

## Resonanzkurven Freie und erzwungene Schwingungen eines Drehpendels

Stichworte: Hooksches Gesetz

### 1 Grundlagen

Die Bewegungsgleichung eines Drehpendels lässt sich aus der dynamischen Grundgleichung, formuliert für die Drehbewegung, ableiten:

$$M = J \cdot \ddot{\varphi} \quad \begin{array}{l} M = \text{das am Drehpendelkörper angreifende Drehmoment} \\ J = \text{Trägheitsmoment des Drehpendelkörpers} \end{array} \quad (1)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \text{die durch das Drehmoment bewirkte Winkelbeschleunigung} \quad (2)$$

Wird das zur Erzeugung einer Schwingung notwendige rücktreibende Drehmoment  $M_R$  durch die elastische Deformation einer Spiralfeder mit der Winkelrichtgröße  $D^*$  hervorgerufen, so gilt bei nicht zu großen Winkelauslenkungen  $\varphi$  das Hookesche Gesetz:

$$M_R = -D^* \cdot \varphi \quad (3)$$

Im Falle eines reibungsfrei gelagerten Drehpendels ohne äußere Krafteinwirkung erhält man damit als Bewegungsgleichung:

$$M_R = J \cdot \ddot{\varphi} \quad \text{oder} \quad \ddot{\varphi} + \frac{D^*}{J} \cdot \varphi = 0 \quad (4)$$

Mit Einführung der Kreisfrequenz  $\omega_0 = \sqrt{\frac{D^*}{J}}$  (5)

lautet die Gleichung  $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \cdot \varphi = 0$  (6)

Dies ist die Gleichung einer harmonischen Schwingung, denn ihre Lösung lautet:

$$\varphi = \hat{\varphi} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t - \varphi_0) \quad (7)$$

Die konstante Winkelamplitude ist dabei mit  $\hat{\varphi}$  und der Nullphasenwinkel, der angibt welche Phase die Schwingung zur Zeit  $t = 0$  hat, ist mit  $\varphi_0$  bezeichnet. Die Schwingungsdauer benötigt die Zeit

$$T_0 = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_0} \quad (8)$$

Wirkt das System zusätzlich eine geschwindigkeitsproportionale Reibungskraft, z. B. bei Drehung der Pendelachse in geölten Lagern oder bei einer Wirbelstrombremse (Erläuterung siehe unten), so muss auch noch das Dämpfungsdrehmoment

$$M_D = -b^* \cdot \dot{\varphi} \quad (9)$$

in die Bewegungsgleichung mit aufgenommen werden.  $b^*$  ist die Dämpfungskonstante. Die Bewegungsgleichung für die freie gedämpfte Schwingung lautet also:

$$M_R + M_D = J \cdot \ddot{\varphi} \quad \text{oder} \quad \ddot{\varphi} + \frac{b^*}{J} \cdot \dot{\varphi} + \omega_0^2 \cdot \varphi = 0 \quad (10)$$

Die Lösung dieser Gleichung beschreibt eine Schwingung, deren Amplitude wegen des Energieentzuges durch die Reibung mit der Zeit abnimmt:

$$\varphi = \hat{\varphi} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_d \cdot t - \varphi_0) \quad (11)$$

wobei

$$\delta = \frac{b^*}{2 \cdot J} \quad \text{die Abklingkonstante und} \quad (12)$$

$$\omega_d = \sqrt{(\omega_0^2 - \delta^2)} \quad \text{die Kreisfrequenz} \quad (13)$$

der gedämpften Schwingung bedeutet.

Die Eigenfrequenz eines gedämpften Systems ist also kleiner als die eines ungedämpften, aber sonst gleichen Systems. Für starke Dämpfung kann  $\delta = \omega_0$  werden und damit  $\omega_d = 0$ . In diesem aperiodischen Grenzfall kehrt das System asymptotisch in seine Ruhelage zurück ohne eine Schwingung auszuführen.

Frage: Warum wird in der Messtechnik zur Dämpfung schwingungsfähiger Messwerke oder in der Fahrzeugtechnik zur Stoßdämpfung häufig der aperiodische Grenzfall angestrebt?

Die Abklingkonstante  $\delta$  lässt sich durch Vergleich zweier aufeinanderfolgender Amplituden  $\hat{\varphi}_n$  und  $\hat{\varphi}_{n+1}$  leicht bestimmen. Der zeitliche Abstand zwischen dem Erreichen dieser beiden Amplituden beträgt nämlich gerade eine Schwingungsdauer

$$T_d = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_d} \quad (14)$$

des gedämpften Systems.

Damit erhält man

$$\frac{\hat{\varphi}_n}{\hat{\varphi}_{n+1}} = e^{\delta T_d} \quad (15)$$

Das Produkt  $\delta \cdot T_d$  bezeichnet man als das logarithmische Dekrement  $\Lambda$ .

$$\Lambda = \delta \cdot T_d = \ln \frac{\hat{\varphi}_n}{\hat{\varphi}_{n+1}} \quad (16)$$

Frage: Welches Dämpfungsdrehmoment wäre in die Bewegungsgleichung einer gedämpften Schwingung einzusetzen, wenn nur äußere Reibung in den Lagern auftreten würde?

Völlig anders verhält sich das schwingungsfähige System jedoch, wenn es an ein periodisch von außen einwirkendes Drehmoment mit der Kreisfrequenz  $\omega_a$  angekoppelt wird. In diesem Fall stellt sich bei jedem Wert von  $\omega_a$  nach dem Abklingen eines Einschwingungsvorganges ein stationärer Schwingungszustand ein, in dem das Drehpendel mit der Frequenz des anregenden Drehmomentes schwingt. Das System führt jetzt eine erzwungene Schwingung aus. Für den Fall eines sich sinusförmig mit der Zeit ändernden Drehmoments

$$M_a = \hat{M}_a \cdot \sin(\omega_a \cdot t) \quad (17)$$

wird die Bewegungsgleichung:

$$M_R + M_D + M_a = J \cdot \ddot{\varphi} \quad \text{oder} \quad \ddot{\varphi} + \frac{b^*}{J} \cdot \dot{\varphi} + \omega_0^2 \cdot \varphi = \frac{\hat{M}_a}{J} \cdot \sin(\omega_a \cdot t) \quad (18)$$

Diese Gleichung besitzt für den stationären Zustand die Lösung

$$\varphi = \hat{\varphi}_p \cdot \sin(\omega_a \cdot t - \varphi_0) \quad (19)$$

Es ist dies die Gleichung einer ungedämpften harmonischen Schwingung mit der Amplitude  $\hat{\varphi}_p$  des Drehpendels und dem Nullphasenwinkel  $\varphi_0$ , der die Phasenverschiebung gegen das anregende Drehmoment angibt. Es gelten die folgenden Zusammenhänge:

$$\hat{\varphi}_p = \frac{\frac{M_a}{J \cdot \omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_a}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \frac{4 \cdot \delta^2}{\omega_0^2} \cdot \left(\frac{\omega_a}{\omega_0}\right)^2}} \quad (20)$$

$$\tan \varphi = \frac{2 \cdot \delta \cdot \omega_a}{\omega_0^2 - \omega_a^2} \quad (21)$$

Der Ausdruck

$$\hat{\varphi}_{p_0} = \frac{\hat{M}_a}{J \cdot \omega_0^2} \quad (22)$$

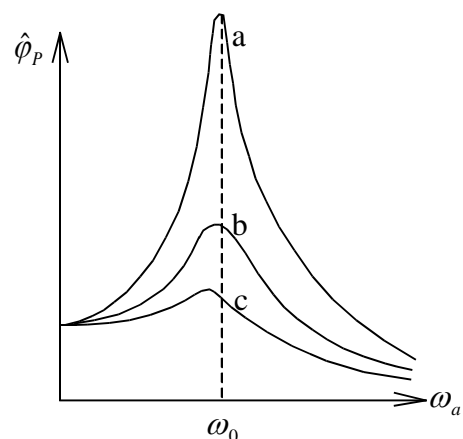
gibt nach Gl. 20 den Grenzwert der Amplitude des Drehpendels für sehr langsame Erregung ( $\omega_a \rightarrow 0$ ) an.

**Frage:** Wie lauten die Gleichungen für die freie und erzwungene Dehnungsschwingungen eines Schraubenfederpendels?

**Frage:** Warum dauert der Einschwingvorgang um so länger, je kleiner die Dämpfung ist?

Die Abhängigkeit der Amplitude des Drehpendels von der anregenden Kreisfrequenz ist in Abb. 1 für verschiedene Werte der Abklingkonstante aufgetragen.

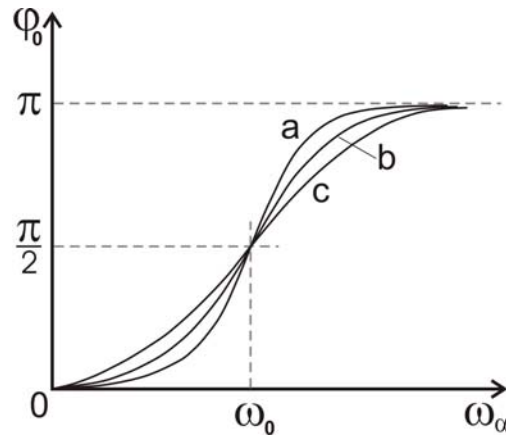
Abb. 1: Resonanzkurven für verschiedene Dämpfung (Kurve a gilt für die schwächste, Kurve c für die stärkste Dämpfung)



Die Amplitude erreicht also bei kleiner Dämpfung ein ausgeprägtes Maximum, wenn die anregende Frequenz etwas unterhalb der Eigenfrequenz des ungedämpften Systems liegt. Diese Erscheinung nennt man Resonanz. Die Kurven in Abb. 1 heißen Resonanzkurven. Bei Erhöhung der Dämpfung ein ausgeprägtes Maximum flacher und verschiebt sich zu niedrigeren Frequenzen.

Der Verlauf des Nullphasenwinkels der erzwungenen Schwingung in Abhängigkeit von der anregenden Kreisfrequenz ist in Abb. 2 ebenfalls für verschiedene Dämpfungen dargestellt.

Abb. 2: Frequenzgang der Phasenverschiebung zwischen erzwungener und anregender Schwingung für verschiedene Dämpfungen (siehe Abb.1)

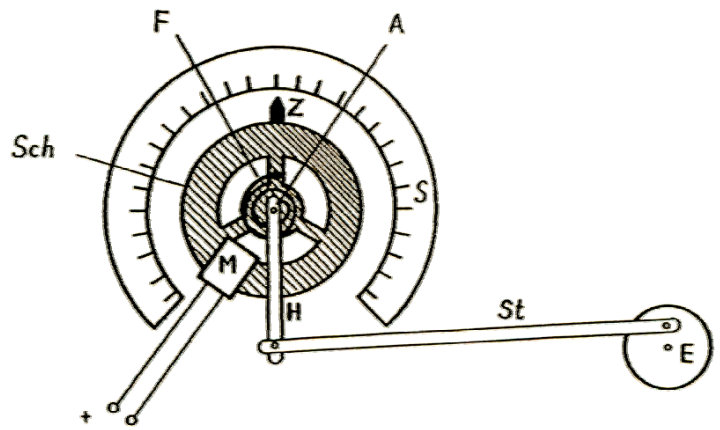


Die erzwungene und die anregende Schwingung sind für  $\omega_a \ll \omega_0$  in Phase. Für  $\omega_a \approx \omega_0$  in der Resonanzstelle, bleibt die Phase der erzwungenen Schwingung um  $\pi/2$  hinter dem erregenden Drehmoment zurück. In diesem Fall wird dem schwingenden System dauernd Energie zugeführt. Die Amplitude  $\hat{\phi}_p$  wird dann nur mehr durch die Dämpfung begrenzt. Für hohe anregende Frequenzen schwingen Drehpendel und erregendes Drehmoment mit einer Phasenverschiebung  $\pi$  von, d. h. gegeneinander.

Fragen: Wie kann man mathematisch begründen, dass dem System im Resonanzfall in jedem Augenblick Energie zugeführt wird?  
Woher kommt diese Energie?

## 2 Versuchsanordnung

Eine Kupferscheibe **SCH** ist um eine Achse **A** möglichst reibungsfrei drehbar gelagert. Ihr Trägheitsmoment um diese Achse ist  $J$ . Das eine Ende der Spiralfeder **F** (mit der Winkelrichtgröße  $D^*$ ) ist an **SCH** befestigt, das andere Ende an einem Hebel **H**, der ebenfalls um **A** drehbar ist. Die Scheibe trägt einen Zeiger **Z**, der die Ablesung der Winkelamplitude auf einer feststehenden Skala **S** erlaubt. Bei feststehendem Hebel **H** führt das Drehpendel freie Schwingungen aus.



Zur Anregung von erzwungenen Schwingungen des Pendels wird der Hebel **H** über eine Schubstange **St**, deren anderes Ende an einem Exzenter **E** auf der Achse eines Elektromotors befestigt ist, sinusförmig mit kleiner Amplitude hin und her bewegt. Die Drehzahl des Elektromotors ist variabel. Um das Pendel einstellbar dämpfen zu können, schwingt die Scheibe zwischen den Polen eines Elektromagneten **M**. Da die Kupferscheibe ein senkrecht zu einem inhomogenen Magnetfeld bewegter Leiter ist, werden in der Ebene der Scheibe wirbelartig in sich geschlossene elektrische Ströme induziert. Auf diese übt das Magnetfeld Kräfte aus, die nach der Lenzschen Regel die Bewegung des Leiters hemmen. Da die Kraft auf den stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld proportional zur Geschwindigkeit des bewegten Leiters ist, ist das in der Einführung angenommene geschwindigkeitsproportionale Dämpfungsdrehmoment für eine Wirbelstrombremse gültig. Durch Veränderung der Stromstärke  $I_w$  in den Magnetspulen kann die Dämpfungskonstante in einem weiteren Bereich variiert werden.

### 3 Versuchsdurchführung und Aufgaben

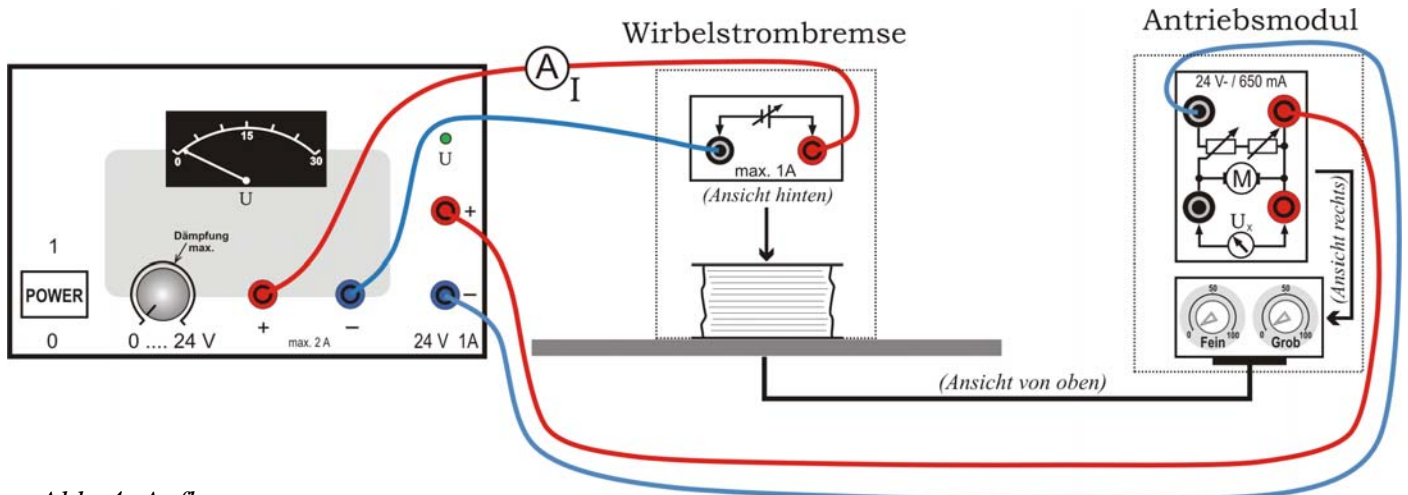


Abb. 4: Aufbau

#### 3.1 Bestimmung der Schwingungsdauer $T_0$ der freien Schwingung des Drehpendels.

Hinweis: Führen Sie diese Messungen bei abgeschalteter Wirbelstrombremse aus.

Zur Erhöhung der Genauigkeit messen Sie mehrmals die Zeit die 20 Schwingungen benötigen. Berechnen Sie  $\omega_0$ .

$T_0$	$\omega_0$

#### 3.2 Bestimmung der Abklingkonstanten $\delta$ der freien gedämpften Schwingungen für verschiedene Dämpfungen

- Bestimmen Sie zunächst die maximale Dämpfungsstromstärke des Bremsmagneten, bei der es noch möglich ist, mindestens 4 aufeinanderfolgende Amplituden auf der Winkelskala abzulesen.
- Für 5 verschiedene Dämpfungsstromstärken bis zu diesem Maximalwert und bei abgeschalteter Dämpfung bestimme man das logarithmische Dekrement  $\Lambda$  nach Gl. 16, indem man die aufeinanderfolgenden Amplituden immer auf der gleichen Seite der Winkelskala abliest und aus den Verhältnissen  $\hat{\varphi}_n / \hat{\varphi}_{n+1}$  einen Mittelwert bildet. Zur Erhöhung der Genauigkeit sollte  $\hat{\varphi}_n$  dabei nicht zu klein sein und die Messung jeweils wiederholt durchgeführt werden.

Zur Bestimmung der Abklingkonstanten  $\delta$  verwende man die Gleichung  $\delta = \Lambda/T_0$  mit  $T_0$  aus Aufgabe 3.1. Wegen Gl. 16 müsste man streng genommen  $\delta$  aus  $\delta = \Lambda/T_d$  errechnen.

Begründen Sie, warum im vorliegenden Fall diese Abweichung vernachlässigbar ist!

Man trage  $\Lambda$  gegen die Magnetstromstärke  $I_w$  auf (Millimeter-Papier). Welche Kurve erwartet man? Diskutieren Sie den Ordinatenschnittpunkt dieser Kurve!

### 3.3 Bestimmung der Resonanzkurven für verschiedene Dämpfungen

Messe Sie die Resonanzkurven für 3 verschiedene Dämpfungsstromstärken, für die das logarithmische Dekrement etwa 0,09, 0,2 und 0,5 beträgt. Wird die Wirbelstrombremse vollkommen abgeschaltet, so wird die Amplitude bei Resonanz zu groß und außerdem dauert der Einschwingvorgang sehr lange.

Die Messung beginnt man mit kleinen Frequenzen, die sicher unter der Resonanzstelle liegen. Dann erhöht man  $\omega_a$  in großen Schritten, um die ungefähre Lage des Resonanzmaximums zu finden. Schließlich vermisst man die Umgebung der Resonanzstelle noch mit kleiner Schrittweite von  $\omega_a$ . Man bestimmt dabei für jede Drehzahlseinstellung die anregende Frequenz und misst die Amplitude  $\hat{\varphi}_p$  der erzwungenen Schwingung, nachdem man den stationären Schwingungszustand abgewartet hat. Die Amplitude ergibt sich als Mittelwert der Ausschläge nach links und rechts.

Für die graphische Darstellung der Resonanzkurven ist  $\hat{\varphi}_{p_0}$  notwendig. Für diese Größe erhält man aus Gl. 20 durch eine Reihenentwicklung für kleine  $\omega_a$  den Näherungsdruck:

$$\hat{\varphi}_p = \hat{\varphi}_{p_0} \left[ 1 + \left( \frac{\omega_a}{\omega_0} \right)^2 \left( 1 - 2 \frac{\delta^2}{\omega_0^2} \right) \right]$$

Trägt man also bei niedrigen Frequenzen  $\hat{\varphi}_p$  gegen  $\omega_a^2$  auf, so erhält man eine Gerade, welche die Ordinate bei  $\hat{\varphi}_{p_0}$  schneidet.  $\hat{\varphi}_{p_0}$  muss sich als unabhängig von der Dämpfung ergeben.

Zur graphischen Darstellung der Resonanzkurven trägt man  $\frac{\hat{\varphi}_p}{\hat{\varphi}_{p_0}}$  gegen  $\frac{\omega_a}{\omega_0}$  auf Millimeterpapier auf.

Als Parameter gebe man das logarithmische Dekrement an.

#### Hinweis:

Man kann die Messungen dadurch beschleunigen, dass man zunächst für eine erste Frequenz  $\omega_1$  die Amplitude  $\hat{\varphi}_p$  der erzwungenen Schwingung für die ungefähren Dekremente 0,09, 0,2 und 0,5 misst. Danach führt man die gleiche Messung für eine weitere und für alle folgenden Frequenzen  $\omega$  durch. Für die Graphen verbindet man alle Punkte mit gleichem Dekrement miteinander.

Bei der vorliegenden Versuchsanordnung kann auf die graphische Bestimmung von  $\hat{\varphi}_{p_0}$  verzichtet werden,  $\hat{\varphi}_{p_0}$  muss hier gleich sein der Amplitude des Zeigers, der mit der Achse des Drehpendels fest gekoppelt ist und den zeitlichen Verlauf der Anregung anzeigt. Bei sehr kleinen Anregungsfrequenzen folgt nämlich das Drehpendel nicht nur phasen-, sondern auch amplitudengleich diesem Zeiger.

#### Literatur:

Gertsen, Kneser: *Physik*, Springer Verlag

Dobrinski, Krakau, Vogel: *Physik für Ingenieure*, Teubner Verlag Stuttgart

Walcher: *Praktikum der Physik*, Teubner Verlag Stuttgart

Pohl: *Mechanik, Akustik und Wärmelehre*, Springer Verlag