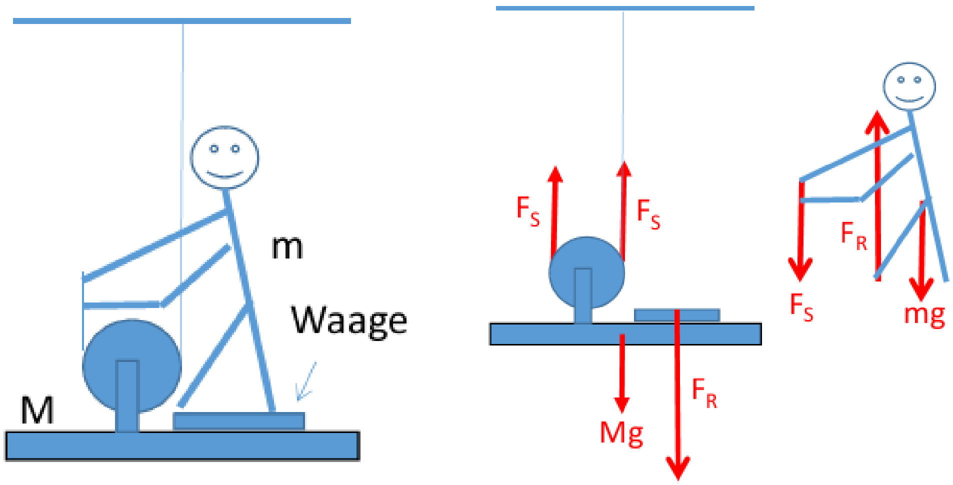
Lösungen zu Aufgaben Kräfte, Drehmoment

©2016 A. Kersch

Freischneiden Was zeigt die Waage ? Behandeln Sie die Person auf der Plattform auf der Waage als eindimensionales Problem. Freischneiden von Person und Plattform/Waage/Rolle erforderlich. Diese Aufgage soll klar machen, dass bei mechanischen Problemen eine systematische Zerlegung in Teilsysteme erforderlich ist.



Lösung:

Es ist angenommen, dass die Pattform nicht verkippt. Die beiden freigeschnittenen systeme sind (1) Plattform mit Rolle und Waage und (2) Person. Kräftegleichgewicht in 1: Die beiden Kräfte am Seil - genauer die Drehmomente, welche die Seilkräfte an der Rolle verusrachen - müssen im Gleichgewicht gleich groß sein. Auf die Plattform wirken ausserdem die Schwerkraft (Plattform mit Rolle und Waage) sowie die Last der Person. Kräftegleichgewicht in 2: auf die Person wirkt die Schwerkraft sowie die Seilkraft und die Reaktionskraft der Waage

$$\begin{aligned} 2F_S &= Mg + F_R \\ mg + F_S &= F_R \end{aligned}$$

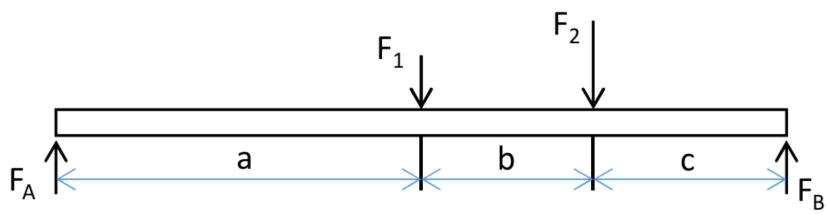
Elimination der Reaktionskraft

$$mg + F_S = 2F_S - Mg \qquad \Rightarrow \qquad F_S = (M+m)g$$

Anschliessend kann die Reaktionskraft berechnet werden

$$F_R = mg + F_S = mg + (M+m)g = (M+2m)g$$

Drehmomentgleichgewicht Ein waagerechter Balken auf seinen Stützen an seinen zwei Enden wird durch die senkrechten räfte $F_1 = 1000N$ und $F_2 = 3000N$ belastet. Es ist $a = 2.5m$, $b = 1.5m$, $c = 1m$. (a) man berechne die Auflagerkräfte F_a und F_b. (b) Man bestimme diejenige Kraft $F3$ nach Betrag, Richtung und Angriffspunkt (Abstand x vom linken Balkenende), die den Balken bei fehlenden Stützen an den Balkenenden im Gleichgewicht hält.



Lösung: Bezugspunkt für die Drehmomente sei das rechte Balkenende B. Die Momentenbedingung lautet:

$$
\begin{aligned}
0 &= cF_2 + (b+c)F_1 - (a+b+c)F_A \\
F_A &= \frac{(b+c)F_1 + cF_2}{a+b+c} = 1100N
\end{aligned}
$$

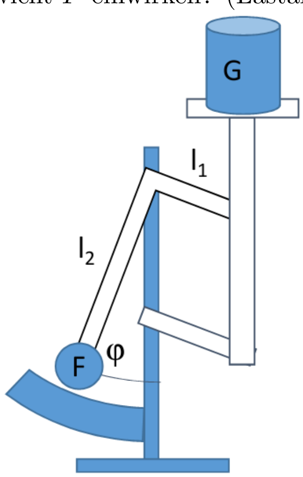
F_B ergibt sich aus dem Kräftegleichgewicht

$$F_B = F_1 + F_2 - F_A = 2900N$$

Gesucht ist jetzt die Kraft F_3, die betragsmäßig gleich $F_1 + F_2 = 4000N$ ist. Der Angriffspunkt, so dass ohne Stutzen F_A und F_B ein Gleichgewicht entsteht, erfordert wieder ein Momentengleichgewicht, wir wählen jetzt den linken Punkt A als Bezugspunkt

$$
\begin{aligned}
xF_3 &= aF_1 + (a+b)F_2 \\
x &= 3.625m
\end{aligned}
$$

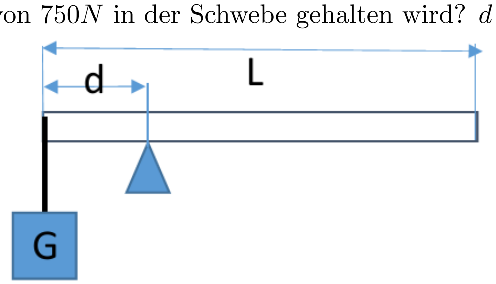
Briefwaage Welcher allgemeine Ausdruck ergibt sich für den Drehwinkel ϕ des Zeigers einer Briefwaage, wenn auf das gewichtslos zu denkende Hebelsystem einerseits das Gewicht G und andererseits das Gegeggewicht F einwirken? (Lastarm l_1 und Kraftarm l_2 bilden in jeder Lage einen rechten Winkel)



Lösung: Drehmomentgleichgewicht zwischen Zeiger F und Last G. Der Bezugspunkt ist der Schnittpunkt von l_1 und l_2. Der Zwischenwinkel zwischen Schwerkraft und l_1 ist $\cos\varphi$. Momentengleichgewicht:

$$l_2 F \sin\varphi = l_1 G \cos\varphi => \tan\varphi = \frac{l_1 G}{l_2 F}$$

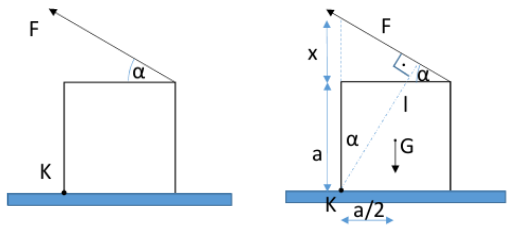
Schnellwaage Wieviel wiegt der auf dem Bild angegebene Träger, wenn er durch die am Ende angegebene Last von $750N$ in der Schwebe gehalten wird? $d = 0.6m$, $L = 3.4m$



Lösung: Die Gewichtskraft F des Trägers greift im Schwerpunkt $(1.70m)$ an. Der Bezugspunkt ist hier der Auflagepunkt. Momentengleichgewicht

$$0.6m \cdot 750N = (1.7m - 0.6m)F => F = 409N$$

Pyramidenbaustelle Ein Würfel aus Stein (Kantenlänge $a = 1m$, Dichte $\rho = 1800kg/m^3$), der sich um die linke untere Kante K drehen kann, soll durch ein an der oberen rechten Kante befestigtes, unter dem Winkel $\alpha = 30°$ gegenüber der Horizontalen gespanntes Zugseil angehoben werden. (a) Wie groß ist die minimal erforderliche Zugkraft F? (b) Für welchen Winkel α wird diese Zugkraft F am kleinsten, und wie groß ist sie dann?



Lösung: Der zur Kraft F senkrechte Hebelarm l hat eine Länge, die über die Hilfsgröße $x = a \tan\alpha$ als

$$L = (a + x)\cos\alpha = a(1 + \tan\alpha)\cos\alpha = a(\sin\alpha + \cos\alpha)$$

Somit ist das von F erzeugte Drehmoment $M_1 = F\,l$. Es muss das durch die Gewichtskraft G hervorgerufene Drehmoment bzgl der Kante kompensieren

$$M_2 = \frac{a}{2}G$$

Momentengleichgewicht

$$\begin{aligned} F\,l &= \frac{a}{2}G \\ Fa(\sin\alpha + \cos\alpha) &= \frac{a}{2}G \\ F &= \frac{G}{2\,(\sin\alpha + \cos\alpha)} \end{aligned}$$

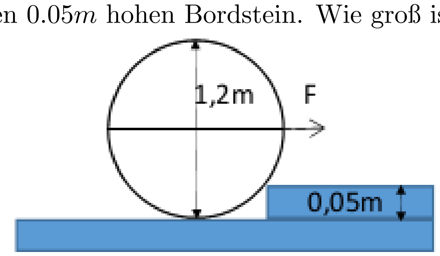
Die maximale Kraft ergibt sich aus Extremwertberechnung

$$\frac{dF}{d\alpha} = -G\frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{2(\sin\alpha + \cos\alpha)} = 0$$

ergibt sich als $\sin\alpha = \cos\alpha$ also $\alpha = 45°$. Damit wird die maximale Kraft

$$F = \frac{G}{2(\sin\alpha + \cos\alpha)} = 6.24kN$$

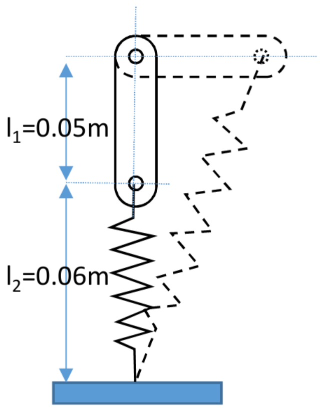
Oktoberfest Beim Transport eines $30kN$ schweren Bierfasses von $1.2m$ Durchmesser stößt dieser gegen einen $0.05m$ hohen Bordstein. Wie groß ist die waagerechte Zugkraft, die den Kessel vom Boden abhebt?



Lösung: Wie in Vorlesung,

$$\sin\alpha = \frac{R - h}{R} \Rightarrow \alpha = 66.4° \Rightarrow F = 13.1kN$$

Türschliessmechanismus Der dargestellte Hebel wir durch eine mit der Kraft $F = 15N$ gespannten feder in senkrechter Lage gehalten. Welches rückdrehende Moment M entsteht, wenn der Hebel um $90°$ geschwenkt wird und die Richtgröße der Feder $800N/m$ beträgt?



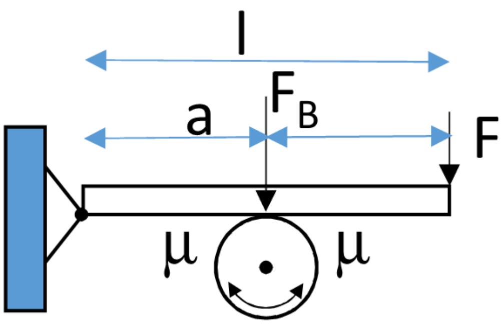
Lösung: Länge der Feder nach der Dehnung

$$l_2 = \sqrt{(0.05m)^2 + (0.11m)^2} = 0.1208m$$

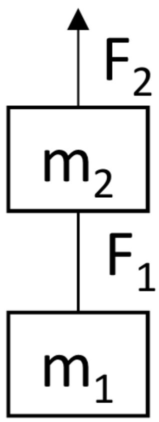
Länge der Feder vor der Dehnung $l_1 = 0.05m + 0.06m = 0.06m$, Dehnung $= l_2 - l_1 = 0.0608m$
Federkraft = Vorspannung + Dehnspannung $= 15N + 800N/m0.0608m = 63.6N$
Moment um Auslenkwinkel 90Grad herum (stimmt bei größerer Abweichung von 90Grad nicht mehr)
Zugwinkel zwischen horizontalem Hebel und Feder

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{0.05m + 0.06m}{0.1208m}\\ M &= F \cdot 0.05m \cdot \cos\alpha = 63.6N \cdot \frac{0.05m \cdot 0.11m}{0.1208m} = 2.9Nm\end{aligned}$$

Backenbremse Welche Kraft F ist am Bremshebel einer einfachen backenbremse bei (a) rechtsdrehung bzw. (b) Linksdrehung der Bremsscheibe erforderlich, wenn die Bremskraft F_B, Reibungszahl μ und die Hebellängen nach Bild gegeben sind?



Trägheitskräfte Zwei Massen m1=4kg und m2=1kg, die an Fäden übereinander aufgehängt sind, erhalten durch ruckartiges Ziehen am oberen faden eine Aufwärtsbeschleunigung. Beide Fäden haben eine Reissfestigkeit von F0=59N. (a) Für welche der beiden Fäden wird bei wachsender Beschleunigung die Reissfestigkeit zuerste erreicht? Bei welcher Beschleunigung ist das der Fall ? (b) Welche Festigkeit müsste der höher belastete faden haben, wenn beide Fäden gleichzeitig reissen sollten ?



Lösung:
Kräfte F_1 und F_2 sind die Kräfte in den Fäden. Im statischen Gleichgewicht gilt:

$$F_1 = m_1 g F_2 = F_1 + m_2 g = (m_1 + m_2)g$$

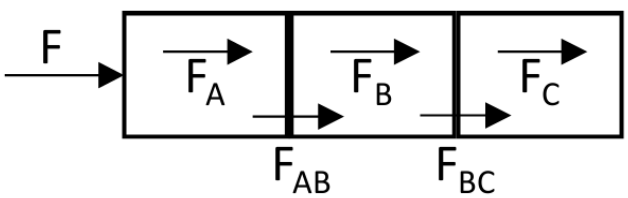
Im dynamischen Zustand bei Beschleunigung a gilt

$$F_1 = m_1(g + a)F_2 = F_1 + m_2(g + a) = (m_1 + m_2)(g + a)$$

F_2 ist stärker belastet, bei vorgegebener Reissfestigkeit von $F_0 = 59N$ ist

$$a = \frac{59N}{4kg + 1kg} - 10\frac{m}{s^2} = 11.8\frac{m}{s^2} - 10\frac{m}{s^2} = 1.8\frac{m}{s^2}$$

Lastzug Drei dicht aneinanderliegende Blöcke A, B und C (Masse m) werden längs einer reibungsfreien Unterlage durch eine Kraft F, die am Block A angreift, fortgeschoben. (a) Welche Gesamtkraft wirkt auf Block A in vertikaler Richtung ? (b) Welche Gesamtkraft wirkt auf Block A längs der Unterlage ? (c) Wie groß ist die Beschleunigung von Block C ? (d) Wie groß ist die Kraft von Block A auf Block B ?



Lösung:

$$\begin{aligned} F &= F_A + F_{AB} \\ F_{AB} &= F_B + F_{BC} \\ F_{BC} &= F_C = ma \end{aligned}$$

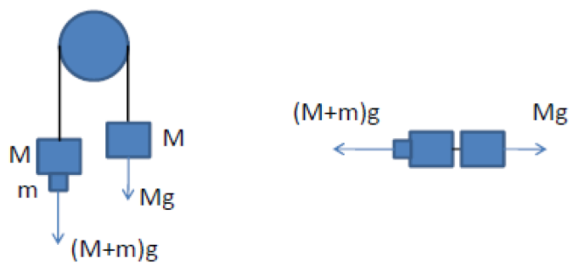
also mit

$$ma = F_A = F_B = F_C \qquad F_{AB} = 2ma$$

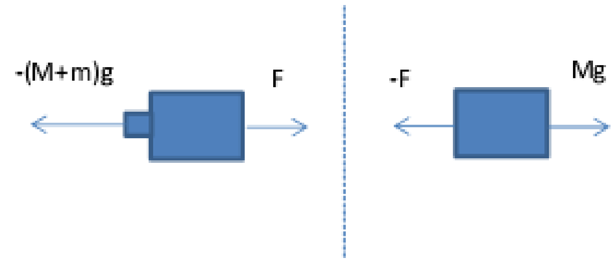
(a) Null (b) $F_A = F - F_{AB} = F/3$ (c) $F_C = F/(3m)$ (d) $F_{AB} = 2F/3$

Atwood'sche Fallmaschine (zur genauen Messung der Fallbeschleunigung g): Zwei gleichgroße Massen M sind über eine drehbare Rolle (Masse vernachlässigbar) mit einer Schnur verbunden. Es herrscht Gleichgewicht. Hängt man an eine der Seiten eine weitere Masse m an, ergibt sich eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Berechnen Sie diese für $M = 1kg$ und $m = 0.1kg$. Konstruieren Sie zum Auffinden der Bewegungsgleichung ein äquivalentes System in 1D.

Lösung:



Äquivalente Systeme



Freischneiden

Die Masse $M + M + m$ wird von der resultierenden Kraft $(M + m)g - Mg$ beschleunigt, also

$$\begin{aligned}(2M + m)\,a &= (M + m)g - Mg\\ a &= \frac{m}{2M + m}g\end{aligned}$$

Für $M = 1kg$ und $m = 0.1kg$

$$a = \frac{0.1}{2.1}10\frac{m}{s^2} = 0.476\,19\frac{m}{s^2}$$

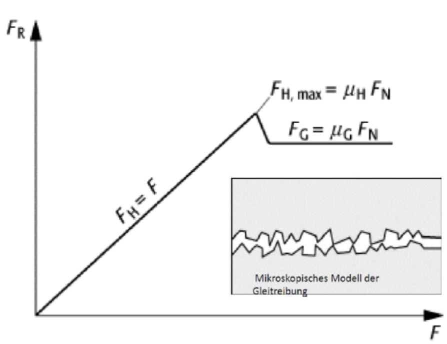
Lösung durch Freischneiden mit Seilkraft F

$$\begin{aligned}\text{linker Teil} \qquad (M + m)a &= -(M + m)g + F\\ \text{rechter Teil} \qquad Ma &= Mg - F\end{aligned}$$

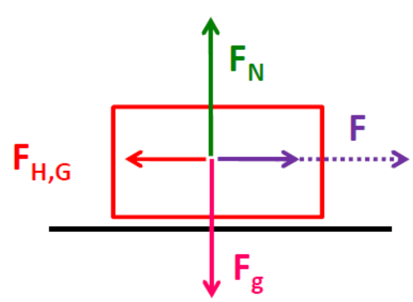
eliminiere F

$$\begin{aligned}(M + m)a + (M + m)g &= -Ma + Mg\\ 2Ma + ma + mg &= 0\\ a &= -\frac{m}{2M + m}g\end{aligned}$$

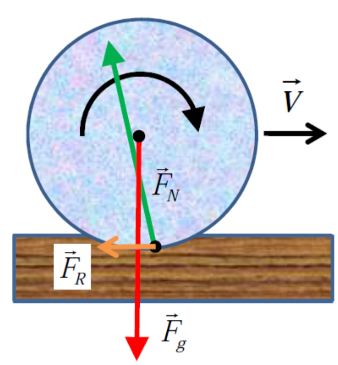
Coulomb-Reibung (Haft-, Gleitreibung, Rollreibung) Das mikroskopische Modell für die Haft- und Gleitreibung ist die rauhe, verhakte Oberfläche. Bei der Rollreibung wird der Untergrund teilweise inelastisch eingedrückt.



F_H bzw. F_G als Funktion von F



Beim Haften ist $F = F_H$, dann wird $F > F_G$



Rollreibung

Zunächst muss eine Mindestkraft F in der horizontalen Zugrichtung aufgebracht werden, um den Körper überhaupt in Bewegung zu versetzen. Die **Haftreibungskraft** ist daher

$$F_H = -F$$

und kompensiert exakt die Zugkraft. Dies geht, solange die maximale Haftreibungskraft

$$F_{H,\max} = \mu_H\, F_N$$

erreicht ist, welche sich aus der Normalkraft F_N und dem Haftreibungskoeffizienten μ_H ergibt.

Anschließend setzt Gleitreibung ein. Die **Gleitreibungskraft** F_G ist nicht mehr von der Zugkraft F abhängig, sondern nur noch von der (bei konstantem Gefälle) konstanten Normalkraft F_N

$$F_G = \mu_G \, F_N$$

Meistens ist

$$\mu_G < \mu_H$$

so dass beim Überschreiten der maximalen Haftreibungskraft sofort eine Beschleunigung vorliegt

$$F_G - F_H = \mu_G \, F_N - \mu_N \, F_N = (\mu_G \, - \mu_H \,) \, F_N = m \, a$$

(der *Ruck* beim Anschieben des Möbelstückes).

Example 1 *Auf einem Kipplaster liegt ein Klotz mit einem Haftreibungskoeffizienten von* $\mu_H = 0.6$ *und einem Gleitreibungskoeffizienten von* $\mu_G = 0.4$*. Bei welchem Winkel beginnt der Klotz zu rutschen ? Wie stark wird er dann beschleunigt ?*

Solution 2 *Hangabtriebskraft* $F_{g,H} = F_g \sin \theta$*, Normalkraft* $F_{g,N} = F_g \cos \theta$*. Haftreibung liegt vor solange* $F_{g,H} \leq \mu_H \, F_{g,N}$

$$\Longrightarrow F_g \sin \theta \leq \mu_H \, F_g \cos \theta \Longrightarrow \tan \theta \leq \mu_H \Longrightarrow \theta \leq \arctan \mu_H \Longrightarrow \theta \leq 0.540\,4 \cong 30.96^\circ$$

Für $\theta > \arctan \mu_H$ *Gleitreibung. Dann ist die Bewegungsgleichung*

$$\begin{aligned} m \, a &= F = F_{g,H} - F_R = F_g \sin \theta - \mu_G \, F_g \cos \theta \\ &\Longrightarrow a = g \, (\sin \theta - \mu_G \, \cos \theta) \end{aligned}$$

Für $\theta = 30.96^\circ$ *(wenn es zu Rutschen anfängt) wäre das* $a = 0.172 \, g$