 15^\circ \cdot h^{-1} + Z_i^0 + L\ddot{A}^0$$

Aus der Höhe h und dem Azimut a (1,2) S.14 erhält man x' und y' (Formeln S.11 , 12 und (4) S. 14). Für die 12 h –Schleife

$$h_{i,12} = \text{asin}[\sin\beta \cdot \sin\delta_i + \cos\beta \cdot \cos\delta_i \cdot \cos\tau_{MEZ12,i}]; \delta_i = \text{asin}[\sin\varepsilon \cdot \sin\lambda_i];$$

$$a_{i,12} = 2 \cdot \text{atan}\left[\frac{\cosh_i + \cos\beta \cdot \sin\delta_i - \sin\beta \cdot \cos\delta_i \cdot \cos\tau_{MEZ12,i}}{\cos\delta_i \cdot \sin\tau_{MEZ12,i}}\right]$$

$$x'_{i,12} = l \cdot \cos\beta \cdot \frac{\sin a_{i,12}}{\cos(\alpha - a_{i,12})}; y'_{i,12} = l \cdot \cos\beta \cdot \left[\frac{\tanh_{i,12} \cdot \cos\alpha}{\cos(\alpha - a_{i,12})} + \tan\beta\right]$$

In der unteren Abbildung links Seite 23 ist auch der Stabfußpunkt (Dreieck) eingetragen. Nach der Abbildung Seite 11 sind dessen Koordinaten:

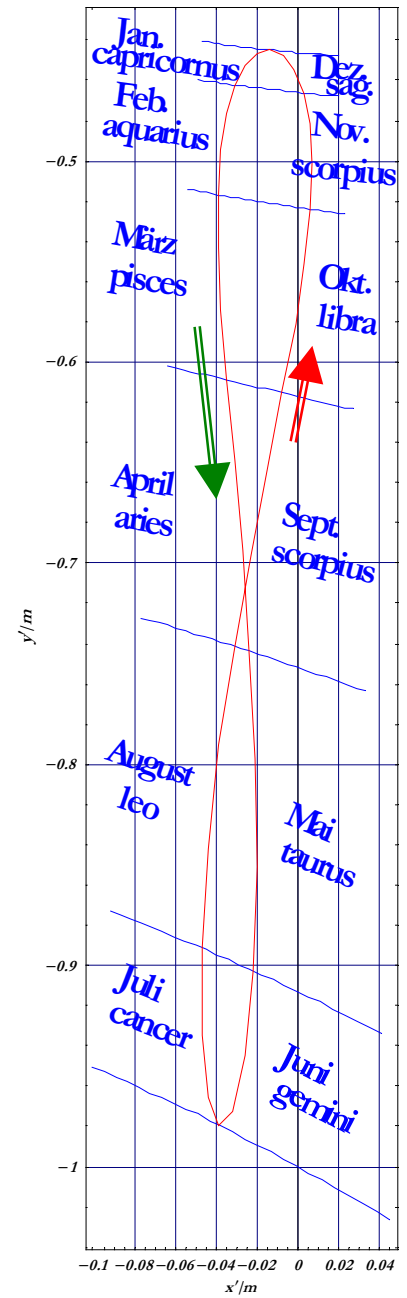
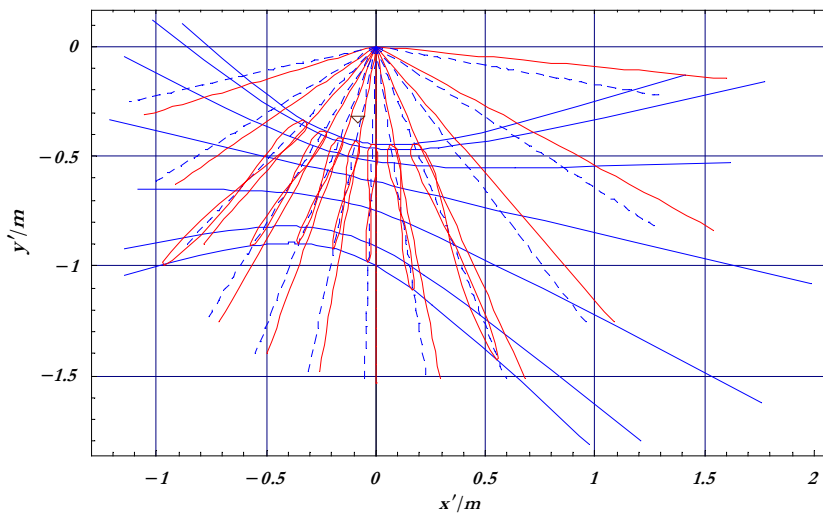
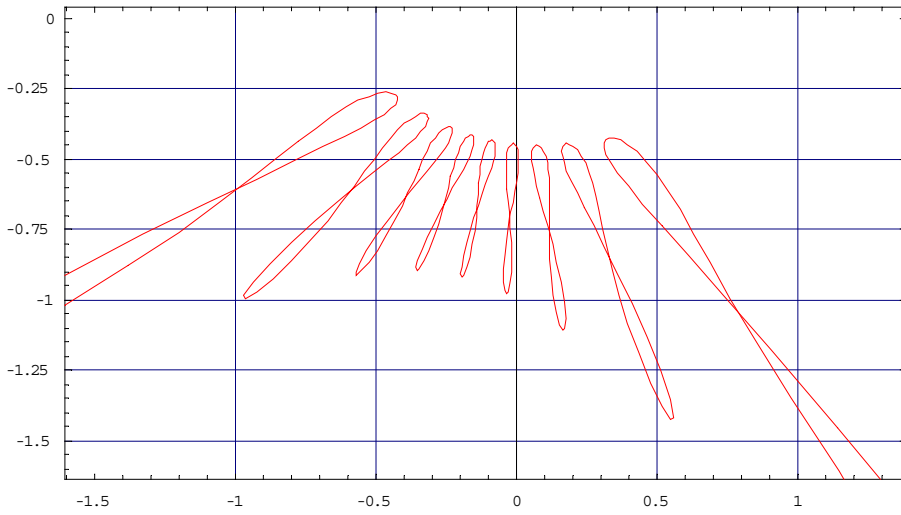
$$x'_0 = l \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha; \quad y'_0 = -l \cdot \sin\beta;$$

Beispiel:

$$x'_0 = -0,081 \text{ m}; y'_0 = -0,347 \text{ m};$$

Beispiel für die Zeitgleichungsschleifen siehe Abbildung :

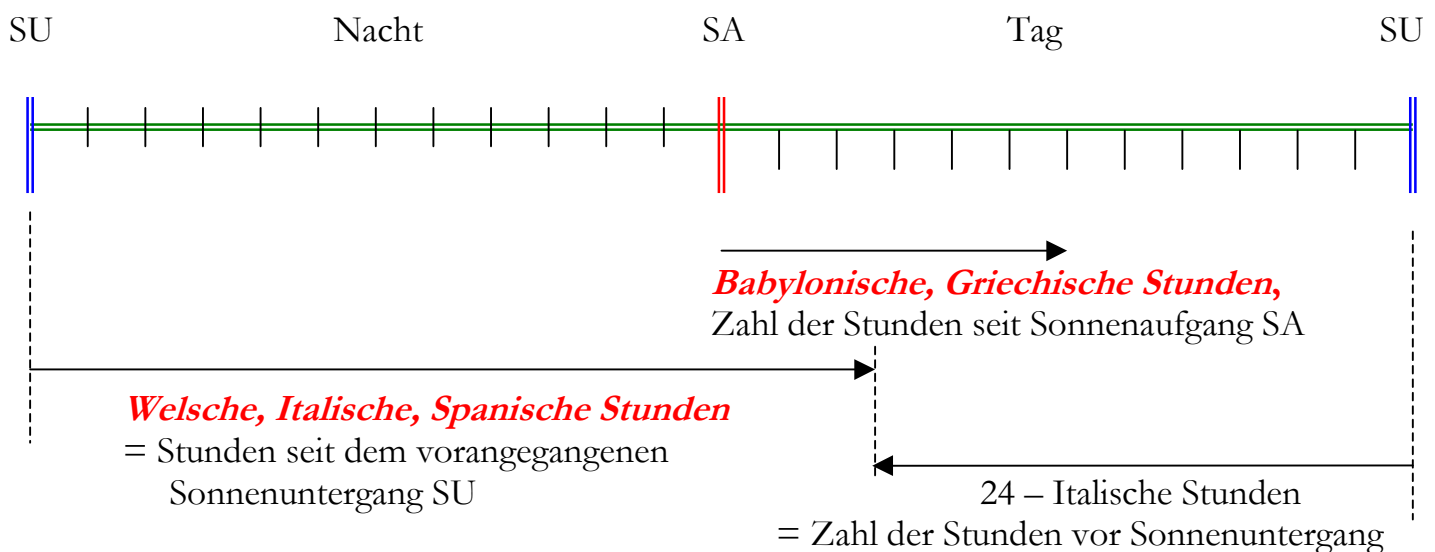
Auf der rechten Seite ist die 12h- Schleife eingetragen, der Abstrich entspricht dem Frühlingshalbjahr, der Aufstrich dem Herbsthalbjahr.



f) Babylonische und Italische Stunden:

Die Sonnenuhr des Peter Apian S.8 zeigt auch die Zahl der Stunden seit Sonnenaufgang (SA) an, man nennt sie *Babylonische* oder *Griechische* Stunden und die Zahl der Stunden seit dem vorangegangenen Sonnenuntergang (SU), sie heißen *Welsche*, *Italische* oder *Spanische* Stunden. Die letzteren kann man zu 24 h ergänzen und erhält die Zahl der Stunden vor Sonnenuntergang (SU).

Die Namen rühren daher, daß im alten Babylonien die Zählung der Stunden des 24-h-Tages mit dem Sonnenaufgang, bei den Bewohnern Italiens, Griechenlands und der Balearen mit dem Sonnenuntergang begann.



Indem man in die Formel (1) S. 14 die Höhe h null setzt, bekommt man den Stundenwinkel der Sonne beim Sonnenuntergang bzw. Sonnenaufgang:

$$\cos \tau_{SU} = -\tan \delta \cdot \tan \beta; \tau_{SA} = -\tau_{SU} = \text{Stundenwinkel für den Sonnenaufgang.}$$

Der Stundenwinkel für das Ende der b . Babylonischen Stunde ist damit

$$\tau_b(\delta) = 15^\circ \cdot b - \tau_{SU}(\delta) = 15^\circ \cdot b + \tau_{SA}(\delta)$$

und für das Ende der w . Italischen Stunde

$$\tau_w(\delta) = 15^\circ \cdot w + \tau_{SU}(\delta)$$

Da es sich bei dem Liniennetz für diese Stunden um Geraden handelt, genügt es im Gegensatz zu den Zeitgleichungsschleifen die Schattenpunkte für die 7λ - bzw. δ -Werte der Deklinationskurven zu berechnen.

$$i = 0 \dots 6; \lambda_i = 90^\circ + i \cdot 30^\circ; \delta_i = \text{asin}[\sin \varepsilon \cdot \sin \lambda_i]; \tau_{SU,i} = \text{acos}[-\tan \delta_i \cdot \tan \beta]$$

Der Stundenwinkel der wahren Sonne beim Ende der b. babylonischen Stunde, dh. b Stunden nach Sonnenaufgang ist in Abhängigkeit von λ bzw. δ

$$\tau_b(\delta_i) = 15^\circ \cdot b - \tau_{SU}(\delta_i)$$

Aus der Höhe h und dem Azimut a (1,2) S.14 erhält man die Koordinaten der Schattenpunkte für das Ende der b. Babylonischen Stunde x' und y' (Formeln S.11, 12 und (4) S. 14) in Abhängigkeit von b und δ .

$$h_{b,i} = \text{asin}[\sin \beta \cdot \sin \delta_i + \cos \beta \cdot \cos \delta_i \cdot \cos \tau_b(\delta_i)];$$

$$a_{b,i} = 2 \cdot \text{atan} \left[\frac{\cosh_{b,i} + \cos \beta \cdot \sin \delta_i - \sin \beta \cdot \cos \delta_i \cdot \cos \tau_b(\delta_i)}{\cos \delta_i \cdot \sin \tau_b(\delta_i)} \right]$$

$$x'_{b,i} = l \cdot \cos \beta \cdot \frac{\sin a_{b,i}}{\cos(\alpha - a_{b,i})}; y'_{b,i} = l \cdot \cos \beta \cdot \left[\frac{\tanh_{b,i} \cdot \cos \alpha}{\cos(\alpha - a_{b,i})} + \tan \beta \right]$$

Auf dieselbe Art können die Schattenpunkte für das Ende der w. Italischen Stunde berechnet werden.

In der Abbildung sind die Italischen und Babylonischen Linien dargestellt.

Die b. Babylonische und w. Italische Linie kreuzen sich auf der Stundengerade

$$\text{WOZ} = (b+w)/2;$$

gleichzeitig liegt der Kreuzungspunkt auf einer Deklinationkurve mit der Tageslänge $[24 - (w-b)]$ Stunden. Die Tageslänge T ist $2 \cdot \tau_{SU}$ und ergibt sich nach der Vorderseite zu

$$T = 2 \cdot \tau_{SU}^h = 2 \cdot \text{acos}(-\tan \delta \cdot \tan \beta)^h = [24 - (w-b)]h$$

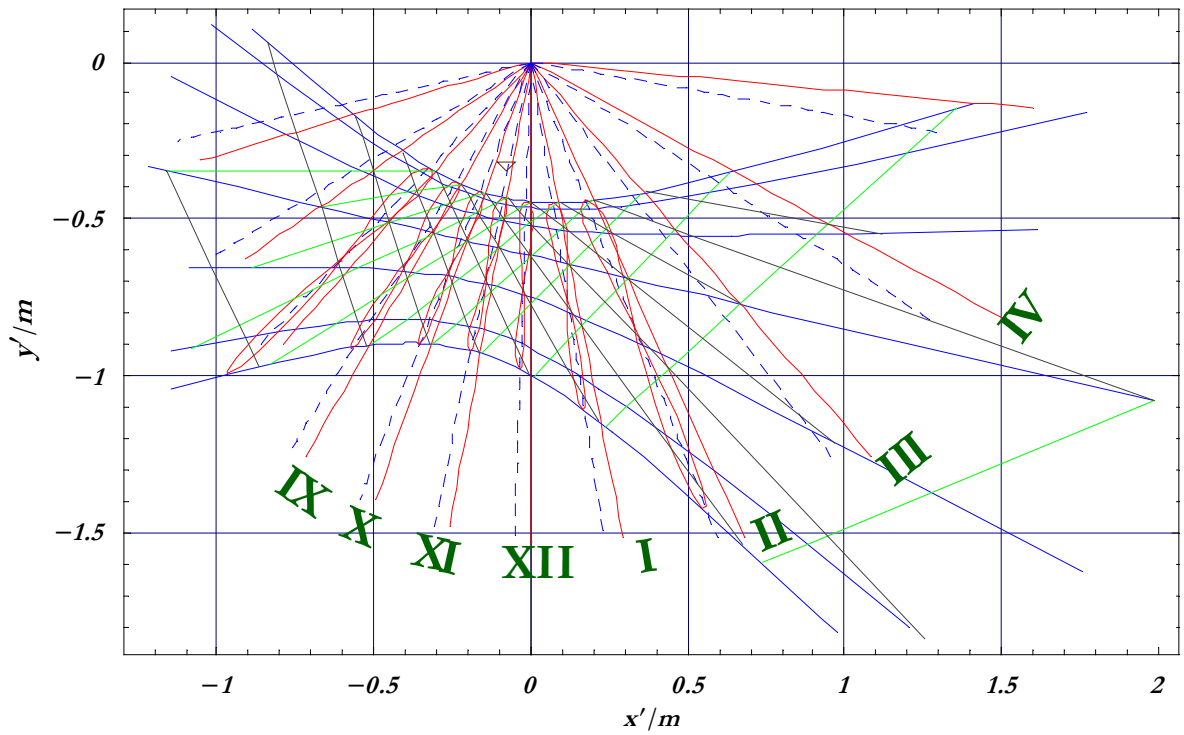
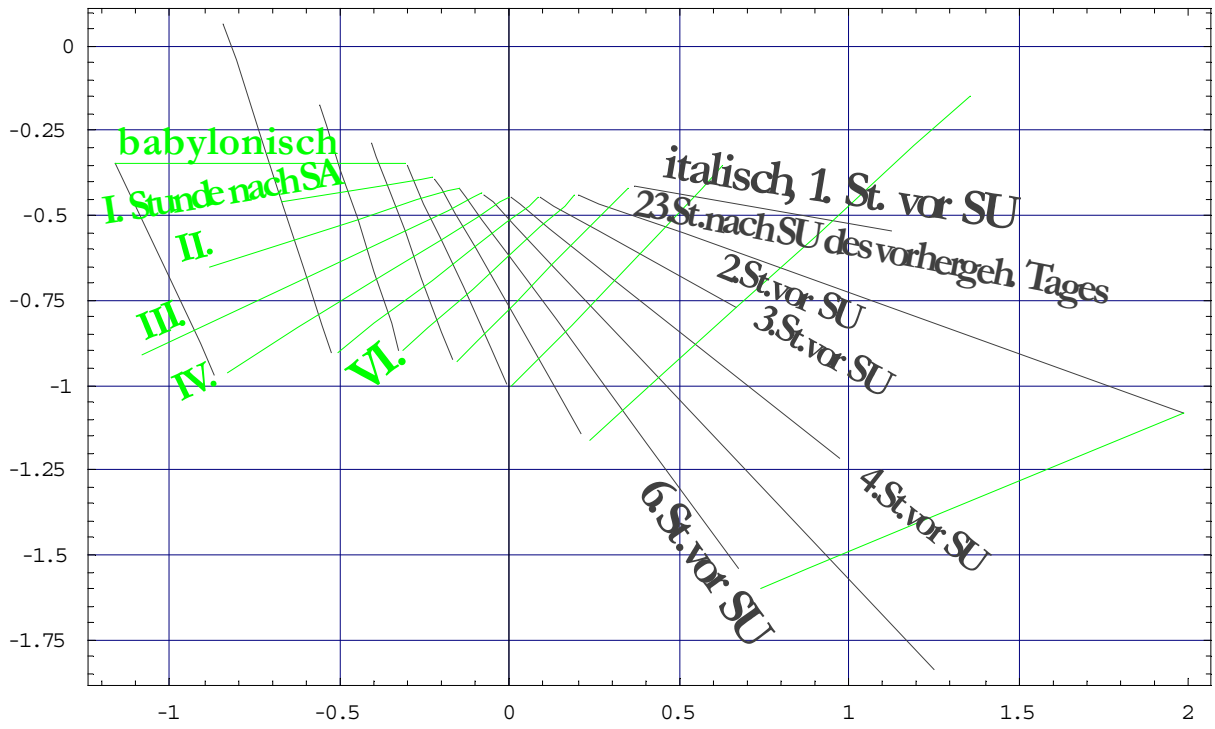
Beispiel:

Für die 6. Stunde vor SU ist $w = 18$ (Abb.) und für die 6. Stunde nach SA ist $b = 6$ dh.

$\text{WOZ} = 24/2 = 12$, wie aus der Abbildung ersichtlich.

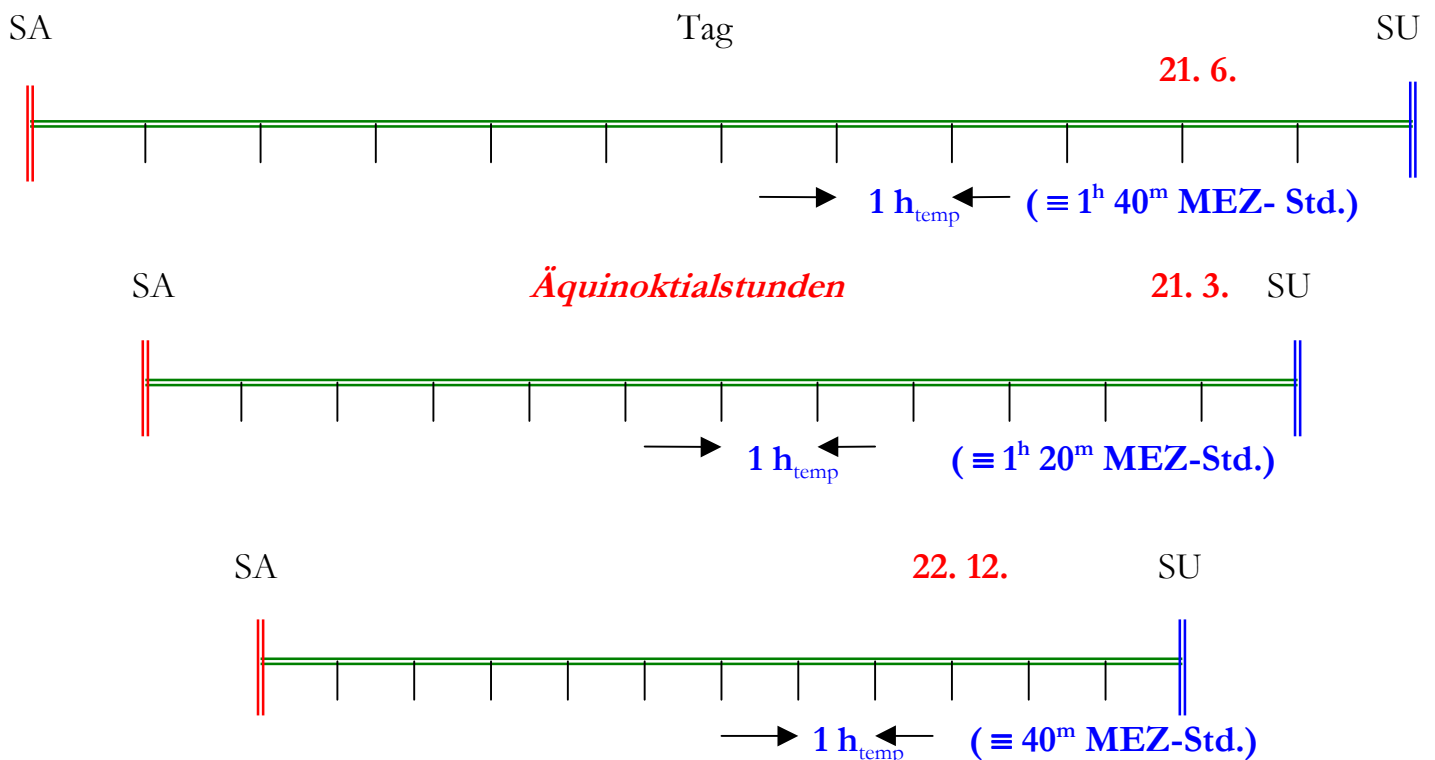
$$T = (24 - 12) h = 12 h \equiv 12 \cdot 15^\circ = 180^\circ$$

$\text{acos}(-\tan \delta \cdot \tan \beta) = 90^\circ \Rightarrow \delta = 0^\circ$ dh. der Kreuzungspunkt liegt auf der Äquinoktialgerade.



g) Temporalstunden

In der Klosterrepublik Athos sind noch heute sog. *Temporal-*, *Antike* oder *Temporäre* Stunden im Gebrauch, die vor dem 14. Jahrhundert häufig verwendet wurden. Dabei wird der Tag von Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang in 12 gleiche Teile geteilt und diese Teile von Sonnenaufgang an als Tagstunden gezählt. Die Nachtstunden wurden vom Sonnenuntergang an gezählt, wobei die Zeit von Sonnenuntergang bis Sonnenaufgang ebenfalls in 12 gleiche Teile geteilt wurde. Die Länge dieser Temporalstunden ist nicht gleich und hängt von der Jahreszeit ab, deshalb der Begriff *temporär*. Die Nachtstunden und Tagstunden sind nur zur Zeit der Tag- und Nachtgleichen gleich lang, man nennt sie *Äquinoktialstunden*.



Die Tageslänge T ist $2 \cdot \tau_{SU}$ und ergibt sich nach Seite 25 zu

$$T = 2 \cdot \tau_{SU}^h = 2 \cdot \text{acos}(-\tan \delta \cdot \tan \beta)^h ; 1 \text{ Temporalstunde in Abhängigkeit von der Declination } \delta \text{ wird damit } 1h_{temp}(\delta) = \frac{T}{12} = \frac{1}{6} \cdot \tau_{SU}(\delta) = \frac{1}{6} \cdot \text{acos}(-\tan \delta \cdot \tan \beta)^h .$$

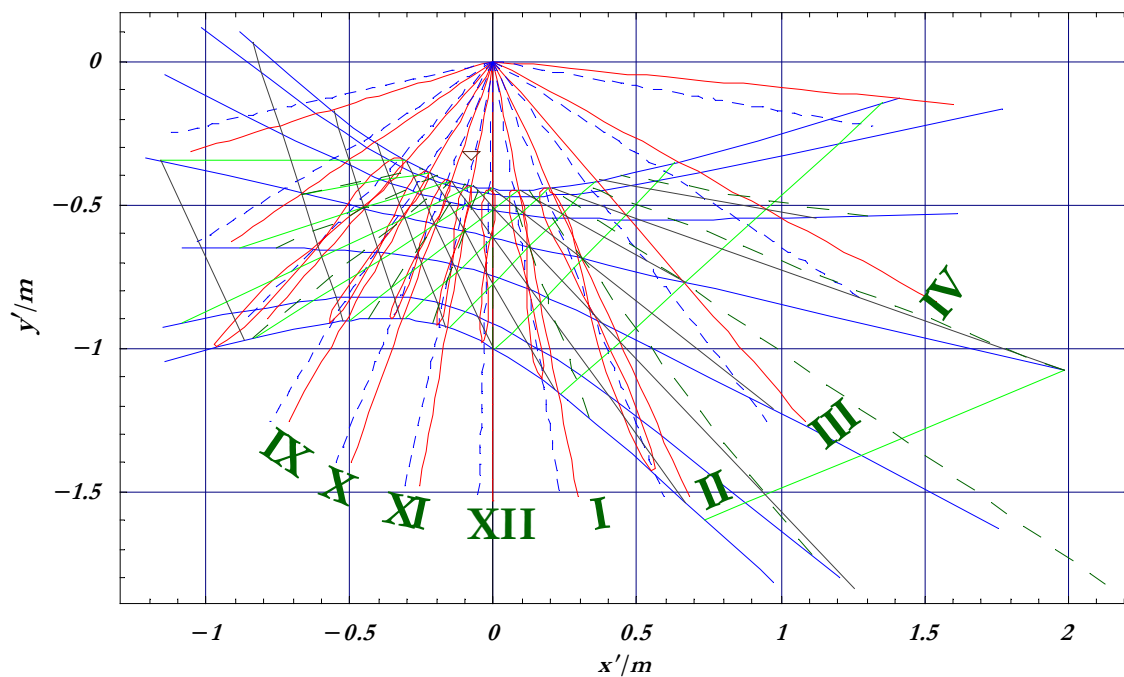
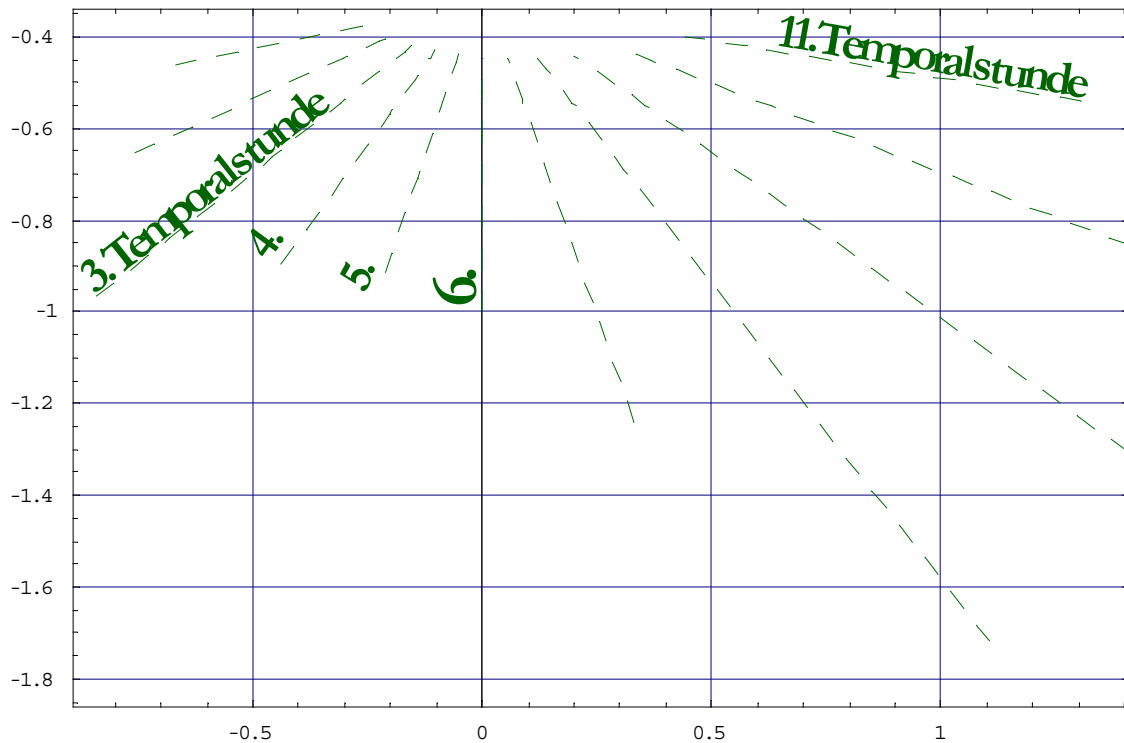
Der Stundenwinkel der k . Temporalstunde der wahren Sonne ist

$$\tau_{temp}(\delta) = \left(\frac{k}{6} - 1 \right) \cdot \tau_{SU}(\delta) = \left(\frac{k}{6} - 1 \right) \cdot [\text{acos}(-\tan \delta \cdot \tan \beta)]$$

Für $k = 0$ ist $\tau_{temp}(\delta) = -\tau_{SU}(\delta) = \tau_{SA}(\delta)$ und für $k = 12$ ist $\tau_{temp}(\delta) = \tau_{SU}(\delta)$ (Horizont)

Die Temporalstunden ergeben in unseren Breiten praktisch Geraden (für $k = 0, 6$ und 12 exakt, ansonsten leicht S – förmig mit Wendepunkt an der Äquinoktialgeraden), sodaß die Berechnung völlig äquivalent zu Kapitel f) vonstatten geht.

Beispiel:



h) Azimut und Höhe

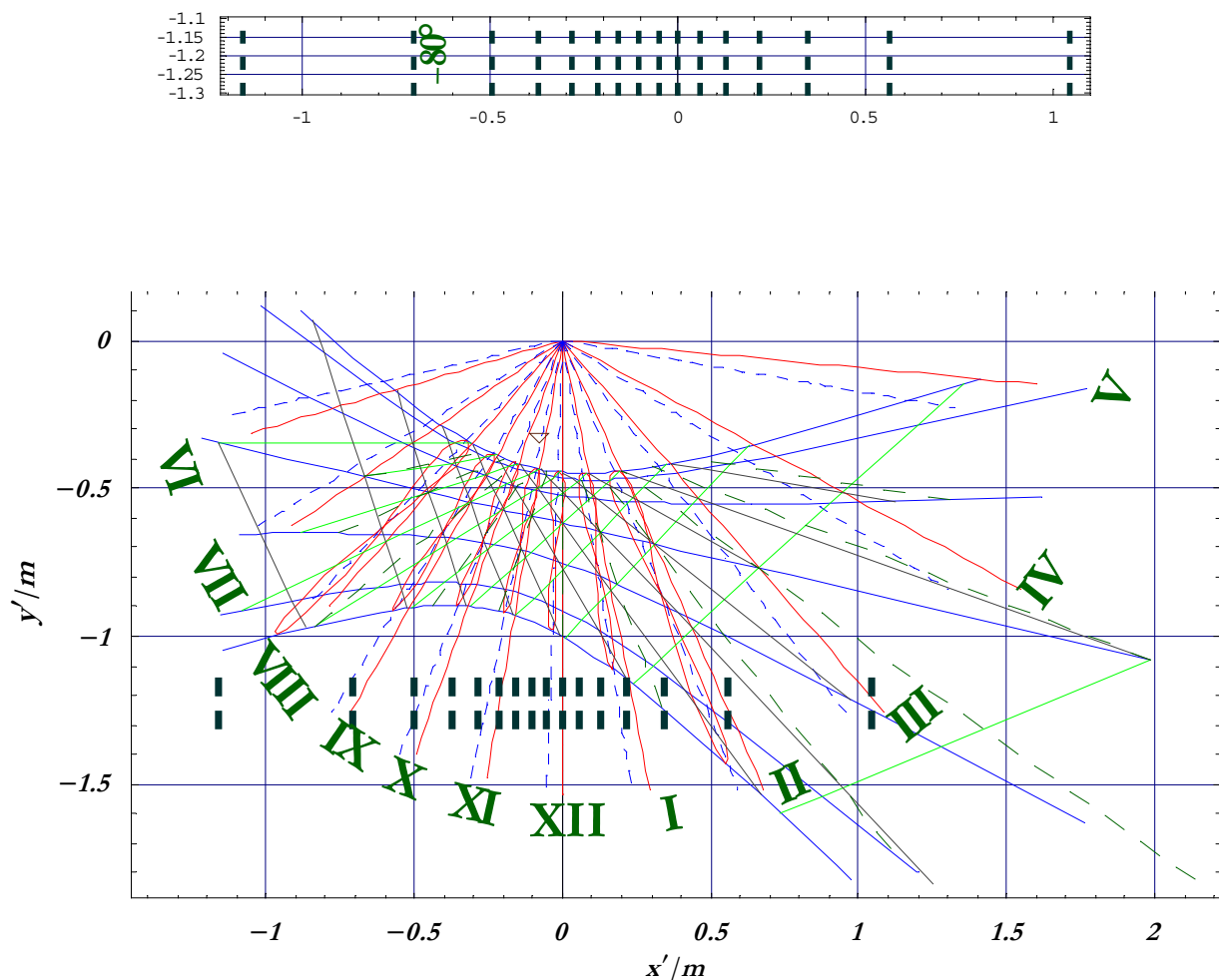
In seltenen Fällen zeigen Sonnenuhren auch Höhe und Azimut der wahren Sonne an, zB. auch die Sonnenuhr von Peter Apian an der Burg Trausnitz in Landshut.

Azimut:

Nach Formel S. 12 wird die x' – Koordinate in Abhängigkeit des Azimuts berechnet und auf der Uhrenfläche eingetragen.

$$i = 1..16; a_i = -90^\circ + (i - 1) \cdot 10^\circ; x'_i = l \cdot \cos\beta \cdot \frac{\sin a_i}{\cos(\alpha - a_i)};$$

Beispiel:



Die Linien müssen in Wirklichkeit in das Innere der Uhrenfläche als vertikale Striche eingezeichnet werden, da sie sonst nicht vom Schattenpunkt erreicht werden können. In der Abbildung wurde dies aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht beachtet.

Höhe

Es handelt sich um Kurven, sodaß man sich mehr als die üblichen 7 Deklinationswerte vorgeben muß. Als Höhenwerte wählt man $10^\circ \dots 60^\circ$.

$$i_\delta = 1 \dots 95; \delta_i = -23,44^\circ + 0,5^\circ \cdot (i_\delta - 1);$$

$$i_h = 1 \dots 6; h_i = 10^\circ \cdot i_h$$

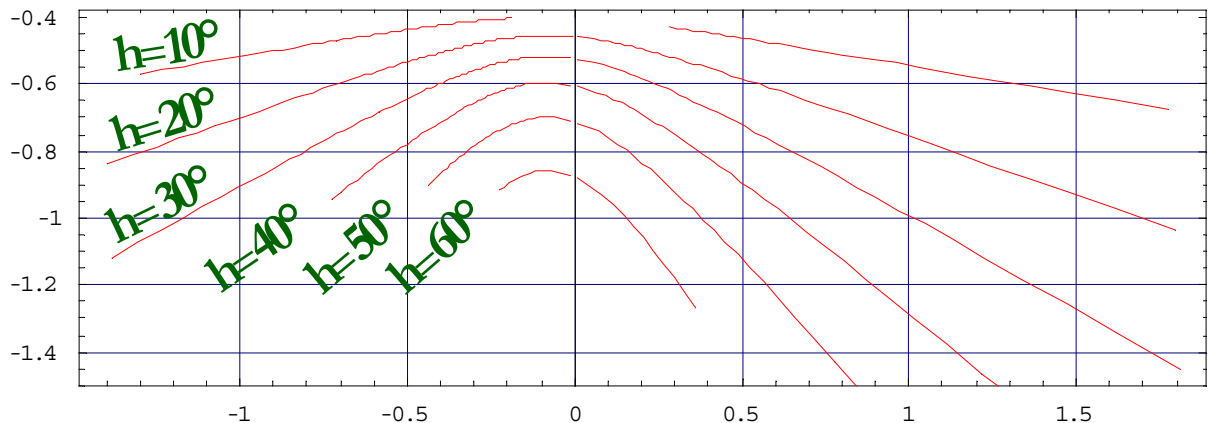
Dann erhält man die dazugehörigen Stundenwinkel der wahren Sonne durch Umstellen der Gleichung (1) S. 14 und schließlich die entsprechenden Azimut-, x' - und y' -Werte.

$$\tau_{hi}(\delta_i) = -a \cos \left[\frac{\sin h_i - \sin \beta \cdot \sin \delta_i}{\cos \beta \cdot \cos \delta_i} \right];$$

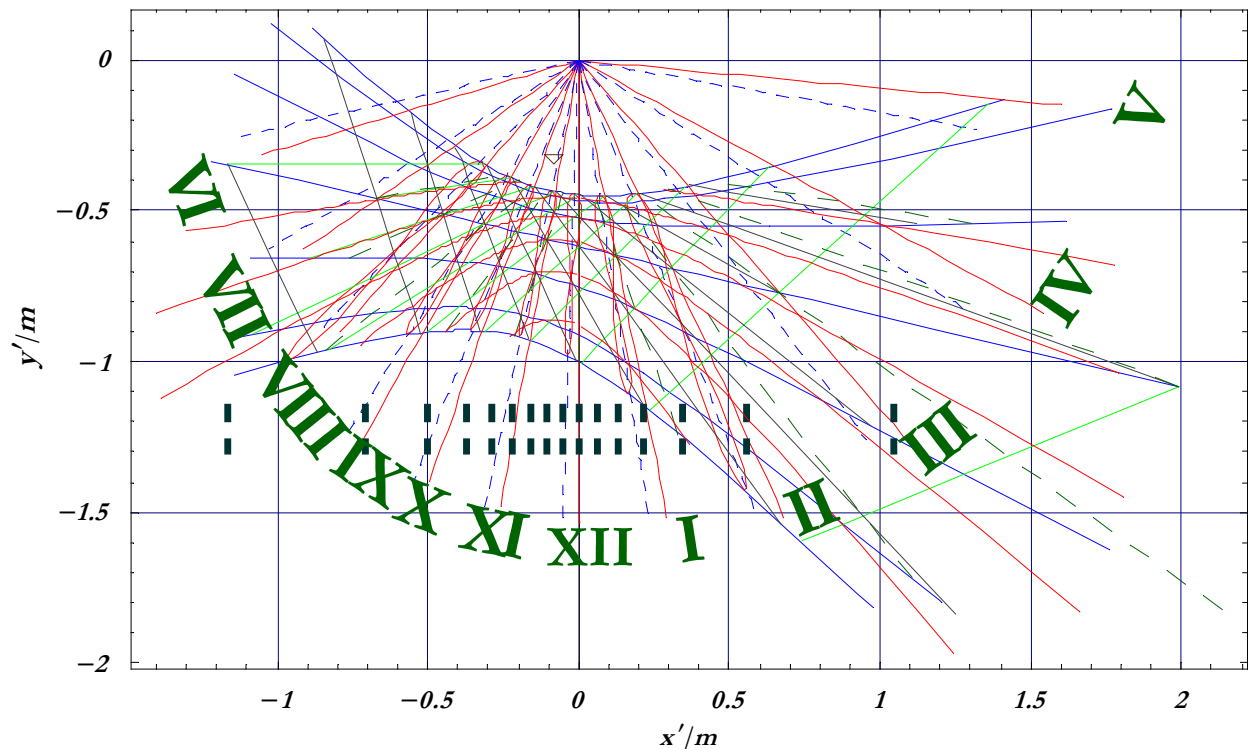
$$a_{hi}(\delta_i) = 2 \cdot \operatorname{atan} \left[\frac{\cosh_i + \cos \beta \cdot \sin \delta_i - \sin \beta \cdot \cos \delta_i \cdot \cos \tau_{hi}(\delta_i)}{\cos \delta_i \cdot \sin \tau_{hi}(\delta_i)} \right]$$

$$x'_{hi} = l \cdot \cos \beta \cdot \frac{\sin a_{hi}(\delta_i)}{\cos[\alpha - a_{hi}(\delta_i)]}; y'_{hi} = l \cdot \cos \beta \cdot \left[\frac{\tanh_i \cdot \cos \alpha}{\cos[\alpha - a_{hi}(\delta_i)]} + \tan \beta \right]$$

Beispiel:



Die Lücke bedeutet, daß die wahre Sonne um die Mittagszeit bei der Breite von $48,547^\circ$ (es wurden bei allen Beispielen die Daten von Beispiel S. 16 verwendet) keine so geringe Höhe (10°) erreicht. Bei der nächsten Abbildung ist das gesamte Liniennetz dargestellt, auf Seite 19 das gesamte Liniennetz einer Westuhr $\alpha = 83,12^\circ$ an einem Ort mit der Breite $\beta = 48,547^\circ$ und $12,08^\circ$ östlicher Länge.



Literatur:

- [1] René R. J. Robr „Die Sonnenuhr“ (Callwey Verlag München)
- [2] dtv-Atlas zur Astronomie, Deutscher Taschenbuch Verlag
- [3] Astronomical Almanac (englischsprachiges Jahrbuch)
- [4] W. Wepner „Mathematisches Hilfsbuch für Studierende und Freunde der Astronomie“, Treuge sell-Verlag Dr. Vehrenberg
- [5] Hans Oleak „Die Ausrichtung einer Wandsonnenuhr“, Sterne u. Weltraum, Februar 2004
- [6] W. Hanke, „Ermittlung der Deklination einer vertikalen Wand mit Hilfe von Sonnenazimut- und Streckenmessungen“, Die Sterne, 59. Band, Heft 1, 1983, S.42
- [7] Handbuch für Sternfreunde, Springer
- [8] O. Montenbruck, Th. Pfleger, „Astronomie mit dem Personal Computer“, Springer
- [9] Praktische Sonnenuhr-Kunst, Joseph Ferchel, Reprint Verlag Th. Schäfer
- [10] Ebene Sonnenuhren, Dr. math. ETH Heinz Schilt, Höbeweg 5, CH 2502 BIEL, Selbstverlag

Das Literaturverzeichnis ist nicht vollständig, die angegebenen Bücher und Artikel enthalten aber umfangreiche Sekundärliteratur.

Bei Fragen und Anregungen bitte ich um eine E-Mail an j.hingsammer@fbm.edu.