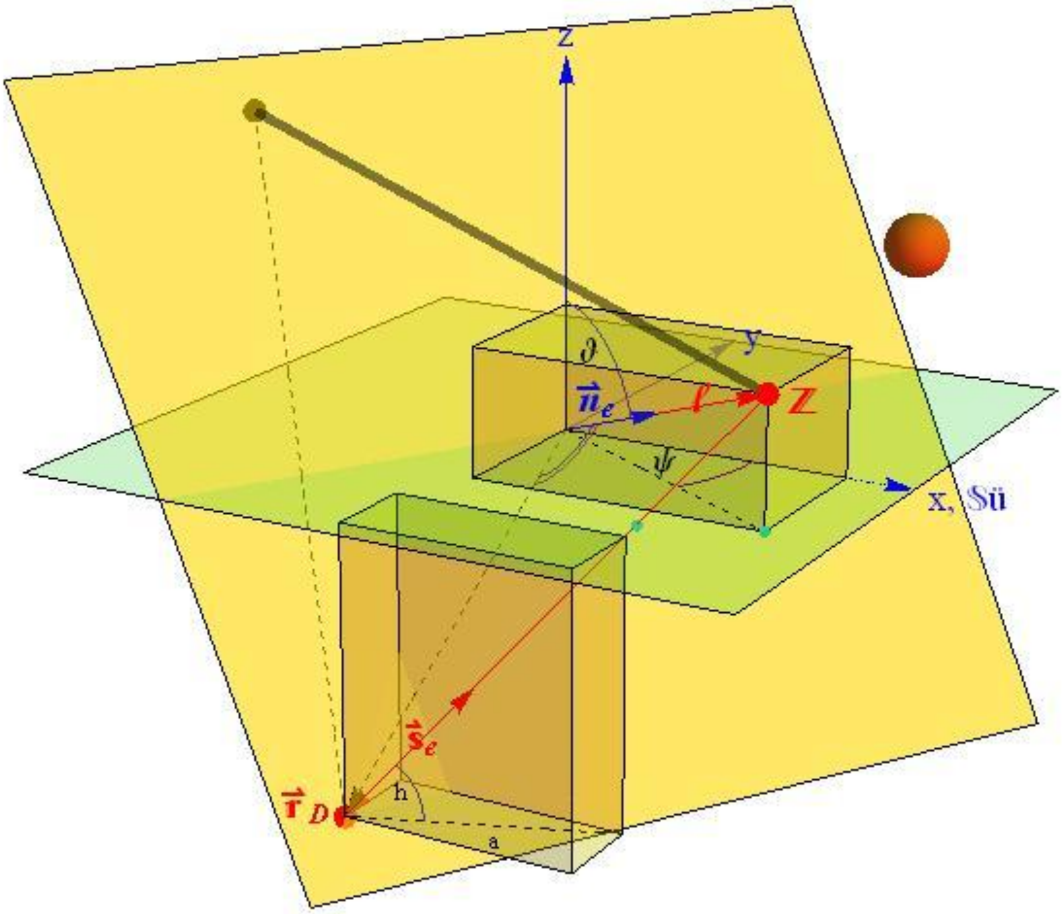
1) Anwendung der Vektorrechnung bei Sonnenuhren[1]

Die Konstruktion des Ziffernblattes bei beliebig gerichteten ebenen Flächen wird mit trigonometrischen Methoden relativ kompliziert, siehe i) „Inklinierende Sonnenuhren“.
Die einfachere vektorielle Behandlung lässt sich mit der folgenden Abbildung erklären.



Die gelbe Fläche ist die Ziffernblattebene, die grüne Fläche die Horizontfläche mit der nach Süden gerichteten x-Achse und die linke gestrichelte Linie die Schattenlinie bei einer bestimmten wahren Ortszeit und Deklination der Sonne.

[1]Siehe auch Diplomarbeit Caroline Posch „posch07_sonnenuhren.pdf“

Der Einheitsvektor in Richtung Sonne ist

$$\vec{s}_e = \left(\cos a \cdot \cos h, -\cos h \cdot \sin a, \sin h\right)$$

mit h als Höhe und a als Azimut., der Azimut a in der Abbildung ist negativ (Sonnenstand vormittags).

Der Einheitsvektor $\vec{n}_e$ ist die Normale zur Ziffernblattebene

$$\vec{n}_e = \left(\sin\vartheta \cdot \cos\psi, \sin\vartheta \cdot \sin\psi, \cos\vartheta\right)$$

Bei östlicher Wandabweichung ist ψ positiv, dh. in der Abbildung negativ ψ = -30°, ϑ = 70°.

Der Ortsvektor des Polstabendes ist

$$\vec{Z} = \ell \cdot \vec{n}_e$$

ℓ ist die Länge des Lotes von Z auf die Ziffernblattebene ($=Z_0$ auf Seite 11), der Lotendpunkt ist der Ursprung O. Der Polstab ist die dicke Linie in der Abbildung.

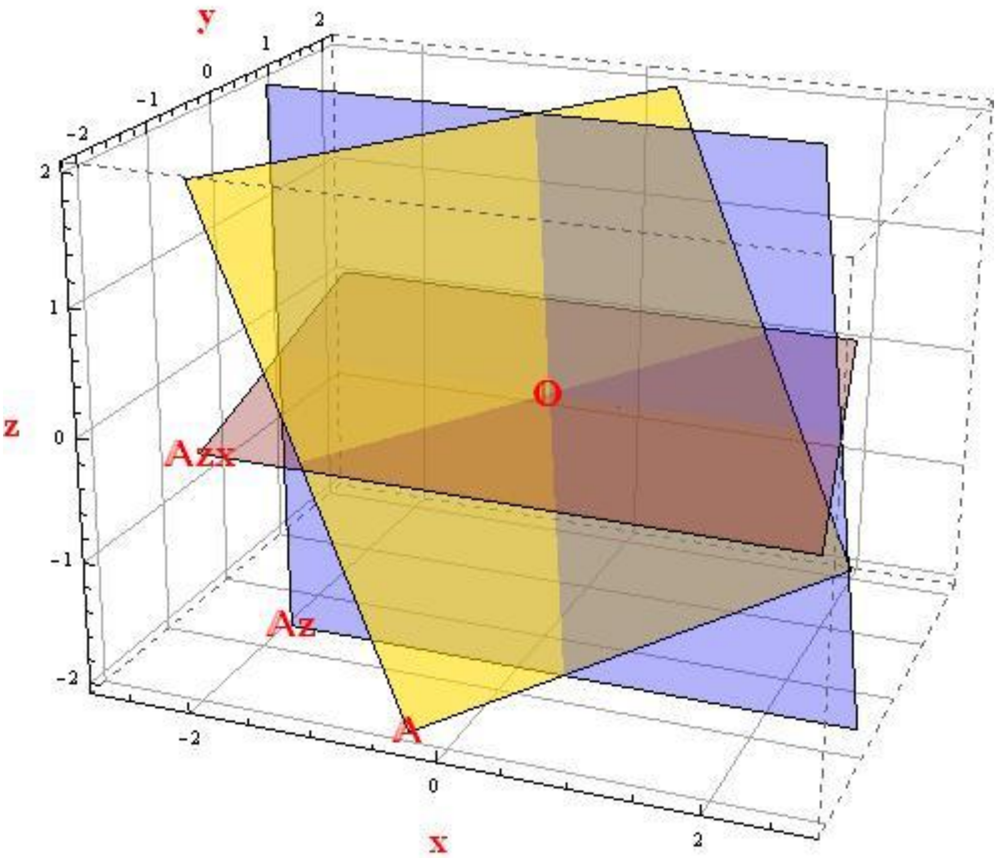
Der Durchstoßpunkt des Schattens des Sonnenstrahls von Z durch die Ziffernblattebene ergibt sich zu

$$\vec{r}_D = \vec{Z} - \frac{\ell}{\vec{s}_e . \vec{n}_e} \cdot \vec{s}_e$$

$$\frac{\ell}{\vec{s}_e . \vec{n}_e} = Abstand\left(Z - r_D\right);\ \vec{s}_e . \vec{n}_e = \cos\mu;$$

μ ist der Winkel bei Z im rechtwinkligen Dreieck O-Z-r_D .

In Abhängigkeit von h, a und dem Stundenwinkel τ im Verlaufe eines Tages und Jahres lässt sich r_D im Dreidimensionalen berechnen , es ergeben sich die Stunden- und Tagebögen im Raum. Um diese auf einer zweidimensionalen x-y Fläche zu erhalten, benötigt man zwei Drehungen, die anhand der folgenden Abbildung gezeigt werden sollen. Zunächst wird die Ziffernblattebene um –(90° + ψ) um die z-Achse gedreht, der Punkt A wandert nach Az, anschließend wird diese Ebene um –ϑ um die x- Achse in die x-y-Ebene hereingedreht, die Ebenennormale zeigt nun in die z-Richtung, der Punkt A wird zu Azx.



Die erste und zweite Drehung lautet in Matrizendarstellung

$$\Re 1 = \begin{pmatrix} \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ -\cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \Re 2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix};$$

Die Gesamtdrehung ist

$$\Re = \Re_2.\Re_1 = \begin{pmatrix} -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ -\cos\vartheta\cos\psi & -\cos\vartheta\sin\psi & \sin\vartheta \\ \cos\psi\sin\vartheta & \sin\vartheta\sin\psi & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Die Anwendung auf den Durchstoßpunkt liefert

$$\vec{r}_D' = \mathfrak{R}.\vec{r}_D = \begin{pmatrix} \dfrac{\ell \cosh \sin(a+\psi)}{\cos\vartheta \sinh + \cosh \cos(a+\psi)\sin\vartheta} \\ \ell\left(-\dfrac{1}{\cos(a+\psi)\coth + \cot\vartheta} + \dfrac{1}{\sec(a+\psi)\tanh + \tan\vartheta}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Vertikale Sonnenuhr</u> (vergleiche S.11, -α → ψ)

$\vartheta = 90°$, $\psi = \alpha_{\text{Wand}}$ (östliche Wand hat positives ψ),

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\psi & \sin\psi & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_D' = \mathfrak{R}.\vec{r}_D = \begin{pmatrix} \ell \tan(a+\psi) \\ -\ell \sec(a+\psi)\tanh \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Horizontale Sonnenuhr:</u>

$\vartheta = 0°$, $\psi = 0°$, $\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{r}_D' = \mathfrak{R}.\vec{r}_D = \begin{pmatrix} \ell \coth \sin a \\ \ell \cos a \coth \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Nullpunkt ist immer das Lot von Z auf die jeweilige Ebene, die Normale der gedrehten Fläche zeigt stets in z-Richtung

$$\vec{n}_e' = \Re . \vec{n}_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für die in die x-y-Ebene gedrehten Durchstoßpunkte $\vec{r}_D'$ ist natürlich die z-Komponente immer 0.

Beispiel von S.16

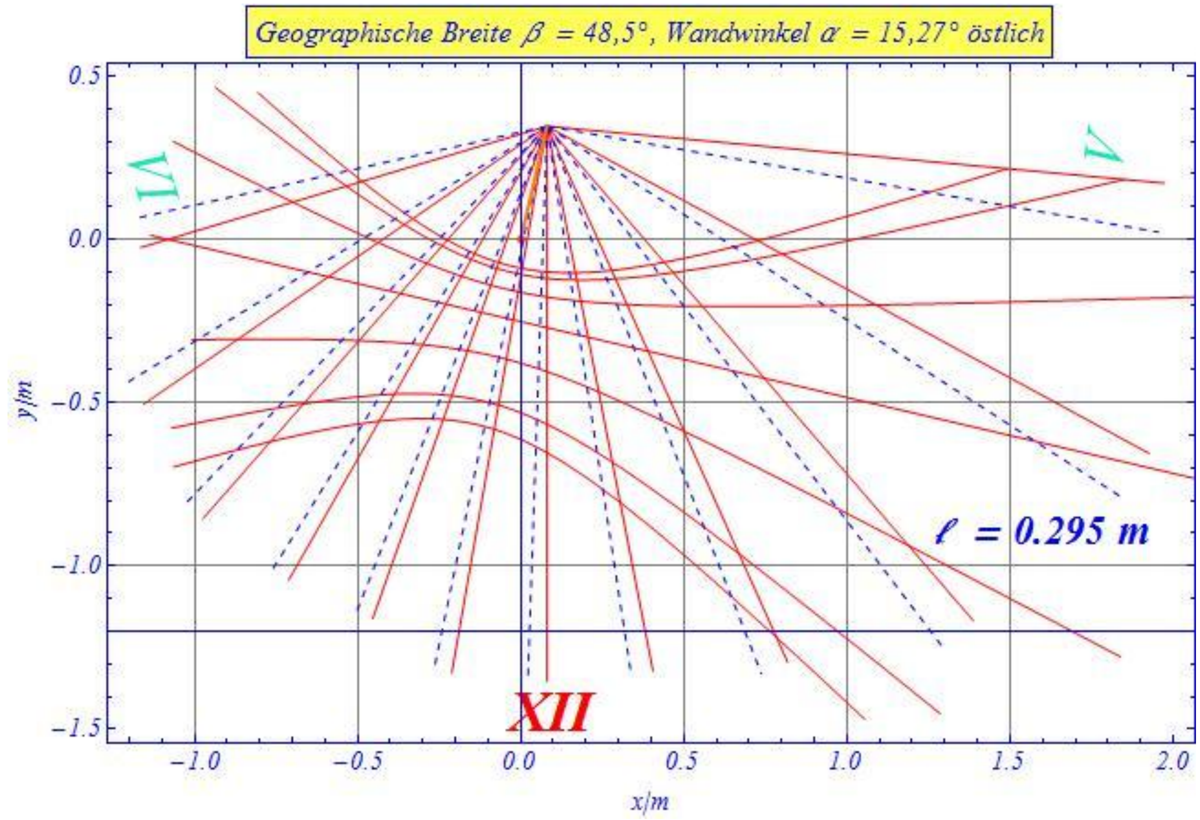
Unter Verwendung der Formeln S.14 und 15 erhält man aus den Ekliptischen Längen λ_n die Deklinationen δ_n und die τ_i – Werte.

Nr.	λ	δ	$\hat{\delta}$
1	90	23.44	0.409105
2	120	20.151	0.351701
3	150	11.4723	0.20023
4	180	0	0
5	210	-11.4723	-0.20023
6	240	-20.151	-0.351701
7	270	-23.44	-0.409105

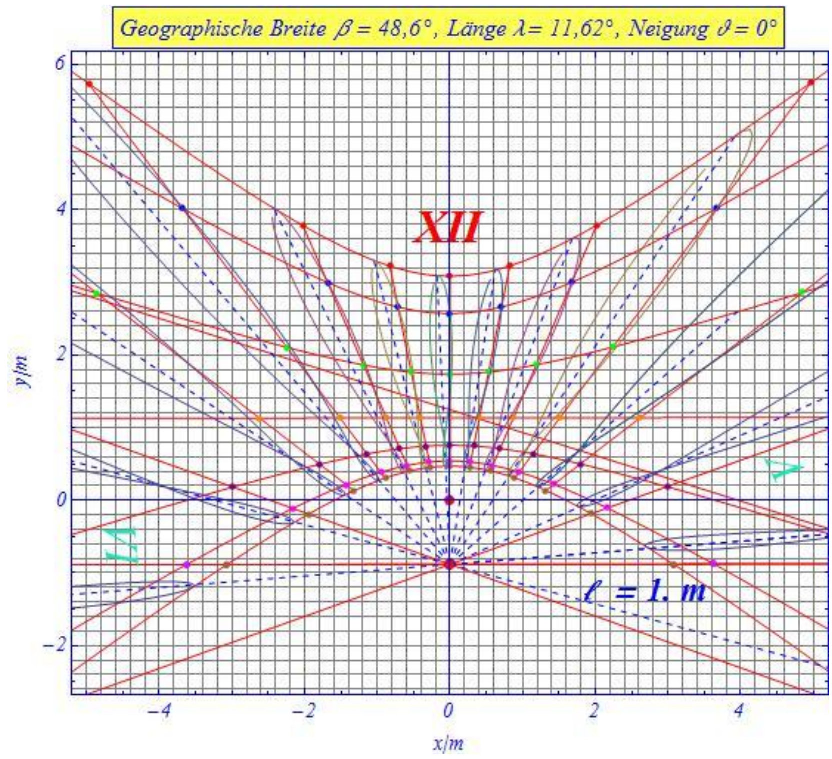
Nr.	T/h	$\tau°$	$\tau_{MEZ}°$
1	6	-90.	-92.92
2	7	-75.	-77.92
3	8	-60.	-62.92
4	9	-45.	-47.92
5	10	-30.	-32.92
6	11	-15.	-17.92
7	12	0.	-2.92
8	13	15.	12.08
9	14	30.	27.08
10	15	45.	42.08
11	16	60.	57.08
12	17	75.	72.08
13	18	90.	87.08

Der Stundenwinkel für MEZ nach (7) S.16 wird ohne Zeitgleichung angegeben.
Nach den Formeln 1 und 2 Seite 14 werden $h_{i,n}$ und $a_{i,n}$ in Abhängigkeit von λ_n bez. δ_n und τ_i berechnet und in die jeweilige Formel für $r_D´$ eingesetzt (Rechenprogramme).

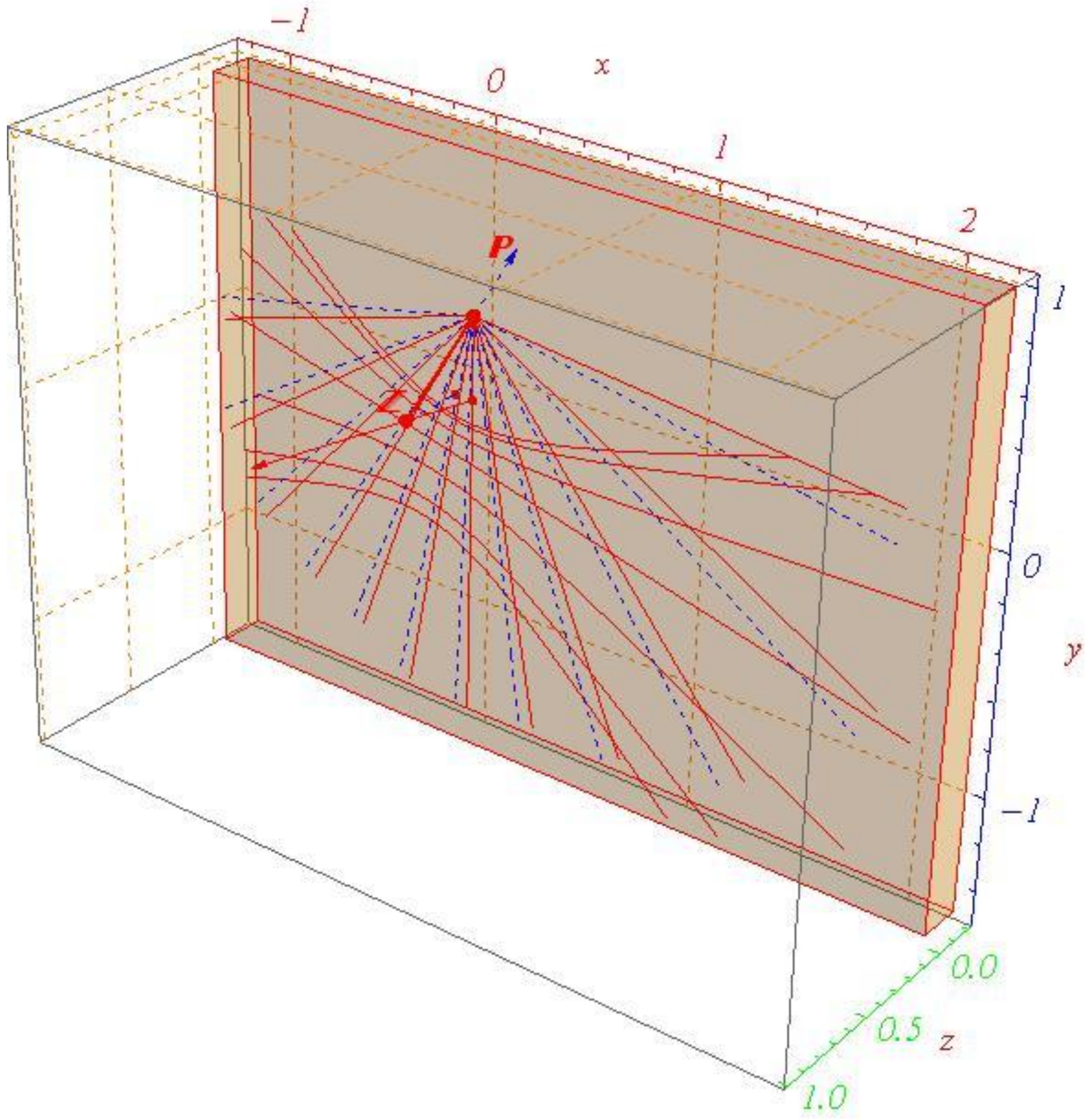
Daraus erhält man Tagebögen und Stundenlinien, indem man bei festem δ_n τ_i variiert (Tagebogen) oder bei festem τ_i δ_n variiert (Stundenlinie).



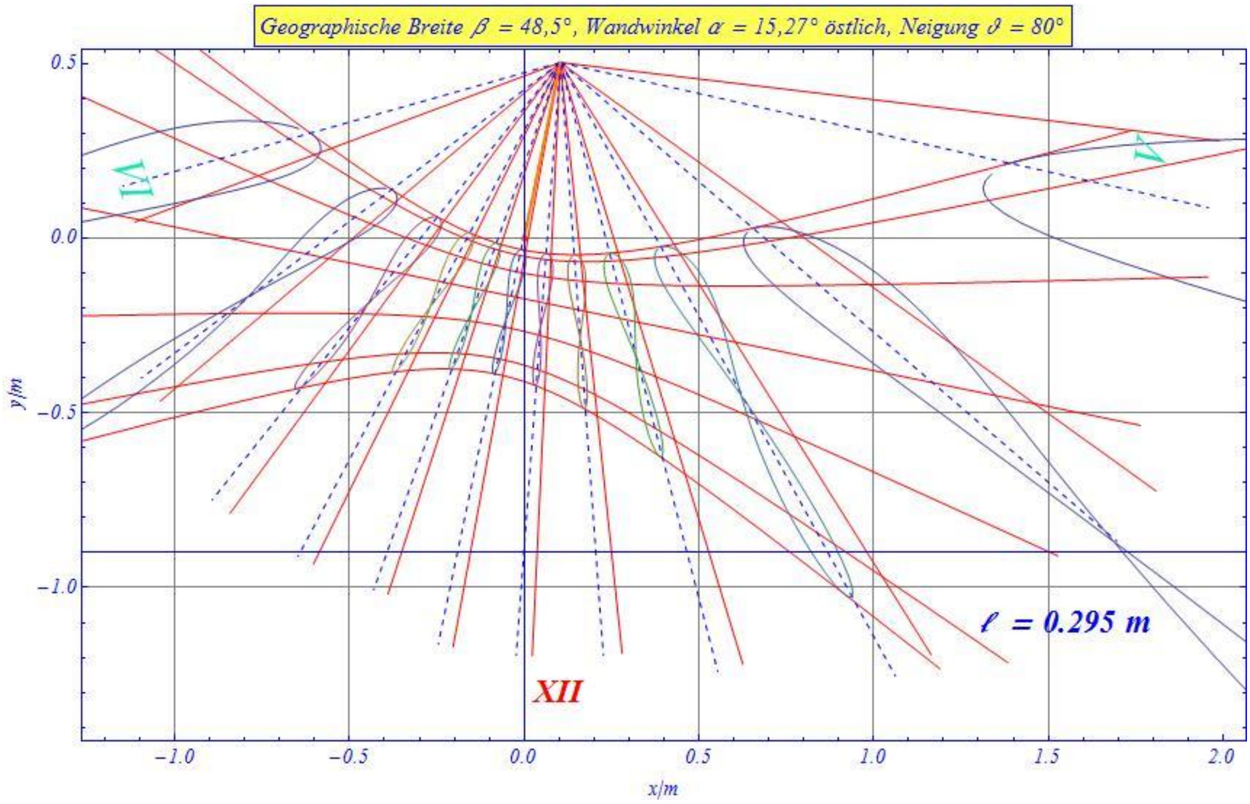
Horizontale Sonnenuhr :

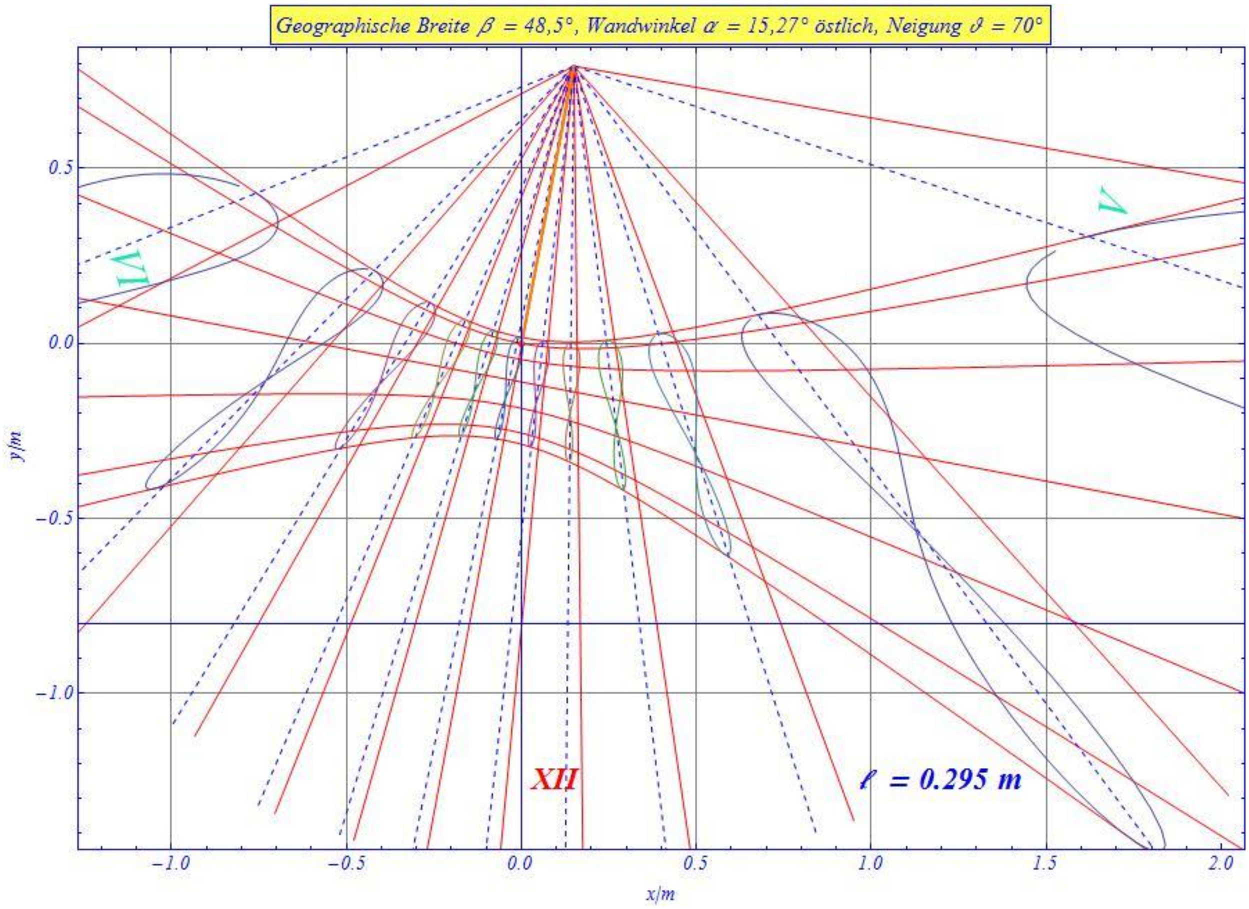


Vertikale Sonnenuhr, räumlich dargestellt. Der blaue Pfeil bei P zeigt in Richtung Polarstern, der rote Pfeil nach Süden.



Inklinierende Sonnenuhren ($\alpha = \psi$) :


Geographische Breite β = 48,5°, Wandwinkel α = 15,27° östlich, Neigung ϑ = 80°
VI
V
XII
ℓ = 0.295 m
y/m
x/m


Geographische Breite β = 48,5°, Wandwinkel α = 15,27° östlich, Neigung ϑ = 70°
VI
V
XII
ℓ = 0.295 m
y/m
x/m