Abschätzung der Messunsicherheit
(Fehlerrechnung)

Die vorliegende Anleitung ist für das Anfängerpraktikum Physik gedacht, um den Einstieg in die Abschätzung von Messunsicherheiten und die Berechnung der Unsicherheiten des Ergebnisses zu erleichtern. Sie stützt sich auf eine, weit ausführlichere "Anleitung zur Messwertabschätzung"(1), deren eingehendes Studium für ein tieferes Verständnis unerlässlich ist.

Diese Kurzanleitung soll sich zunächst auf die Auswertung solcher Versuche beziehen, bei denen die Messwerte durch einmalige oder wenige Messungen gewonnen werden, eine statistische Auswertung also nicht sinnvoll ist. Wird eine solche, statistische, Auswertung verlangt, etwa beim Versuch "Gasdichte", so werden die notwendigen Hinweise in der entsprechenden Anleitung gegeben. Darüber hinaus wird in den einzelnen Versuchsbeschreibungen ein Plan zur vereinfachten Abschätzung der Mess- und Ergebnisunsicherheiten angegeben (Fehlerrechnung).

1. Allgemeines zur Messunsicherheit

Kein Messwert stimmt mit dem "wahren" Wert überein. Werden die Messwerte, wie in den meisten Fällen, weiterverarbeitet, so wird auch das so gewonnene Endergebnis mit einer "Unsicherheit" behaftet sein. Die Ungenauigkeit der Messwerte hat als Ursachen insbesondere die Unvollkommenheit der Messgeräte und des Messverfahrens. Handelt es sich z.B. um die Messgröße x, kann man meist mit deren Kenntnis ein Intervall der Breite $2\,\Delta x$ angeben, indem sich der wahre Wert mit ausreichender Wahrscheinlichkeit befindet. Man gibt dann den Messwert folgendermaßen an:

$$x = x_w \pm \Delta x$$

wobei x_w der „wahrscheinlichste“ Messwert und Δx die Messunsicherheit (Fehler) ist.

2. Messunsicherheit einzelner Größen

Wir unterscheiden zwischen folgenden Fehlertypen:

2.1 Fehlergrenzen G beruhen auf Bauungenauigkeiten z.B. bei elektr. Messinstrumenten (Klassenfehler)

Sie liefern meist den größten Beitrag und werden bestimmt durch Angabe des Herstellers oder durch den Gerätetyp.

Beispiel: Schiebelehre $G = 0{,}1$ mm

Ampere-Meter: $G = \frac{(\text{Klassenzahl auf Skala})\cdot \text{Meßbereich}}{100}$

Der Hersteller garantiert, dass der richtige Wert xr im Bereich

$$x_{abgelesen} - G \le x_r \le x_{abgelesen} + G$$

liegt.

2.2 Systematische Abweichungen beruhen z.B. auf Eichfehlern, es werden dauernd zu hohe oder zu niedrige Werte gemessen

Sie können nur durch Vergleich mit einem (geeichten) Messgerät festgestellt werden. In diesem Fall wird man alle Messwerte entsprechend korrigieren.

2.3 Zufällige Abweichungen beruhen auf Unsicherheit bei der Ablesung

Ihre Größe wird durch mehrmalige (dreimalig genügt meist) Messung festgestellt**.** Sind die Streuungen der Messwerte größer als die Fehlergrenzen *G*, so muss die Berechnung der Unsicherheit mit statistischen Methoden erfolgen. Meist sind sie kleiner als *G*, dann können sie leicht durch dreimalige Ablesung und Mittelwertbildung:

$$\overline{x} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} x_i$$

eliminiert werden.

3. Fehlerfortplanzung (mehrere Messgrößen)

Wird eine Messgröße mittels einer Funktion $y = f(x_1, x_2...)$aus mehreren Messgrößen x_1, x_2... errechnet, so setzt sich die Unsicherheit Δy des Ergebnisses aus den einzelnen Messunsicherheiten Δx_i zusammen.

Bei einer Funktion $y = f(x_1, x_2)$ führt beispielsweise eine kleine Änderung von x_1 auf $x_1+\Delta x_1$ zu dem Ergebnis $y(x_1+\Delta x_1, x_2)$.

Analog dazu führt eine Änderung von x_2 auf $x_2+\Delta x_2$ zu dem Resultat $y(x_1, x_2+\Delta x_2,)$.

Die Funktion *y* ändert sich dabei insgesamt um den Wert *dy*, der dem vollständigen Differential der Funktion *y* entspricht. Eine grafische Darstellung des vollständigen Differentials ist in Abb. 1 dargestellt.

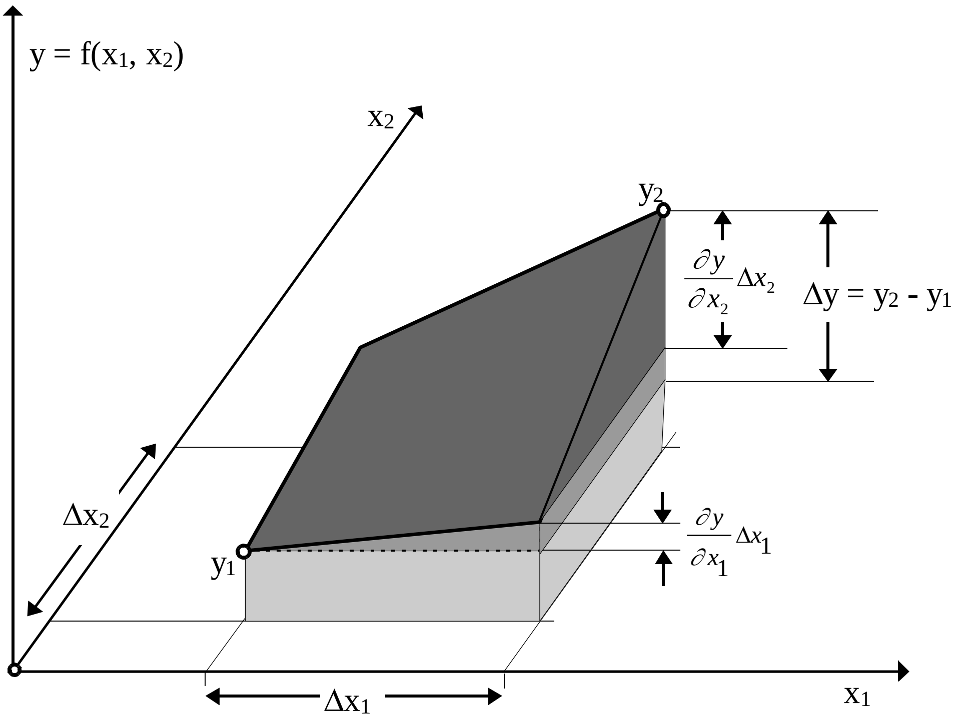


Abb. 1: Grafische Darstellung eines vollständigen Differentials

Anschaulich stellt man diese Änderung *dy* in Abhängigkeit von 2 Änderungen dx_1 und dx_2 so dar:

Die Steigungen in x_1- bzw. x_2-Richtung werden dabei durch die sogenannten **partiellen** Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ bzw. $\frac{\partial y}{\partial x_2}$ bestimmt. Damit ergibt sich die Gesamtänderung von *y*:

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta x_2$$

4. Praktische Bestimmung der Unsicherheit des Ergebnisses

4.1 Potenzprodukt

Ist die Funktion y ein Potenzprodukt der Messgrößen, also z.B.

$$y = const.\cdot x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \qquad n_i = pos.\ oder\ neg.$$

Beispiel: Dichte eines Zylinders (Masse m, Radius R, Länge l):

$$\rho = \frac{Masse}{Volumen} = \frac{m}{R^2 \cdot \pi \cdot l}$$

so erhält man sehr einfach entweder die **"wahrscheinliche relative Ergebnisunsicherheit" (auch mittlerer Fehler nach Gauß):**

$$\frac{\Delta y}{y} = \pm\sqrt{(n_1 \frac{\Delta x_1}{\overline{x}_1})^2 + (n_2 \frac{\Delta x_2}{\overline{x}_2})^2 + ...}$$

$$bzw. \quad \frac{\Delta \rho}{\rho} = \pm\sqrt{(\frac{\Delta m}{\overline{m}})^2 + (\frac{2\Delta R}{\overline{R}})^2 + (\frac{\Delta l}{\overline{l}})^2}$$

oder die “maximale relative Ergebnisunsicherheit“:

$$\frac{\Delta y}{y} = \pm(\left|\frac{n_1 \Delta x_1}{\overline{x}_1}\right| + \left|\frac{n_2 \Delta x_2}{\overline{x}_2}\right| + ...)$$

In beiden Formeln sind die Exponenten n_i und (in den meisten Fällen) die Fehlergrenzen G_i für die Δx_i einzusetzen. Die x_i sind dann die Mittelwerte aus z.B. drei Messungen.

Beispiel:	**Dichtebestimmung des Zylinders**	
Messwerte:	m = 2670 g ± 2g	(Tafelwaage)
	r = 25,5 mm ± 0,1mm	(r = Mittelwert aus drei Messungen mit Schieblehre)
	l = 16o,0 mm ± 0,5 mm	(Messung mit Stahllineal)

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \pm\sqrt{\left(\frac{2}{2670}\right)^2 + \left(2\frac{0{,}1}{25{,}5}\right)^2 + \left(\frac{0{,}5}{160}\right)^2} \approx 0{,}01 = 1\% \quad \text{(wahrscheinlichste relative Unsicherheit)}$$

2. Allgemeiner Fall

Liegt eine Ergebnisfunktion $y = f(x_1, x_2 ...)$ vor, wobei die x_i keine reinen Potenzprodukte bilden, kann zunächst die **maximale Ergebnisfehlergrenze G_y** bestimmt werden:

$$G_y = \pm\left(\left|\frac{\partial y}{\partial x_1} G_1\right| + \left|\frac{\partial y}{\partial x_2} G_2\right|\right) \quad (G_i = \text{Fehlergrenzen der einzelnen Messwerte})$$

Bei etwas komplizierteren Ausdrücken führt die Durchführung der partiellen Differentiale schnell zu unübersichtlichen und langwierigen Rechnungen. Deshalb ist sehr zu empfehlen, schrittweise die Funktion *y* zu vereinfachen, indem man substituiert und Teilfunktionen einführt. Von diesen Teilfunktionen ist die Unsicherheit getrennt (und meist einfach) zu berechnen.

Beispiel (I): Bei Versuch: "Massenträgheitsmoment eines Rades aus der Schwingungsdauer eines physischen Pendels" ergibt sich das gesuchte Massenträgheitsmoment *J*:

$$J = J' + m \cdot s^2 = \frac{T'^2}{2\pi} m \cdot g \cdot s + m \cdot s^2$$

Hier ist es z.B. sinnvoll, die absoluten Unsicherheiten der Terme $J' = A$ und $m \cdot s^2 = B$ getrennt zu bestimmen und dann die Unsicherheit des Ergebnisses zu berechnen:

$$\Delta J = \pm\sqrt{\Delta A^2 + \Delta B^2}$$

ΔA bzw. ΔB erhält man aus der "Fehlerformel" für Produkte, z.B.:

$$\Delta A = \left(2\frac{\Delta T'}{T'} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta s}{s}\right) A$$

Beispiel (II): Berechnung der spezifischen Wärmekapazität *c* nach der Mischungsregel:

$$c = \frac{\left(m_2 + m_0\right) \cdot c_{H_2O}\left(T_m - T_2\right)}{m_1 \cdot \left(T_1 - T_m\right)}$$

Hier bestimmt man die Unsicherheit der drei Klammerausdrücke getrennt:

m	=	$(m_2 + m_0)$	mit	Δm	=	$\Delta m_2 + \Delta m_0$
T(2)	=	$(T_m - T_2)$	mit	$\Delta T(2)$	=	$\Delta T_m + \Delta T_2$
T(1)	=	$(T_1 - T_m)$	mit	$\Delta T(1)$	=	$\Delta T_1 + \Delta T_m$

und kann dann die Produktregel für ein Potenzprodukt anwenden:

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta T(2)}{T(2)} + \frac{\Delta m_1}{m_1} + \frac{\Delta T(1)}{T(1)}$$

Mit den Messunsicherheiten bzw. den Fehlergrenzen:

Masse m_1 des Probekörpers:	147g ± 1g	
Wasserwert:	m_0 = 50g ± 20g (wird angegeben)	
Temperaturen:	T_1 = (98,6 ± 0,1)°C	
	T_2 = (21,6 ± 0,1)°C	
	T_m = (23,7 ± 0,1)°C	
Wasser:	m_2 = 1000g ± 3g	ergibt sich:

$$\frac{\Delta c}{c} = \pm\sqrt{\left(\frac{23}{1050}\right)^2 + \left(\frac{0{,}2}{2{,}1}\right)^2 + \left(\frac{1}{147}\right)^2 + \left(\frac{0{,}2}{74{,}9}\right)^2} \approx 0{,}0976 = \pm 10\%$$

Das Ergebnis lautet also: Die spez. Wärmekapazität ist *c* = (850 ± 90) J/(kg K)

5. Fehlergrenzen

a) bei Längenmessgeräten

Die Eichfehler betragen:

1. bei aus Metall oder Glas hergestellten Maßstäben aus einem Stück sowie bei Maßbändern mit Strichmarken

   ± (0,2 + 0,2 · L)mm

2. bei Gliedermaßstäben aus Holz oder Kunststoff

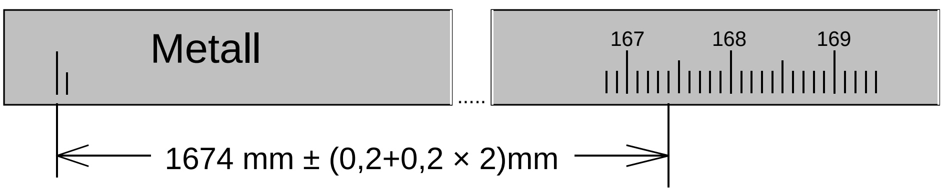
   ± L mm

(für *L* ist die ganze Zahl einzusetzen, welche die aufgerundete Sollänge des zu prüfenden Abstandes in Meter angibt)

für den Abstand zweier aufeinanderfolgender Zentimeter, Halbzentimeter oder Millimeterbegrenzungen voneinander bei allen Maßen

± 0,2 mm

Beispiel zu 1:



b) bei Flüssigkeitsthermometern

Die Eichfehler betragen bei Thermometern mit 1.) benetzender Thermometerflüssigkeit und 2.) nicht benetzender Thermometerflüssigkeit, die ganz eintauchend justiert sind im Temperaturbereich

$$-10\ °C < \vartheta < 110\ °C$$

		bei Skalenwert in K	0,5	1	2	5
1.)	Eichfehler in K		±1	±2	±3	±5
2.)	Eichfehler in K		±0,5	±1	±2	±5

c) Fehlergrenzen bei Thermoelementen

Temperaturbereich	Klasse 1	Klasse 2	Klasse 3
$-200\ °C < \vartheta < 400\ °C$	±1K	±2K	±3K
$400\ °C < \vartheta$	±0,25%	±0,5%	±0,75%
	der jeweiligen Temperatur (in °C)		

d) bei Zeitzählern (Stoppuhren)

Eichfehler: ± (kleinster Skalenwert + 0,5 · ‰ · t) (t = gemessene Zeit)

e) von Massestücken

Nenn"gewicht" in g	Klasse F_1 Fein"gewicht" in mg	Klasse M_3 Handels"gewicht" in mg
1	0,10	10
2	0,12	12
5	0,15	15
10	0,20	20
20	0,25	25
50	0,30	30
100	0,50	50
200	1,0	100
500	2,5	250
1000	5	500
2000	10	1000
5000	25	2500

6. Schlussbemerkung

In einzelnen Versuchsbeschreibungen werden Hinweise zur Bestimmung der Unsicherheiten gegeben. Wichtiger als eine "genaue" Berechnung ist eine **Abschätzung** der Unsicherheiten. Oft bringt eine vorherige Überlegung, welche Messunsicherheiten besonders zum Ergebnis beitragen bzw. welche vernachlässigbar klein sind, eine wesentliche Vereinfachung des Rechengangs.

Literaturhinweise:

J. Hingsammer: *Bestimmung von Messunsicherheiten (Fehlerrechnung),* FK06 HM, Physik Praktikum
W. Walcher: *Praktikum der Physik*, B. G. Teubner Stuttgart 1989
J. R. Taylor: *Fehleranalyse - Einführung in die Untersuchung von Unsicherheiten in Physik. Messungen,* VCH Verlag 1988
Wilhelm H. Westphal: *Physikalisches Praktikum,* Vieweg Braunschweig 1971