Vorkurs Mathematik-Physik, Teil 6

©2016 A. Kersch

1 Lineare Gleichungssysteme

Ein **lineares Gleichungssystem** (LGS) besteht aus mehreren Gleichungen, in denen Variablen $x_1, ..., x_n$ nur in 1. Potenz auftreten. Ein LGS mit k Gleichungen und n Variablen hat folgendes Aussehen

$$\begin{aligned} A_{11}x_x + A_{12}x_2 + ... + A_{1n}x_n &= b_1 \\ A_{21}x_x + A_{22}x_2 + ... + A_{2n}x_n &= b_2 \\ &... \\ A_{k1}x_x + A_{k2}x_2 + ... + A_{kn}x_n &= b_k \end{aligned}$$

Obiges System läßt sich mit Hilfe von Matrizen und Vektoren in der folgenden Form ausdrücken

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & ... & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & ... & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & ... & A_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \qquad \text{Kurzform} \qquad A\vec{x} = \vec{b}$$

A heißt **Koeffizientenmatrix**. Die **erweiterte Matrix** des LGS $\left(A \mid \vec{b}\right)$ besteht darin, neben A den Vektor $\vec{b}$ als Spalte anzufügen.

Das LGS heißt **homogen**, wenn $b = 0$ und inhomogen, wenn $b \neq 0$. Im Falle $n = k$ (d.h. es gibt genau so viele Variable wie Gleichungen) nennt man das LGS **quadratisch**.

Beispiel: LGS gegeben. $\vec{x} =?$, $A =?$, $\vec{b} =?$, in Matrixform bringen, erweiterte Matrix?

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Dimensionsprobe

$$\underbrace{(2 \times 4)}_{A}\underbrace{(4 \times 1)}_{\vec{x}} = \underbrace{(2 \times 1)}_{\vec{b}}$$

Lösung

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \qquad \vec{b} = (2, 1)^T \\ A &= \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \left(A \mid \vec{b}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \\ A\vec{x} &= \vec{b} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

: Hier gibt es mehr Unbekannte als Gleichungen. Vorgehensweise: z.B. $x_3 = \lambda_1$ und $x_4 = \lambda_2$ wobei λ_1, λ_2 beliebig vorgegeben wird. Dann umformen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3x_1 + 5x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2\lambda_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3x_1 + 5x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 + \lambda_1 - \lambda_2 \\ 1 - 2\lambda_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 + \lambda_1 - \lambda_2 \\ 1 - 2\lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nun gibt es für jedes λ_1, λ_2 ein Gleichungssystem mit 2 Unbekannten, welches (meistens) eine eindeutige Lösung hat.

1.0.1 Gauß-Algorithmus

Ziel des Gauß-Algorithmus ist es, die Lösung eines LGS schematisch zu bestimmen. Dazu muss die erweiterte Matrix $\left(A \mid \vec{b}\right)$ so umgeformt werden, dass man mindestens eine Einzellösung (d.h. eine Variable) desd LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ sofort ablesen und dann in die anderen Gleichungen rückwärts einsetzen und die restlichen Variablen bestimmen kann. Besonders einfach wird dies, wenn die erweiterte Matrix auf die sogenannte **Zeilen-Stufen-Form** gebracht wurde

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (*) & * & * & * \\ 0 & (*) & * & * \\ 0 & 0 & (*) & * \end{array}\right)$$

(Beispiel für ein 3×3 LGS, * steht für eine beliebige Zahl). Die eingeklammerten Werte heißen **Pivotelemente** und haben eine besondere Bedeutung.

Um die erweiterte Matrix auf Zeilenstufenform zu bringen, sind folgende Operationen erlaubt

- Vertauschung von Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $\lambda \neq 0$
- Addition eines Vielfachen einer Zeile mit einer anderen

Beispiel: Lösung eines LGS mit Gauß-Verfahren

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Lösung: **(a)** Bestimme $\left(A \mid \vec{b}\right)$

$$\left(A \mid \vec{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

(b) Bringe auf Zeilenstufenform

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{-1} & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +\,|\cdot 1 \\ +\,|\cdot 1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{-1}+1 & 1+1 & (-2)+1 & 4+1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Nun Addition des -2 fachen der ersten Zeile zur dritten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ \boxed{2} & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +\,|\cdot 1 \end{array} \begin{array}{l} +\,|\cdot(-2) \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ \boxed{2}-2 & 1-2 & 1-2 & 2-2 \end{array}\right)$$

nun Addition der zweiten zur doppelten dritten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +\,|\cdot 1 \\ +\,|\cdot 2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & \boxed{-2}+2 & -1-2 & 0+5 \end{array}\right)$$

nun ist Zeilenstufenform erreicht

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

(c) nun schrittweises Auflösen, beginnend mit der letzten Zeile

$$\begin{aligned} -3x_3 &= 5 \qquad x_3 = -\frac{5}{3} \\ 2x_2 - x_3 &= 5 \qquad \Rightarrow \qquad 2x_2 - \left(-\frac{5}{3}\right) = 5 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = \frac{5}{3} \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 + \left(\frac{5}{3}\right) + \left(-\frac{5}{3}\right) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 1 \end{aligned}$$

Tipp: falls im LGS Brüche auftauchen, dann sollte man mit dem Hauptnenner die ganze Zeile durchmultiplizieren. Unbedingt das Auftreten von Brüchen innerhalb des Gauß-Verfahrens vermeiden.

1.0.2 Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

Beim Lösen von LGS können im Gauß-Verfahren folgende Fälle auftreten

1. Es entsteht eine Nullzeile der Form $(00...0 \mid 0)$. In diesem Fall kann eine Variable frei gewählt werden, allerdings kein Pivotelement. Man setzt diese Variable gleich einem Parameter t. Pro derartiger Zeile kann genau ein freier Parameter gewählt werden. Die Lösung heißt dann **Parameterschar**.
2. Es entsteht eine falsche Aussage in der Zeile $(00...0 \mid \neq 0)$. In diesem Fall gibt es keine Lösung des LGS!
3. Es gibt eine eindeutige Lösung wie im obigen Beispiel, d.h. weder Fall 1 noch Fall 2 treten auf.

Hier Beispiele für Fall 1 und 2
Beispiel: folgende erweiterte Matrix

$$\left(A \mid \vec{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +\mid\cdot 1 \\ +\mid\cdot 1 \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} +\mid\cdot 2 \\ \\ +\mid\cdot(-1) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

In der letzten Zeile ergibt sich dabei $(00...0 \mid -1)$, d.h. in eine Gleichung übersetzt $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -1$ und somit $0 = -1$. Das ist offensichtlich eine falsche Aussage. In diesem Fall ist das LGS nicht lösbar.
Beispiel: folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

erweiterte Matrix und Gauß

$$\left(A \mid \vec{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +\mid\cdot 1 \\ +\mid\cdot 1 \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} +\mid\cdot 2 \\ \\ +\mid\cdot(-1) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

In der letzten Zeile ergibt sich $(00...0 \mid -1)$ d.h. $0 = 0$. Das ist eine richtige Aussage, unabhängig davon, was wir für x_1, x_2 und x_3 einsetzen. Damit stehen zur Bestimmung der Lösungen nur noch zwei Gleichungen zur Verfügung: zwei Gleichungen aber drei Unbekannte. Hier kann eine Variable frei gewählt werden, aber keine Pivotelemente. Daher können hier x_1 oder x_2 nicht frei gewählt werden, aber $x_3 = t$. Somit folgt für die zweite und erste Gleichung

$$\begin{aligned} 2x_2 - 1 \cdot t &= 5 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}t \\ x_1 + \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}t\right) + 1 \cdot t &= 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}t \end{aligned}$$

insgesamt

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}t \\ \frac{5}{2} + \frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$