

Der Elastizitätsmodul

Stichwort: Hookesches Gesetz

1 Physikalische Grundlagen

Jedes Material verformt sich unter Einwirkung einer Kraft. Diese Verformung ist abhängig von der Art der Kraft (Scher-, Zug-, Torsionskraft usw.), der Richtung der Kraft, der Vorgeschichte, der Vorbehandlung des Materials, der Temperatur und vielen weiteren Bedingungen.

Bei diesem Versuch geht es um den Elastizitätsmodul, auch kurz E-Modul genannt, der beschreibt, wie stark sich ein Material einer Verformung widersetzt. Diese Größe wird für verschiedene Materialien durch Messung der Durchbiegung von Rohren oder Stäben bestimmt, für Stahl zusätzlich durch Messung der Verlängerung eines Drahtes unter dem Einfluss einer Zugkraft. Beide Messungen erfolgen durch Aufnahme eines Verformungs-Kraft-Diagramms, wodurch gleichzeitig die Proportionalität zwischen Verformung und Kraft überprüft werden kann.

Bei sonst konstanten Versuchsbedingungen kann die vom Material erzeugte Gegenkraft F als Funktion der Längenänderung Δl der Probe angesehen werden. Diese Funktion kann um die Gleichgewichtslage nach Taylor entwickelt werden:

$$F(\Delta l) = \text{const}_1 \cdot (\Delta l) + \text{const}_2 \cdot (\Delta l)^2 + \text{const}_3 \cdot (\Delta l)^3 + \dots \quad (1)$$

Für genügend kleine Längenänderungen überwiegt der lineare Anteil:

$$F(\Delta l) = \text{const}_1 \cdot \Delta l \quad (2)$$

Falls die Deformation nach Entfernen der Kraft wieder verschwindet, spricht man von elastischer Deformation, bleiben die Formänderungen zurück, handelt es sich um plastische Verformung. Ob elastisch oder plastisch, hängt vom Material ab und auch wesentlich vom Ausmaß der Verformung. Die größtmögliche elastische Deformation heißt *Elastizitätsgrenze*.

Im folgenden werden wir nur noch elastische Deformationen betrachten. Ferner beschränken wir uns auf Dehnungen und Stauchungen; Scherungen oder Verdrillungen werden hier nicht behandelt. In *Abb. 1* ist ein zylinderförmiger Probekörper dargestellt, der auf die Wirkung der Kraft F mit einer Dehnung Δl reagiert. Die für eine gegebene Längenänderung Δl erforderliche Kraft F hängt von den Abmessungen des Probekörpers ab. Die Konstante const_1 ist daher keine Materialkonstante. Teilt man jedoch die Zugkraft F durch die Querschnittsfläche A senkrecht zur Kraftrichtung, so erhält man eine Größe, die von A unabhängig ist. Dabei muss der Querschnitt über die ganze Probenlänge konstant bleiben. Den Quotienten Kraft/Querschnittsfläche bezeichnet man als **Zugspannung** σ .

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (3)$$

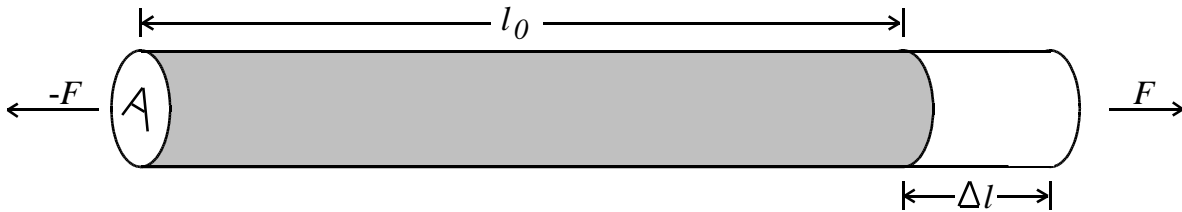


Abb. 1: Dehnung eines zylinderförmigen Probekörpers

Ähnlich ergibt der Quotient aus der Längenänderung Δl und der Länge im Gleichgewicht (=ohne Zugbeanspruchung) l_0 eine Zahl, deren Betrag von der speziellen Wahl von l_0 unabhängig ist. Es ist die **relative Längenänderung** ε :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (4)$$

Zwischen der Zugspannung σ und der relativen Längenänderung ε , die beide von den speziellen Abmessungen des Probekörpers unabhängig sind gilt nach Hooke:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E \quad (5)$$

Die dabei auftretende Proportionalitätskonstante E heißt Elastizitätsmodul (E-Modul) und ist eine Materialkonstante. Sie kann beispielsweise aus der Zugdehnung eines Drahtes bestimmt werden.

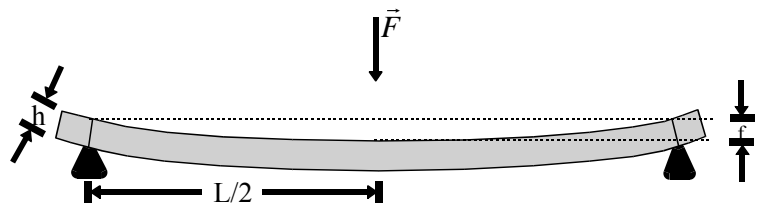
Werte des E-Moduls für einige Werkstoffgruppen:

Werkstoff	E in GPa
Stahl	190...220
Aluminium	71
Blei	16
Glas	40...90
Plexiglas	3...3,5

Nicht immer ist ein beliebiges Material in Form eines genügend langen Drahtes zu erhalten. Es gibt aber weitere Methoden, den E-Modul zu bestimmen. Eine davon ist die Durchbiegung eines Stabes entsprechend der in Abb. 2 dargestellten Anordnung.

Für die maximale Durchbiegung f einer schlanken Biegeprobe ($L > 10 \cdot h$), die in der Mitte zwischen den Auflagern mit der Kraft F belastet wird, gilt folgende Formel:

$$f = \frac{F \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot J} \quad (6)$$



(vgl. Lehrbücher der Festigkeitslehre bzw. der Technischen Mechanik.)

Abb. 2: Durchbiegung eines Probestabes zur Bestimmung des E-Moduls

Die Formel gilt wie das Hookesche Gesetz nur für den elastischen Bereich, bei einer geringen maximalen Durchbiegung

$$f < 10^{-3} \frac{L^2}{r} \quad (\text{bei Kreisquerschnitt}), \quad (7)$$

$$f < 10^{-3} \frac{L^2}{h} \quad (\text{bei rechteckigem Querschnitt})$$

J ist das **Flächenmoment** der Biegeprobe, das sich für verschiedene Querschnitte auf folgende Weise berechnen läßt: (vgl. Lehrbücher der Festigkeitslehre bzw. der Technischen Mechanik.)

Rechteckquerschnitt (h·b)	$J = h^3b / 12$
Kreisquerschnitt (Durchmesser d):	$J = \pi d^4 / 64$
Rohr (Innendurchmesser d, Außendurchmesser D):	$J = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64}$

2 Versuchsdurchführung

(Hinweis: Zug- und Biegeversuch können gleichzeitig (parallel) durch die Gruppe ausgeführt werden.)

2.1 Zugversuch

- Messen Sie die Verlängerung des Drahtes als Funktion der Zugkraft, d.h. für verschiedene angehängte Gewichte.
- Bitte beachten Sie dabei folgendes:
 - Belastungsgrenze 2 kg
 - etwa 10 Messpunkte aufnehmen
 - Stellen Sie zu Beginn die digitale Messuhr auf Null (Reset-Taste ca. 1 Sekunde lang drücken).
 - Der Aufnahmeteller für die Gewichte darf die Wand nicht berühren
 - Temperaturregler ausgeschaltet lassen. Beobachten Sie die maximale Änderung der Temperatur während des Versuchs. Die Temperatur darf sich während des Versuchs nicht allzu sehr ändern.

2.2 Biegeversuch

- Messen Sie die Durchbiegung der folgenden Objekte als Funktion der Belastung, wobei die Objekte mittig zwischen zwei Auflagern belastet werden:

Nr.	Material	Geometrie	maximale Belastung
1	Kupfer	Rohr mit 15mm \varnothing und 1mm Wandstärke	1,8 kg
2	Aluminium	Rohr mit 15 mm \varnothing und 1 mm Wandstärke	1,8 kg
3	Stahl	Flachmaterial 35 mm \times 2,1 mm	1,2 kg
4	Aluminium	Flachmaterial 35 mm \times 2,1 mm	1,2 kg
5	Plexiglas (hoch)	Flachmaterial 30 mm \times 6 mm	0,6 kg
6	Plexiglas (flach)	Flachmaterial 30 mm \times 6 mm	0,6 kg

- Bitte beachten Sie dabei folgendes:
 - Die Messuhr hat einen Messbereich von nur 10 mm. Daher ist darauf zu achten, dass die Messuhr so positioniert ist, dass sie den gesamten Versuchsverlauf erfassen kann. Es wird empfohlen, die Messuhr so einzustellen, dass der Zeiger auf der mm-Skala auf der *roten Eins* steht.
 - Auch bei der drehbaren Strichskala ist die „rote Skaleneinteilung“ zu verwenden.
 - Nachdem die Messuhr positioniert ist, kann durch Drehen des gerändelten Außenrings (wie z.B. auch bei einer Taucheruhr) der Nullpunkt verschoben werden.

- Für das Plexiglas und die Rohre sind die beiliegenden Hilfsmittel zu verwenden (Abb. 3).

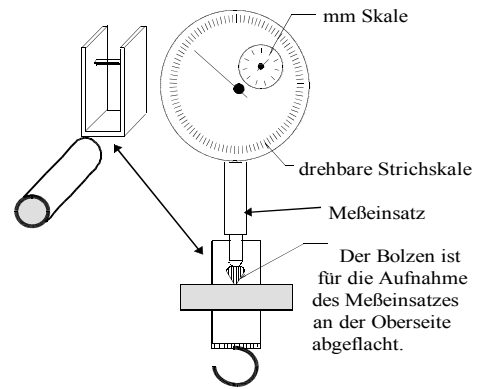


Abb. 3: Messuhr und Hilfsmittel

3 Auswertung

Schreiben Sie eine Zusammenfassung von 4-6 Sätzen, was wie gemessen und ausgewertet wurde. Fügen Sie eine Tabelle dazu, die die gemessenen E-Module mitsamt ihren Unsicherheiten und die jeweiligen Literaturwerte enthält. Geben Sie die Quelle(n) Ihrer Literaturwerte an. Beurteilen Sie an Hand Ihrer Statistikkenntnisse, welche Ihrer Messungen mit den Literaturwerten verträglich sind und welche nicht.

3.1 Zugversuch

- Ermitteln Sie aus dem Zugversuch den Elastizitätsmodul (mit Unsicherheit) mittels linearer Regression!
- Stellen Sie Ihre Daten in einem Spannungs-Dehnungs-Diagramm dar (nur Messpunkte, keine Unsicherheitsbalken)!
- Beachten Sie: Die Formeln für die Unsicherheit der Regressionskoeffizienten liefern nur dann das richtige Ergebnis, wenn die Regression mit den Rohdaten (Verlängerung - Masse der Gewichtsstücke) durchgeführt wird (also Größen Spannung und Dehnung verwenden). Aus der Geradensteigung wird mit Hilfe verschiedener Daten des Versuchsaufbaus der E-Modul ausgerechnet. Anwendung der Unsicherheitsfortpflanzung auf diese Rechnung liefert die Unsicherheit des E-Moduls.
- Anmerkung für die spätere Auswertung:
 Drahtquerschnitt = $(0,50 \pm 0,01)$ mm
 Drahtlänge: siehe Angabe am Versuch
 Digitalmessuhr = $\pm 0,02$ mm

3.2 Biegeversuch

- Ermitteln Sie für jeden Biegeversuch den Elastizitätsmodul (mit Unsicherheit) nach der gleichen Vorgehensweise wie beim Zugversuch. Zeichnen Sie auch die Diagramme zur Überprüfung des Hookeschen Gesetzes.
- Anmerkung für die spätere Auswertung:
 Toleranzbereich der Messuhr = $\pm 0,01$ mm
 Toleranzbereich vom Messschieber = $\pm 0,1$ mm
 Toleranzbereich Stahlmaßstab = $\pm (0,2 + 0,2 \cdot L)$ mm mit L = gemessene Länge zwischen den Auflagern in m.

Literatur:

Bargel/Schulze: *Werkstoffkunde*. VDI-Verlag

