Vorkurs Mathematik-Physik, Teil 7

©2016 A. Kersch

# 1 Kräfte, Drehmoment

## 1.1 Newton'sche Axiome

### 1.1.1 Wechselwirkungsgesetz

Die Newton'schen Axiome (oder auch Gesetze) wurden 1687 von Isaac Newton in seinem Werk *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (oder auch kurz *Principia Mathematica*) formuliert.

**1. Axiom, Trägheitsgesetz** Jeder Körper mit konstanter Masse $m$ verharrt im Zustand der Ruhe oder der geradlinigen gleichförmigen Bewegung, falls er nicht durch äußere Kräfte gezwungen wird, diesen Zustand zu ändern

$$m = const. \quad \text{und} \quad \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = const.$$

Aber was bedeutet **geradlinig, gleichförmige Bewegung** ?

**Beispiel:** ein Zug fährt ab. Der Fahrgast beobachtet, wie die zurückbleibende Person beschleunigt zu werden scheint, obwohl keine Kraft auf diese Person wirkt.

**Auflösung:** das Koordinatensystem des Zuges mit Beschleunigung ist für die Beschreibung im Sinne des Trägheitsgesetzes nicht zulässig.

Die Messung von Geschwindigkeiten muss daher in einem Koordinatensystem erfolgen, welches selber keiner Wechselwirkung mit der Umgebung unterworfen ist: **Inertialsystem**

**Definition 1** *Ein Koordinatensystem, in dem sich kräftefreie Körper gleichförmig bewegen, ist ein* ***Inertialsystem****.*

### 1.1.2 Reaktionsgesetz

In dem **Reaktionsgesetz** werden die zentralen Begriffe Kraft und träge Masse verwendet, die zumindestens einer Erläuterung bedürfen.

Die **Kraft** quantifiziert die Wirkung der Umgebung auf einen Körper. Sie wird gerne über eine andersartige Wechselwirkung beschrieben: z.B. die Kraft auf eine Masse über die Kraft auf eine Federwaage etc.

Die **träge Masse**wird gerne über die Quantität beschrieben: z.B. zwei Kugeln haben doppelt so viel träge Masse wie eine Kugel etc.

Dann können folgende experimentelle Beobachtungen gemacht werden:

- bei doppelter Kraft ist die Beschleunigung eines Körpers doppelt so groß, also

$$\vec{a} \propto \vec{F}$$

- bei doppelter Masse ist bei gleicher Kraft die Beschleunigung halb so groß, also

$$|\vec{a}| \propto \frac{1}{m}$$

**2. Axiom: Reaktionsgesetz** Der Bewegungszustand eines Körpers wird nur durch den Einfluss von (äußeren) Kräften geändert

$$m = const \quad \Rightarrow \quad m\,\vec{a} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

Die **träge Masse** ist daher die **Proportionalitätskonstante** zwischen Kraft und Beschleunigung. Sie entspricht der Eigenschaft der Körper, sich der Änderung des Bewegungszustandes zu widersetzen (Massenträgheit).

Die Kraft ist ein Vektor, und mit dem Reaktionsgesetz ergibt sich die Einheit als zusammengesetzt

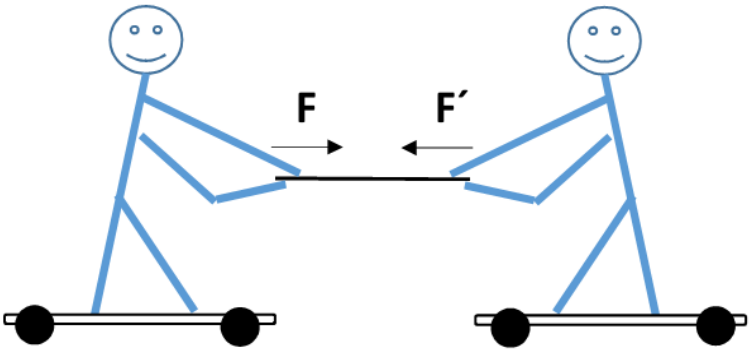
$$[F] = 1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

### 1.1.3 Wechselwirkungsgesetz

Zu diesem Gesetzkommt man, wenn man die Kraft, welche auf einen Körper wirkt (**externe Kraft**, z.B. Körper fällt in der Schwerkraft) in das System einbezieht (**interne Kraft**, z.B. Körper ziehen sich über die Gravitation gegenseitig an).

**3. Axiom: Wechselwirkungsgesetz** Zu jeder Kraft, die ein Körper auf einen anderen ausübt, gibt es eine gleich große Gegenkraft des anderen Körpers auf den einen Körper (actio=reactio)

$$\vec{F} = -\vec{F}'$$




Kraft und Gegenkraft: Skater 1 zieht Skater 2 am Seil 3

Von extern betrachtet, heben sich die entgegengesetzten Kräfte auf (Kräftegleichgewicht), von außen wirkt in der Summe gar keine Kraft. Der Schwerpunkt ruht (bzw. bewegt sich gleichförmig). Intern, als Wechselwirkung betrachtet, beschleunigt die eine Kraft den anderen Körper und umgekehrt.

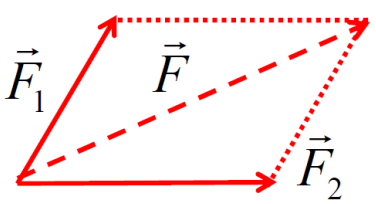
### 1.1.4 Superpositionsprinzip

**Zusatzgesetz: Superpositionsprinzip** Wirken auf einen Punkt mehrere Kräfte $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ...,$\vec{F}_n$, so addieren sich diese **vektoriell** zu einer resultierenden Kraft $\vec{F}$ auf

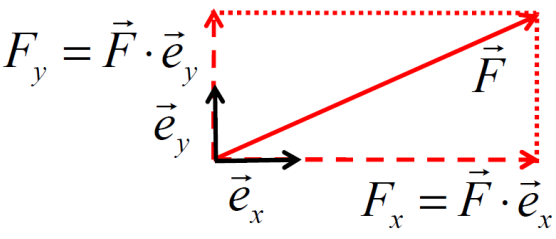
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$$

Das **Superpositionsprinzip** wird in zwei Richtungen angewandt:

- Superposition der Kräfte zur Berechnung der **Resultierenden**
- Zerlegung der Kräfte mit Hilfe des Skalarproduktes in **Komponenten**



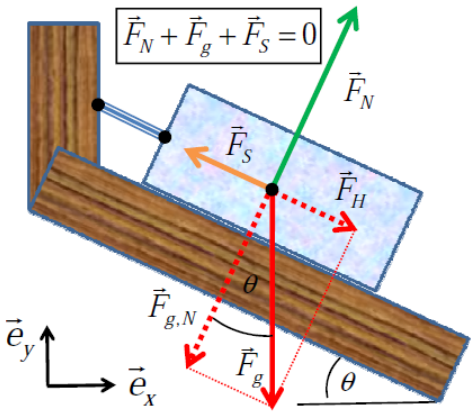

$\vec{F}$ Resultierende von $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$



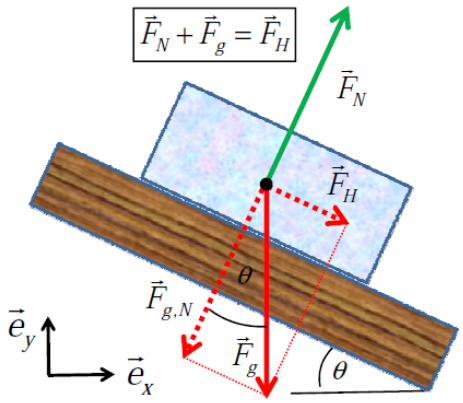

$F_x$ und $F_y$ Komponenten von $\vec{F}$

### 1.1.5 Statik und Dynamik

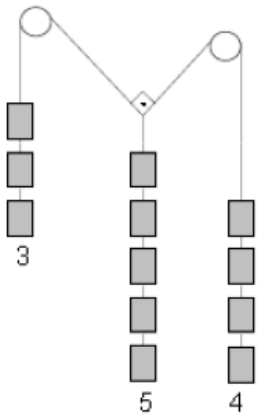
Ist die Resultierende der Kräfte Null (und die Summe der Drehmomente Null), findet nach dem Newton'schen Gesetzen keine Beschleunigung statt und es handelt sich um ein **statisches Problem**. Ist die Summe der Kräfte (der Drehmomente) nicht Null, findet eine Beschleunigung (Rotationsbeschleunigung) statt und es handelt sich um ein **dynamisches Problem**.




Kräftegleichgewicht zwischen Schwerkraft, Normalkraft und Seilkraft




Resultierende Kraft aus Schwerkraft und Normalkraft

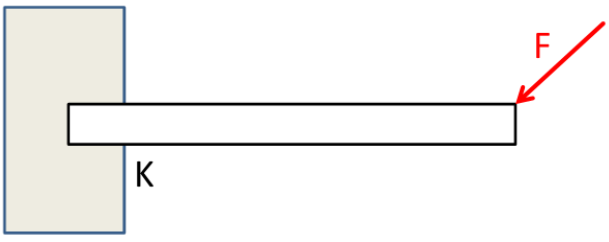



Kräftegleichgewicht ?

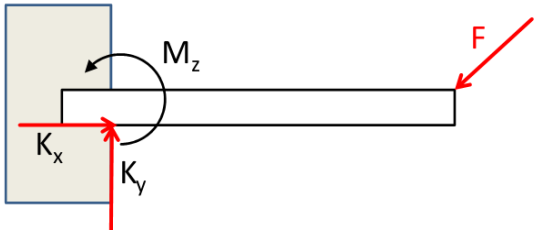
### 1.1.6 Axiome der Statik in der Technischen Mechanik

Die Lösung von Problemen in der technischen Mechanik erfordert einen sorgfältigen Umgang mit Kräften. Dazu werden Regeln aufgestellt, die unbedingt beachtet werden müssen. Beim **Schnittprinzip** wird ein Körper losgelöst von seiner Umgebung betrachtet, das sogenannte **Freischneiden**. An diesem Körper sind die Kräfte und Momente im Gleichgewicht (Statik).Um herauszufinden welche Kräfte an diesem Körper wirken und sie somit berechnen zu können, muss die Art der Verbindung (z.B. Festlager, Loslager, Drehgelenk...) mit den „weggeschnittenen" Nachbarteilen betrachtet werden.

**Beispiel:** In diesem Beispiel wird gezeigt wie ein Balken von seiner Einspannung freigeschnitten wird, insbesondere wie die Lagerreaktionen an der Schnittseite des Balkens angetragen werden.




Eingespannter Balken mit Kraftwirkung




freigeschnittener Balken, Freikörperbild

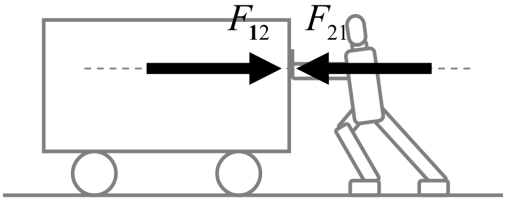
In diesem Fall handelt es sich um eine feste Einspannung. Am linken Ende des Balkens werden durch die Kraft F daher folgende Lagerreaktionen verursacht:

- eine horizontale Kraft $K_x$
- eine vertikale Kraft $K_y$
- ein Drehmoment $M_z$

Diese Lagerreaktionen können nun über Kräfte- und Momentengleichgewicht mit der Kraft F bestimmt werden. Wichtig: Die auftretenden Lagerreaktionen sind abhängig von der Art der Lagerung! Die Lösung von Problemen in der technischen Mechanik erfordert konsequente Anwendung von Prinzipien.

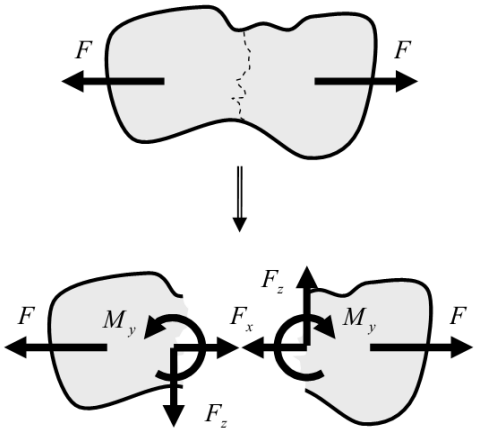
**Axiom 1: Drittes Newton'sches Gesetz**

Die Kräfte, die zwei Körper aufeinander ausüben, liegen auf einer gemeinsamen Wirkungslinie, sind gleich groß und entgegensetzt.



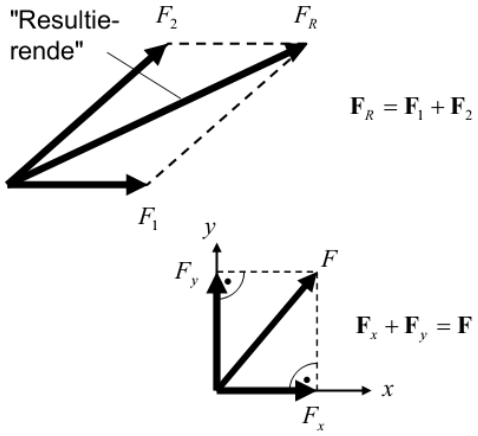

**Axiom 2: Schnittprinzip**

Werden aus einem System ein (Materie-) Teil freigeschnitten und die so gelöste Verbindung durch die von der Verbindung übertragenen Kräfte und Momente ersetzt, so bleiben alle freigeschnittenen (Materie-) Teile in demselben Bewegungszustand, den sie vor dem Freischneiden hatten. Gemäß dem Wechselwirkungsgesetz müssen die sogenannten Schnittkräfte an den beiden getrennten (Materie-) Teilen je gleich groß und entgegengesetzt sein.




**Axiom 3: Parallelogrammprinzip**

Greifen zwei Kräfte in einem gemeinsamen Punkt an, so sind ihre mechanischen Wirkungen der einer Einzelkraft äquivalent, die die Diagonale des aus beiden Einzelkräften gebildeten Parallelogramms darstellt. Durch mehrfache Anwendung des Satzes können beliebig viele Kräfte zu einer einzigen, in ihrer Wirkung äquivalenten Kraft zusammengefaßt werden. Durch Umkehrung des Satzes kann eine Einzelkraft in mehrere Teilkräfte zerlegt werden, die in ihrer mechanischen Wirkung der Einzelkraft äquivalent sind (in der Ebene: eindeutige Zerlegungin genau zwei, im Raum eindeutige Zerlegung in genau drei Einzelkräfte)




## 1.2 Kräfte

### 1.2.1 Komponenten und Resultierende

Bei Aufgaben, in denen **Zerlegung von Kräften in Komponenten** und **Aufsummieren von Kräften zu einer Resultierenden** vorkommen, muss sorgfältig auf die Schreibweise geachtet werden.

- **Vektoren** haben einen Vektorpfeil oder sind fett, also $\vec{F}$ oder $\mathbf{F}$. Basisvektoren bzw. Einheitsvektoren sollten idealerweise erkennbar sein, also $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$.
- Längen oder **Beträge von Vektoren** sind immer positiv und ohne Vektorpfeil und dünn, also $F$.
- **Komponenten von Vektoren** hängen vom gewählten Koordinatensystem ab, werden ohne Vektorpfeil und dünn geschrieben, können positiv oder negativ sein und sollten sich daher idealerweise durch die Notation von Beträgen unterscheiden lassen, also z.B. $F_x$, $F_y$, $F_z$.

Die klassischen Aufgabe dazu ist der gezogene Schlitten. Zunächst wirke keine horizontale Kraft auf den Schlitten, er ist in Ruhe (a). Die **Schwerkraft** $\vec{F}_g$ und die **Normalkraft** $\vec{F}_N$ (die Kraft des Untergrunds, welche der Normalkomponente der Schwerkraft entgegenwirkt) heben sich gegenseitig auf, so dass auch in der Vertikalen die **resultierende Kraft Null** ist.

Im Fall (b) wird nun der reibungsfreie Schlitten mit der Kraft $\vec{F}$ gezogen. Die Kraft hat nicht nur eine Komponente in der Horizontalen, sondern auch in der Vertikalen (Winkel $\theta$ zur Horizontalen). Die vertikale Komponente beträgt $F_{ver} = F \sin\theta$. Durch die vertikale Komponente wird der Schlitten teilweise entlastet, d.h. die Gewichtskraft wird reduziert. Dadurch wird auch die Normalkraft geringer. Insgesamt muß aber die Summe

$$\left(\vec{F}_g + \vec{F}_N + \vec{F}\right) \cdot \vec{e}_y = -F_g + F_N + F \sin\theta = 0$$

Null sein (ansonsten gäbe es eine Bewegung in vertikaler Richtung). Beachte, dass $F_{g,y}$, $F_{N,y}$ und $F_y$ Komponenten sind und, $F_g$ , $F_N$ und $F$ Beträge)

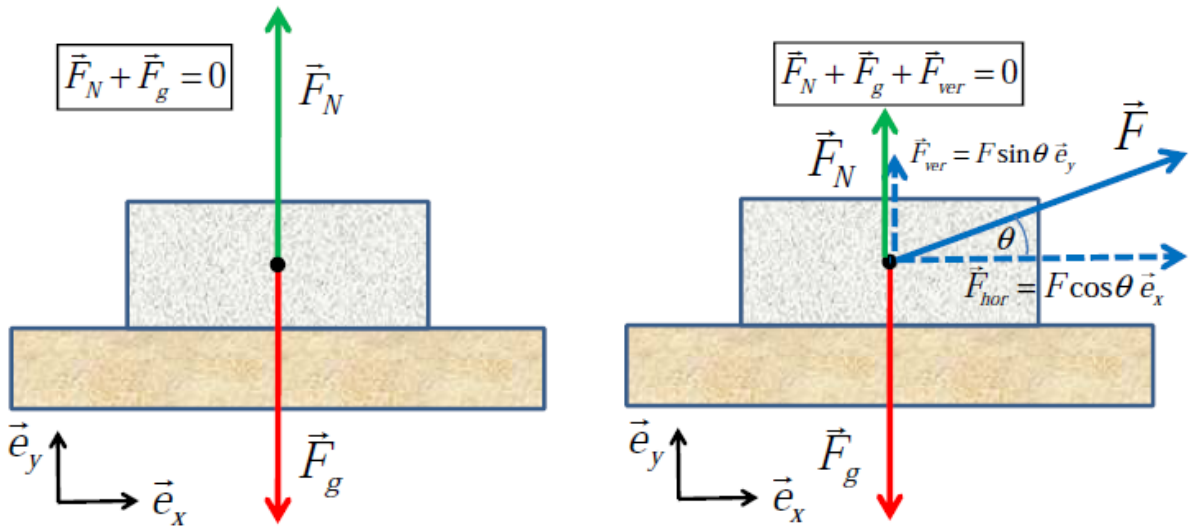
$$\vec{F}_g \cdot \vec{e}_y = F_{g,y} = -F_g \qquad \vec{F}_N \cdot \vec{e}_y = F_{N,y} = F_N \qquad \vec{F} \cdot \vec{e}_y = F_y = F_{ver} = F \sin\theta$$

Die reduzierte Normalkraft kann somit aus der Zugkraft $F$ und dem Zugwinkel $\theta$ berechnet werden. Wenn die Zugkraft sehr groß wird, wird $F_{N,y}$ auch negativ: der Schlitten wird angehoben.

$$F_N = F_g - F \sin\theta$$

Die horizontale Komponente $(\vec{F}_g + \vec{F}_N + \vec{F}) \cdot \vec{e}_x = F_{hor} = F \cos\theta$ beschleunigt nun den Schlitten in horizontale Richtung. Die Masse des Schlittens sei $m$

$$m\,\vec{a} = \vec{F}_{hor} \Longrightarrow m\,a\,\vec{e}_x = F\,\cos\theta\,\vec{e}_x \Longrightarrow m\,a = F\,\cos\theta$$




(a) Ruhender Schlitten (b) Schlitten mit Zugkraft

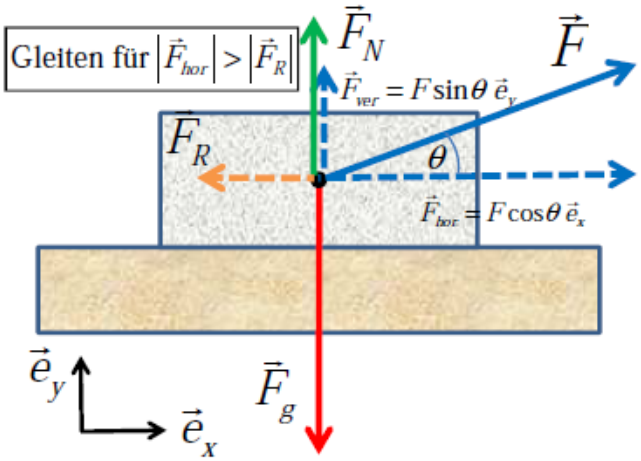
Im nächsten Fall (c) gibt es zusätzlich eine Reibung zwischen Schlitten und Untergrund. Für die Kräfte in der Vertikalen ändert sich nichts. In der Horizontalen tritt aber die Reibungskraft auf. Das Modell für die Gleitreibung berechnet die Reibungskraft (horizontal) aus der Normalkraft (vertikal) über den Gleitreibungskoeffizienten $\mu_G$

$$F_R = \mu_G F_N$$

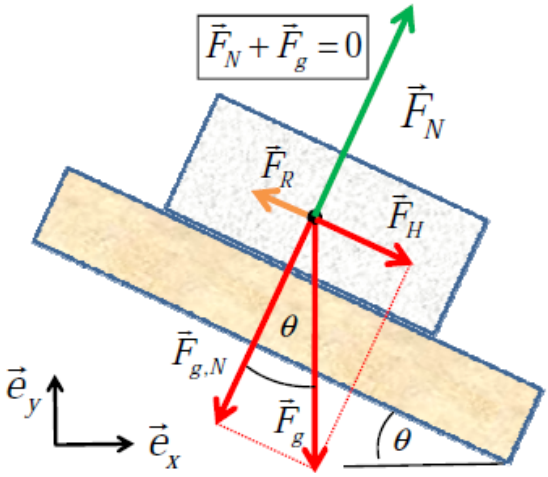
Die resultierende Kraftkomponente in der Horizontalen ist daher

$$F_{\text{Resultierende}} = F \cos\theta - \mu_G F_N$$

Am Ende stellt sich noch die Frage, ob die Gleit-Reibungskraft größer als die Zugkraft werden kann. Dies ist nicht möglich, da die Gleitreibung erst einsetzt, wenn $F \cos\theta > \mu_G F_N$ (siehe später, ausführliche Diskussion der Haft / Gleitreibung).




(c) Schlitten mit Zugkraft und Reibung




(d) Schlitten auf Rampe mit Reibung

Eine Variante des gezogenen Schlittens ist der Schlitten auf der Rampe (d). Hier muss zunächst die Schwerkraft in eine zum Hang tangentiale Komponente (**Hangabtriebskraft**) und zum Hang vertikale **Normalkomponente der Schwerkraft** zerlegt werden

$$\vec{F}_g = \vec{F}_H + \vec{F}_{g,N} \qquad F_H = F_g \sin\theta \qquad F_{g,N} = F_g \cos\theta$$

Hier ist jetzt die Normalkraft dadurch reduziert, dass nur eine Komponente der Schwerkraft auf die Unterlage wirkt

$$F_N = F_{g,N} = F_g \cos\theta$$

Die Reibungskraft (in tangentiale Richtung) folgt wieder aus der Normalkraft (das Vorzeichen: entgegen der Hangabtriebskraft)

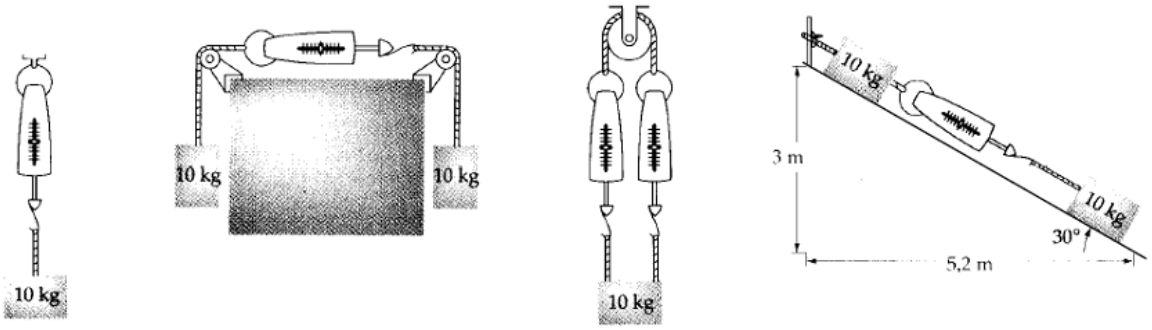
$$F_R = \mu_G\, F_N \qquad \vec{F}_R = -\mu_G\, F_N\, \vec{e}_H$$

Die Resultierende für die Beschleunigung $a$ ist

$$m\,a = F_{\text{Resultierende}} = F_H - \mu_G F_N = F_g \sin\theta - \mu_G F_g \cos\theta$$

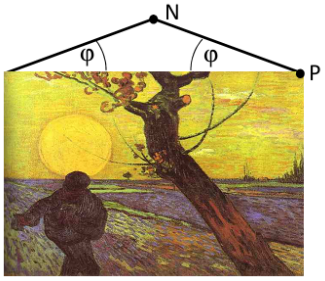
## 1.3 Statik

**Beispiel 1:**




Was zeigen die Federwaagen an ? Erklären Sie insbesondere Bild 2

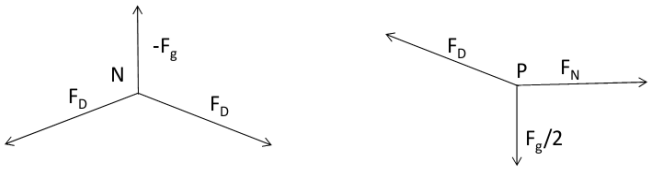
**Beispiel 2:** Ein Bild der Masse $m = 1kg$ ist wie folgt mit einem Draht der Länge $0.5m$ an der Wand an einem Nagel aufgehängt




(a) Skizzieren Sie die **Kräfte**, die auf den Nagel **N** sowie auf den Eckpunkt **P** wirken. Zunächst ist $\varphi = 30°$.

(b) Welche **Zugkraft** lastet auf dem Draht (Ersatzwert $10N$) ? Welche horizontale Druckkraft $F_N$ lastet auf dem Bildrahmen in **P** ?

**Lösung:** (a)

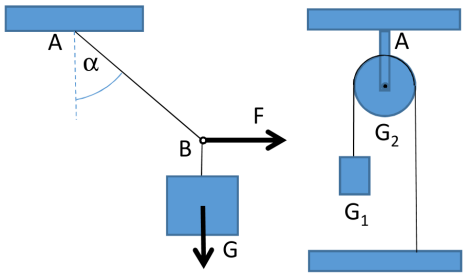



(b)

$$F_D = \frac{F_g}{2\sin\varphi} = \frac{1\times 9.81}{2\sin\pi/6} = 9.81N \qquad F_P = \frac{F_g}{2\tan\varphi} = \frac{1\times 9.81}{2\tan\pi/6} = 8.4957N$$

**Beispiel 3: Kräftegleichgewichte** (a) Welche horizontale Zugkraft $F$ ist erforderlich, um den durch das Gewicht G=10N belasteten Faden AB in der durch den Winkel $\alpha = 50°$ vorgegebenen Lage im Gleichgewicht zu halten ?

(b) Eine Walze mit der Gewichtskraft $G = 500N$ liegt in einem Graben zwischen einer senkrechten Wand und einer schrägen Böschung, die mit der Horizontalen den Winkel $\beta = 60°$ bildet, greift über eine Rolle die Zugkraft $F_1$ an. (i) wie groß sind die Auflagerkräfte in A und B, wenn $F_1 = 200N$? (b) wie groß müßte $F_1$ sein, damit die Rolle zu steigen beginnt ?




(a) (b)

**Lösung**:

(a) Im (freigeschnittenen) Punkte $B$ ist Kräftegleichgewicht der Kräfte (die Seilkraft $F_S$ ist entlang dem Seil von $B$ nach $A$ gerichtet)

$$\vec{F}_S + \vec{F} + \vec{G}$$

In Komponenten

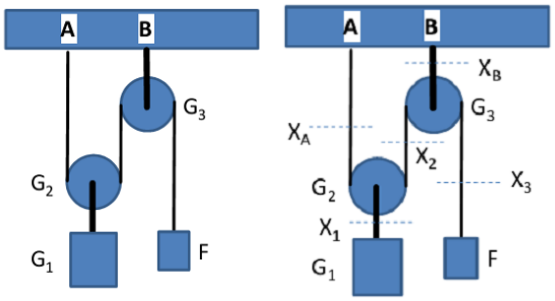
$$\begin{aligned} \vec{e}_y \quad &: \quad G = F_S\cos\alpha \\ \vec{e}_x \quad &: \quad F = F_S\sin\alpha \\ F_S \text{ eliminiert} \quad &\Rightarrow \quad \frac{G}{\cos\alpha} = \frac{F}{\sin\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad F = G\tan\alpha \\ \text{schliesslich} \quad &: \quad F_S = \frac{G}{\cos\alpha} \end{aligned}$$

(b) Schnitt zwischen Masse und Rolle. An der Rolle sind die Seilkräfte links und rechts im Gleichgewicht gleich und $F_S$.

Die Seilkraft ist $F_S = G_1$. Auf die Rolle wirken insgesamt die Kräfte der Aufhängung $F_A$, die Schwerkraft $G_2$ und die Seilkräfte $2F_S$

$$F_A = 2F_S + G_2 = 2G_1 + G_2$$

**Beispiel 4: Seilzug** Berechne alle Kräfte




$$\begin{aligned} G_1 &= X_1 \\ G_2 + X_1 &= X_A + X_2 \\ X_B &= G_3 + X_2 + X_3 \\ F &= X_3 \end{aligned}$$

Dazu Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} X_A &= X_2 \\ X_2 &= X_3 \\ X_A + X_B &= G_1 + G_2 + G_3 + F \end{aligned}$$

Daraus

$$\begin{aligned} X_A &= F \\ G_2 + G_1 &= X_A + X_A \\ X_B &= G_3 + X_A + F \\ X_A + X_B &= G_1 + G_2 + G_3 + F \end{aligned}$$

3 Gleichungen, 3 Unbekannte.Zunächst ist

$$\begin{aligned} X_B &= 2F + G_3 \\ F + 2F + G_3 - (G_1 + G_2 + G_3) &= F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= (G_1 + G_2)/2 = 1230N \\ X_A &= 1230N \\ X_B &= 2540N \\ \text{Kontrolle } X_A + X_B &= G_1 + G_2 + G_3 + F = 2540N + 1230N \end{aligned}$$

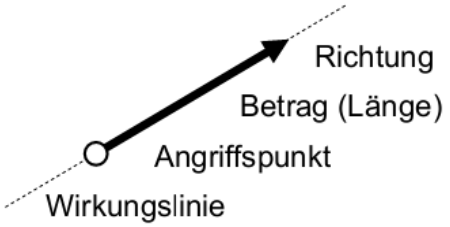
### 1.3.1 Drehmoment in der Technischen Mechanik

Die Kraft ist eine Wechselwirkung der Umgebung auf einen Körper, welche eine Translationsbeschleunigung hervorruft. Das Drehmoment ist eine Wechselwirkung der Umgebung auf den Körper, welche eine Rotationsbeschleunigung hervorruft.

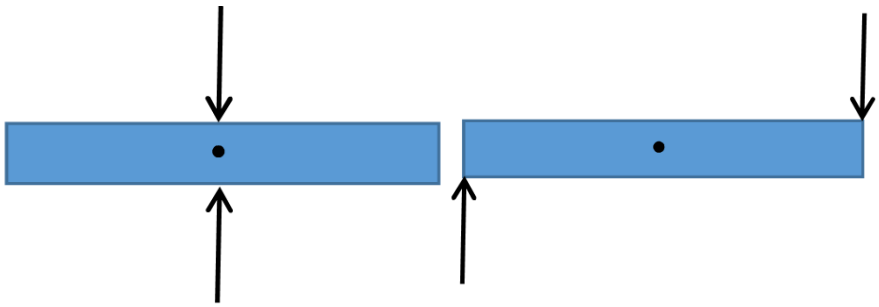
Warum die Unterscheidung von Kraft und Drehmoment schwerfällt: Drehmomente erfordern immer Kräfte (welche am Hebelarm angreifen), aber nicht alle Kräfte verursachen ein Drehmoment.

Der Grund liegt darin, daß die Wirkung der Kraft nicht nur vom Betrag und Richtung, sondern auch wesentlich vom Angriffspunkt abhängt. Entlang der Wirkungslinie darf die Kraft verschoben werden, ohne daß sich die Wirkung verändert.

Wegen des notwendigen Angriffspunktes wird die Kraft ein „gebundener Vektor" genannt




Der **Angriffspunkt** ist für die Definition des Drehmomentes wesentlich. Im Bild entsteht in (b) ein Drehmoment, in (a) aber nicht, obwohl die Kräfte in beiden Fällen gleich sind und sich aufheben.



(a) Resultierende der Kräfte = 0 und Kräfte auf gleicher Wirkungslinie => kein Drehmoment

(b) Resultierende der Kräfte = 0, aber Kräfte nicht auf gleicher Wirkungslinie => Drehmoment $\neq 0$

Das Drehmoment ist über ein Vektorprodukt bezogen auf einen **Bezugspunkt bzw. Drehachse** definiert.

$$\textbf{Drehmoment} \qquad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad [Nm]$$

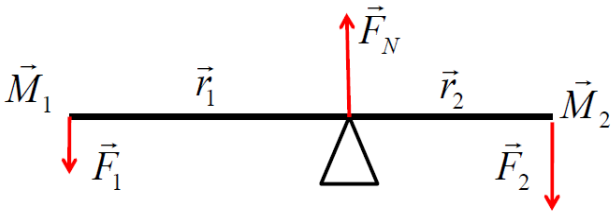
Aber nach welchen Kriterien soll dieser Bezugspunkt gewählt werden ?

**In der Statik:** Wahl des Bezugspunktes ist beliebig, das Ergebnis von der Wahl unabhängig. Aber meistens liefert ein Bezugspunkt die leichteste Rechnung.

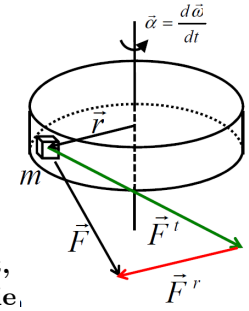
**In der Dynamik:** Wenn ein Drehpunkt (in 2D) bzw. eine Achse (in 3D) vorgegeben ist, definiert diese den Bezugspunkt / die Achse. Wenn der Körper frei ist (keine Zwangsbedingung), ist der Bezugspunkt durch den Schwerpunkt gegeben.

### 1.3.2 Hebelgesetz und Definition des Drehmoments

Durch einen Hebel wird eine Kraft $F_1$ in eine andere $F_2$ übersetzt, dadurch dass der Ansatzpunkt $r_1$ und der Wirkungspunkt $r_2$ unterschiedlich gewählt werden. **Voraussetzung ist eine fest Achse**. Stehen die Kräfte senkrecht zum Hebel, gilt das




**Hebel und Hebelgesetz: Gib mir einen Punkt, auf dem ich stehen kann, und ich werde dir die Welt aus den Angeln heben** (Archimedes)




Rotationsbeschleunigung

$$r_1 F_1 = r_2 F_2 \qquad \textbf{Hebelgesetz} \text{ von Archimedes}$$

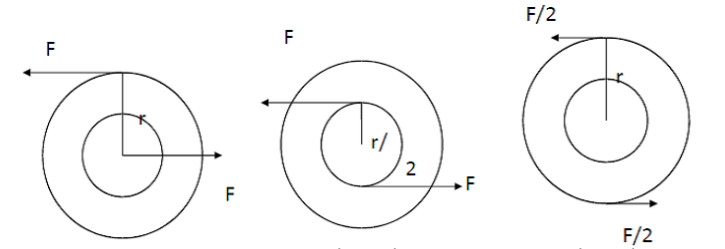
Gegeben sei ein starrer Körper mit einer festen Achse, das heißt der Schwerpunkt bleibt unbeweglich. Um diesen Körper in Rotation zu versetzen (Winkelbeschleunigung $\alpha$) muss eine Kraft $\vec{F}$ im Abstand $\vec{r}$ von der Drehachse angreifen, und zwar in der Ebene der Drehbewegung. Die Kraft kann in eine radiale und eine tangentiale Komponente zerlegt werden

$$\vec{F} = \vec{F}^r + \vec{F}^t$$

Da die Achse fest ist, **führt die radiale Komponente der Kraft zu keiner Beschleunigung** (nur zu einer Reaktions-Kraft durch das Achsenlager), nur die tangentiale Komponente. Eine Analyse der Situation zeigt, dass die verursachende Größe als Vektorprodukt geschrieben werden

$$\textbf{Drehmoment} \qquad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad [Nm]$$

Das Drehmoment ist eine vektorielle Größe mit einer Richtung definiert durch die Rechte-Hand Regel. Sie erfordert die Wahl eines **Bezugspunktes**. Die Einheit ist $[Nm]$.




$\vec{M} = \vec{0} \times \vec{F} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$ $\quad \vec{M} = 2\left(\frac{\vec{r}}{2} \times \vec{F}\right) = \vec{r} \times \vec{F}$ $\quad \vec{M} = 2\left(\vec{r} \times \frac{\vec{F}}{2}\right) = \vec{r} \times \vec{F}$

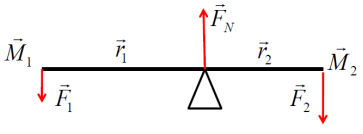
## 1.4 Gleichgewichtsbedingungen

Damit die Balkenwaage im Gleichgewicht ist, muss der Schwerpunkt ruhen

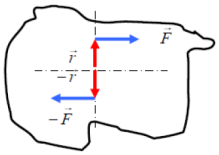
$$\vec{F}_N + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

und die Hebelkräfte müssen sich gegenseitig aufheben

$$r_1 F_1 - r_2 F_2 = \left| \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \right| = 0$$




Gleichgewichtsbedingungen am Hebel



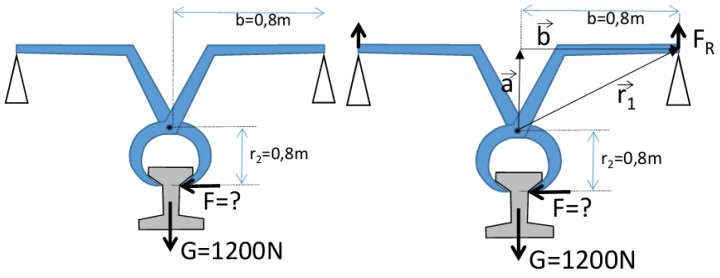

Gleichgewichtsbedingung am starren Körper

Im allgemeinen Fall lauten die **Gleichgewichtsbedingungen eines starren Körpers**, an dem $I$ Kräfte $\vec{F}_i$ und $K$ Drehmomente $\vec{M}_k$ angreifen

$$\sum_{i=1}^{I} \vec{F}_i = \vec{F}_{res} = 0 \qquad \textbf{Gleichgewicht der Kräfte}$$

$$\sum_{k=1}^{K} \vec{M}_k = \vec{M}_{res} = 0 \qquad \textbf{Gleichgewicht der Momente}$$

**Beispiel Drehmoment** Die Last ist $G = 1200N$. Mit welcher Kraft $F$ werden die Backen der Zange zusammengedrückt?



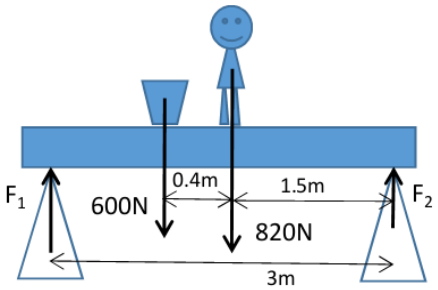

**Lösung**: Um ein Kräftegleichgewicht zu erreichen, muss an der Spitze jedes Hebels eine Reaktions-Kraft von jeweils $600N$ in die Vertikale wirken. Dann ergibt sich die Frage, welches Drehmoment daraus resultiert. Es trägt nur die tangentiale Komponente bei, also

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_R = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{F}_R = \vec{b} \times \vec{F}_R \qquad \Rightarrow \qquad M = 0.8m \times 600N = 480Nm$$

Die Zange hat eine Hebellänge von $0.15m$, um das Drehmoment im Gleichgewicht zu kompensieren muss im Abstand $0.15m$ folgende Kraft $F$ wirken

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_2 \times \vec{F} \qquad \Rightarrow \qquad F = \frac{480Nm}{0.15m} = 3200N$$

**Beispiel 5, Drehmoment** Welche Belastungen haben die auf dem Bild angegebenen Stützen zu tragen ?




**Lösung**: Die Kraft, welche die Waage ruhen läßt, ist die Lager-Kraft. Nach dem Freischneiden bleibt in dem Bild die **Normalkraft als Reaktionskraft**. Der Punkt 2 wird als Bezugspunkt ausgewählt, zwischen Kräften und Hebelarmen sind rechte Winkel. Die Beträge der Momente der Lasten sind daher

$$M_{Last} = 1.5m \cdot 820N + 1.9m \cdot 600N = 2370Nm$$

Die Momente der Reaktionskräfte sind

$$M_{reak} = 3m \cdot F_1 + 0m \cdot F_2$$

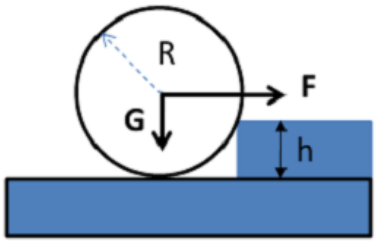
Aus der Gleichgewichtsbedingung der Momente ergibt sich $F_1$

$$2370N = M_{Last} = M_{reak} = 3m \cdot F_1 \qquad \Rightarrow \qquad F_1 = \frac{2370Nm}{3m} = 790N$$

und schliesslich aus dem Gleichgewichtder Kräfte $F_2$

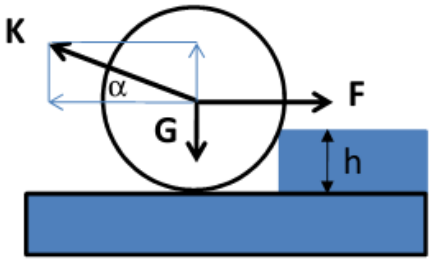
$$600N + 820N = F_{Last} = F_1 + F_2 \qquad \Rightarrow \qquad F_2 = F_{Last} - F_1 = 1420N - 790N = 630N$$

**Beispiel** Ein Rad ($\varnothing = 1.2m$, $G = 30kN$) stößt an eine Kante ($h = 0.05m$). Wie groß muß die waagerechte Zugkraft $F$ sein, um das Rad vom Boden abzuheben ?



Kräfte kurz vor Kontakt

Kräfte kurz vor Kontakt



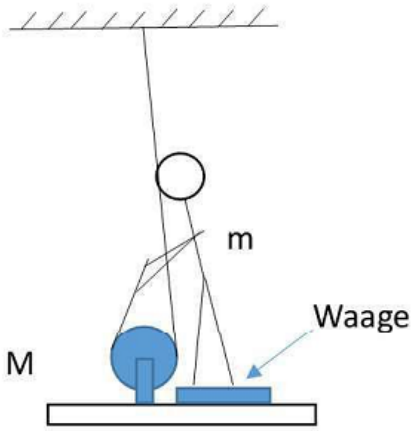
Reaktionskraft und Kräftegleichgewicht

**Lösung:** Der Bezugspunkt für die Drehmomente ist die Kante. Winkel von der Kante zum Schwerpunkt bzgl. Horizontaler:

$$\sin\alpha = \frac{R-h}{R} => \alpha = 66.4^\circ$$

Drehmomentengleichgewicht:

$$\begin{aligned} \text{Drehmoment von Schwerkraft } M_G &= RG\sin(90-\alpha) = RG\cos\alpha \\ \text{Drehmoment von Zugkraft } M_F &= RF\sin\alpha \\ \text{Gleichgewicht } RF\sin\alpha &= M_F = M_G = RG\cos\alpha \\ F &= \frac{G}{\tan\alpha} = 13.1N \end{aligned}$$

**Beispiel** Was zeigt die Waage ? Lösung in den Aufgaben

**Welche Kraft wirkt auf die Waage ?**