Spezifische Ladung e/m des Elektrons

1 Einführung

1.1 Allgemeines

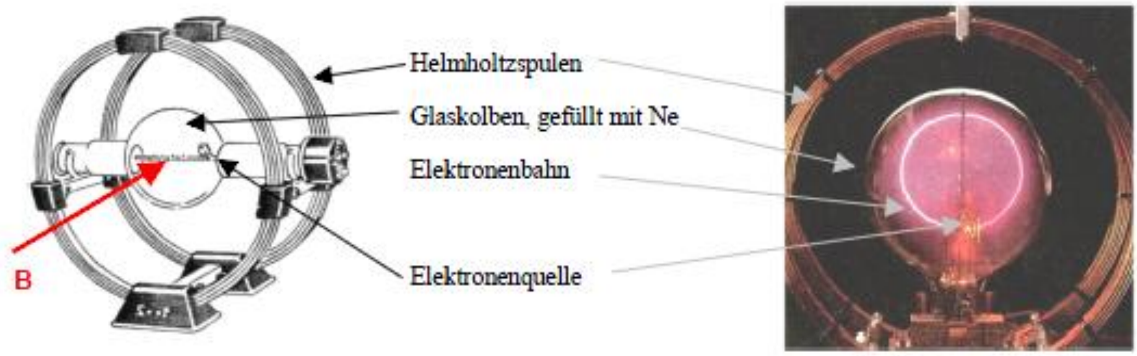
Ziel dieses Versuchs ist es eine wichtige Konstante der Atomphysik, die spezifische Ladung des Elektrons zu messen. Diese Konstante lässt sich durch Ablenkung eines Elektronenstrahls im Magnetfeld bestimmen. Da die Elementarladung e mit Hilfe des Millikanversuchs bestimmbar ist, kann über die e/m-Messung auch die Masse m des Elektrons bestimmt werden.

1.2 Benötigte Vorkenntnisse

- Magnetische Feldstärke $\vec{H}$, magnetische Induktion (Flussdichte) $\vec{B}$
- Bewegung von Elektronen im elektrischen und magnetischen Feld
- Zentrifugalkraft bei Kreisbewegungen
- Elektrisches Potenzial

2 Fadenstrahlröhre

Die Fadenstrahlröhre besteht aus einem kugelförmigen Glaskolben, der mit dem Edelgas Neon gefüllt ist (Restgasdruck p = 1,3 Pa). Die Elektronen werden aus einer beheizten Elektrode (Heizspannung U_H = 6,3 V) emittiert. Die positive hohe Anodenspannung (U_A = 200 – 400 V) zwischen Kathode und Anode beschleunigt die Elektronen. Diese treten durch das Loch in der Anode in das homogene B-Feld.
Zwischen Kathode und Anode ordnet man meist noch eine dritte Elektrode in Form eines den Elektronen-strahl umgebenden Zylinders an. Diese Elektrode, *Wehnelt* genannt, wird gegenüber der Kathode auf negatives Potential gelegt und hilft den Elektronenstrahl zu fokussieren.



Die Elektronen stoßen auf ihrem Weg mit den Neon-Atomen zusammen, ionisieren diese und regen sie somit zum Leuchten an. Man sieht also nicht die Elektronen selbst, sondern die leuchtenden Ne-Atome, welche die Spur der Elektronen abzeichnen.

Es soll die Bewegung der Elektronen im homogenen Magnetfeld untersucht werden. Das homogene Feld wird von einem Helmholtz-Spulenpaar erzeugt. Ein Helmholtz-Spulenpaar sind zwei kurze Zylinderspulen, die in einem ganz bestimmten Abstand relativ zu ihrem Durchmesser aufgestellt sind. Die Elektronenkanone wird so gerichtet, dass die Elektronen senkrecht zu den Magnetfeldlinien austreten, so dass die Elektronen auf einer Kreisbahn fliegen.

Aus dem Bahnradius, Magnetfeld und der Elektronengeschwindigkeit lässt sich die spezifische Ladung bestimmen.

3 Theorie

3.1 Elektronen im elektrischen Feld

Auf ein Elektron mit der Masse *m* und der Ladung *q* = -*e* wirkt im elektrischen Feld *E* eine Kraft längs der *E*-Feldlinien

$$\vec{F} = q\vec{E} \tag{1}$$

Bei homogenen Feldern zwischen den Platten eines Kondensators erfahren die Elektronen mit $E = U / d$ eine konstante Beschleunigung

$$a = F / m \tag{2}$$

Mit dem Durchlaufen der Spannung *U* nimmt das Elektron die elektrische Energie

$$W_{el} = QU \tag{3}$$

in unserem Fall $W_{el} = eU$ auf. Diese Energie besitzt das Elektron in Form von kinetischer Energie

$$W_{kin} = \frac{1}{2} mv^2 \tag{4}$$

Die zugeführte elektrische Energie wird somit in kinetische Energie der Elektronen umgesetzt. Es gilt für nicht-relativistische Elektronen:

$$\frac{1}{2} mv^2 = eU \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}. \tag{5}$$

3.2 Elektronen im Magnetfeld

Magnetische Felder lassen sich durch Permanentmagnete, aber auch durch elektrische Ströme erzeugen. Wickelt man einen Draht der Länge *L* zu einer Spule mit *n* Windungen, und fließt ein Strom *I* durch den Draht, so erhält man im Inneren der Spule ein homogenes Magnetfeld *H* mit

$$H = \frac{nI}{L} \tag{6}$$

Die häufig gebräuchliche Größe ist der magnetische Fluss $B = \mu_0 \mu \cdot H$ mit

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 1{,}26 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{H/m} \\ \mu &= 1 \quad (\text{fürVakuum}) \end{aligned} \tag{7}$$

Bringt man eine Ladung mit der Masse *m* in das Magnetfeld, so erfährt sie keine Kraftwirkung, wenn sie im Feld ruht, oder wenn sie sich parallel zu den Feldlinien bewegt. Bewegt sich das Teilchen durch ein homogenes (gleichmäßiges) Magnetfeld senkrecht zu den Magnetfeldlinien, so wirkt auf die Ladung die Lorentzkraft:

$$\begin{aligned} F_L &= qv_\perp B \\ \overrightarrow{F_L} &= q\vec{v} \times \vec{B} \end{aligned}. \tag{8}$$

Ist die Geschwindigkeit *v* senkrecht zum homogenen Magnetfeld, so durchläuft das Elektron eine Kreisbahn mit dem Radius *r*.

$$F = m\frac{v^2}{r} = evB$$
$$\Rightarrow r = \frac{mv_\perp}{eB} \qquad (9)$$

Tritt das Elektron *nicht* senkrecht in das Magnetfeld ein, so ergibt sich *keine* Kreis-, sondern eine Spiral-Bahn.

Durch Elimination von v aus Gl. (9) mit Gl. (5) ergibt sich:

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{r^2 B^2} \qquad (10)$$

Im folgenden Versuch werden die Beschleunigungsspannung U und der Bahnradius r direkt gemessen. Die Größe des B-Feldes muss aus der Geometrie des felderzeugenden Spulensystems und dem Spulenstrom I bestimmt werden.

3.3 Theorie

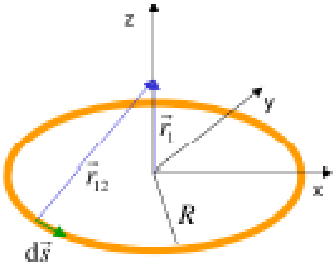
Im Versuch wird ein Helmholtz-Spulenpaar zur Erzeugung des homogenen Magnetfeldes verwendet. So kann man auf eine direkte Messung von B verzichten, da das Magnetfeld aus dem Spulenstrom, der Windungszahl und der Spulengeometrie berechnet werden kann.
Betrachten wir zuerst einen vom Strom I durchflossenen Leiter mit der Bahnkurve $\vec{s}(\vec{r}_2)$. Nach dem Gesetz von Biot-Savart wird das B-Feld

$$\vec{B}(\vec{r}_1) = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{Leiter} \frac{\vec{r}_{12} \times d\vec{s}}{|\vec{r}_{12}|^3} \qquad (11)$$

erzeugt. Das B-Feld wird in T (Tesla) oder G (Gauß) angegeben. Es gilt:

$$1T = 1\frac{Vs}{m^2} = 10^4 G \qquad (12)$$

Magnetfeld einer Leiterschleife



Das B-Feld einer unendlich dünnen Leiterschleife hat entlang der z-Achse nur eine z-Komponente (Symmetrie):

$$B_z(z) = \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \qquad (13)$$

Reale Spulen haben eine gewisse Ausdehnung. Daraus ergeben sich Abweichungen der Magnetfeldwerte. Im Abstand z vom Nullpunkt lässt sich B aus der Geometrie des Helmholtz-Spulensystems und dem Spulenstrom I bestimmen:

$$B(z) = B_{Schleife}\left(z + \frac{d}{2}\right) + B_{Schleife}\left(z - \frac{d}{2}\right) =$$
$$\frac{\mu_0 I R^2}{2}\left(\frac{1}{\left((z + d/2)^2 + R^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left((z - d/2)^2 + R^2\right)^{3/2}}\right) \qquad (14)$$

Für $z = 0$ ergibt sich:

$$B(z=0) = \frac{\mu_0 I R^2}{2}\left(\frac{2}{\left((d/2)^2 + R^2\right)^{3/2}}\right) = \mu_0 N \cdot I \cdot \frac{R^2}{\left(R^2 + a^2\right)^{3/2}} \qquad (15)$$ mit

N: Windungszahl einer Spule (hier: je N = 124)
I: Spulenstrom (max. 5A)
R: mittlerer Spulenradius (hier: R = 14,75 cm)
2a=d: mittlerer Spulenabstand (hier: d = 150 mm)

μ_0 : magnetische Feldkonstante

$$\mu_0 = 1{,}2566 \cdot 10^{-6} \frac{mkg}{C^2}$$

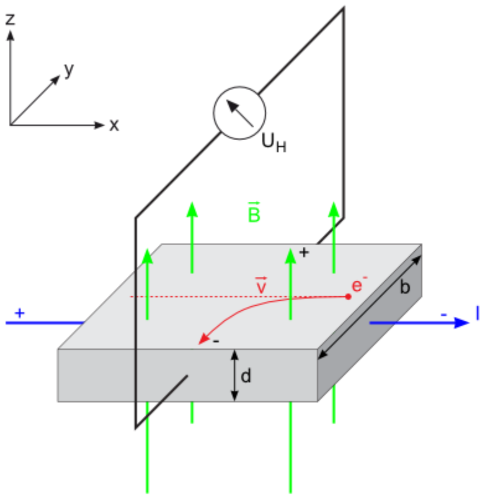
Nähere Informationen zur Herleitung finden Sie im Anhang „Theoretische Herleitung“.

3.4 Hall-Sonde

Die Wirkungsweise einer Hall-Sonde beruht auf dem Hall-Effekt und dient der Messung von Magnetfeldern und Strömen. Eine quaderförmige Sonde der Länge l und der Querschnittsfläche $A = bd$ wird von einem möglichst konstanten elektrischen Strom I in x-Richtung durchflossen. Befindet sich die Sonde in einem magnetischen Feld B in z-Richtung, so wirkt auf alle orthogonal zum Feld bewegten Ladungen eine Lorentzkraft

$$\vec{F}_L = e\vec{v} \times \vec{B} \qquad (16)$$

Die Elektronen werden abgelenkt, es entsteht ein elektrisches Feld in y-Richtung. Kompensiert diese Kraft die Lorentzkraft, d.h. sind elektrische Kraft und Lorentzkraft gleich groß, so gilt:



$$F_L = evB = eE = F_{el} \qquad (17)$$

Mit $E = U_{Hall} / b$ folgt:

$$vB = E = U_{Hall} / b$$
$$U_{Hall} = bvB \qquad (18)$$

Die abgegriffene Spannung ist also proportional zur magnetischen Flussdichte. Für den in unserem Versuch verwendeten Sensor gilt bei einer angelegten Spannung von 4,5V:

$$U_{Hall} = (3{,}125 \pm 0{,}125)\frac{mV}{G} \cdot B \qquad (19)$$

Bei einem Magnetfeld von beispielsweise 1 G resultiert eine Hallspannung von:

$$U_{Hall} = (3{,}125 \pm 0{,}125) mV \qquad (20)$$

Wollen Sie somit eine höhere Empfindlichkeit erreichen, sollten Sie auch eine größere Spannung anlegen. Beachten Sie allerdings, dass die Spannung höchstens 10V betragen darf, ansonsten beschädigen Sie den Hallsensor.

4 Aufgabenstellung und Auswertung

In diesem Versuch wollen Sie e/m sehr genau bestimmen. Dazu benötigen Sie das B-Feld auf den Kreisbahnen.

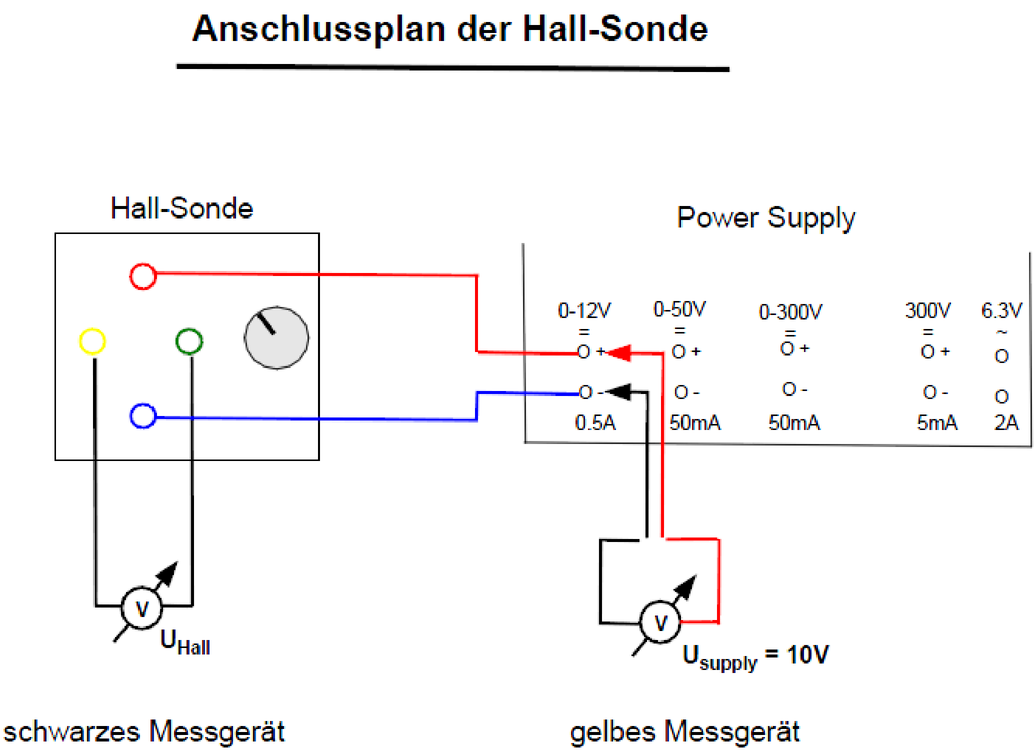
4.1. Das Magnetfeld auf der Achse soll aus der Spulengeometrie berechnet werden. Verwenden Sie dazu das Biot-Savart-Gesetz. Bestimmen Sie dazu das Magnetfeld in der Mittelebene der beiden Spulen in einem Bereich von 0-5 cm um die Achse:

a) Berechnen Sie aus der Spulengeometrie für einen Strom von 1 A das Magnetfeld genau in der Mitte des Spulenaufbaus. Bitte messen Sie nicht die Spulengeometrie mit dem Messschieber aus. Die scharfen Kanten könnten den Isolationslack der Spule beschädigen. Verwenden Sie die angegebenen Daten. Überprüfen Sie Ihre Rechnung auf grobe Fehler, indem Sie mit der (für unsere Zwecke nicht ausreichend genauen) Herstellerangabe vergleichen:

maximale Flussdichte bei 5 A: 3,7 mT

(www.elwe-physik.de/download/d/d06-51.pdf).

b) Mit der Hallsonde soll die Abnahme des Magnetfelds bestimmt werden, wenn wir uns von der z-Achse entfernen. Dazu wird ein ratiometrischen Hall-IC[1] verwendet. Verwenden Sie dazu folgende Schaltung:



[1] Ein ratiometrischer Hall-IC ist eine integrierte Schaltung, die ein Hall-Element und einen Verstärker enthält und deren Ausgangsspannung um so weiter von der halben Versorgungsspannung abweicht, je größer das angelegte Feld ist. Ein solcher IC ist als Zweig einer Brückenschaltung vorgesehen, deren anderer Zweig von zwei gleichen Widerständen gebildet wird.

c) Setzen Sie das Brett mit dem Millimeterpapier zwischen die Spulen und positionieren Sie den Hall-IC genau in der Mitte zwischen den Spulen (Beachten Sie die Richtung, da der

IC nur auf Felder senkrecht zu seiner Oberfläche empfindlich ist). Geben Sie der Brücke eine Versorgungsspannung von 10.00 V und schließen Sie ein Anzeigeinstrument für die Diagonalspannung an. Warten Sie, bis die Anzeige nicht mehr driftet. Gleichen Sie bei stromlosen Spulen die Brücke auf null ab. Stellen Sie dann einen Spulenstrom von 5.000 A ein und lesen Sie die Diagonalspannung ab.

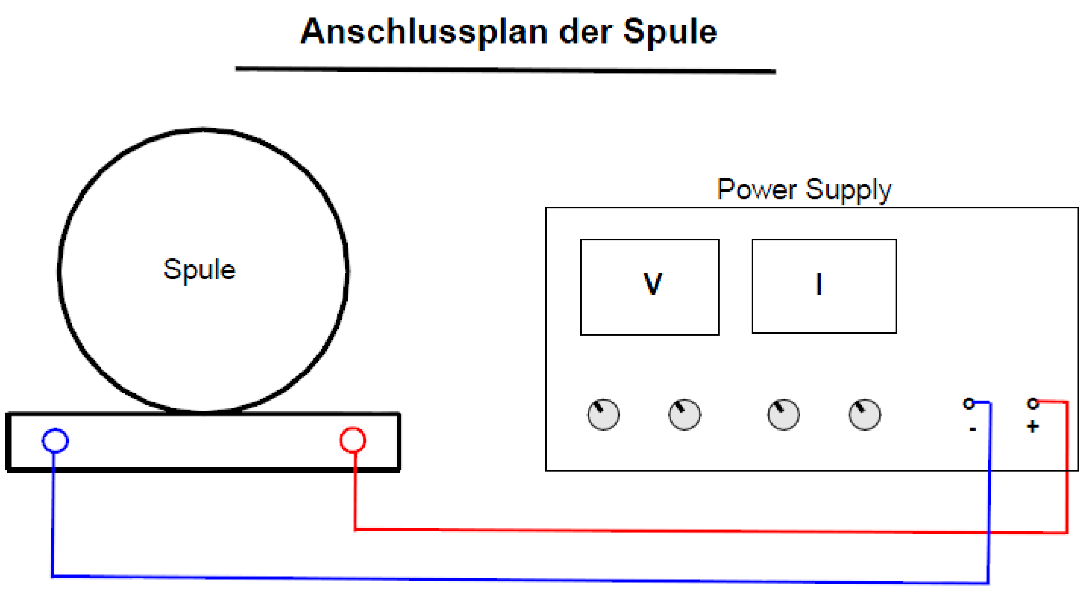
d) Verschieben Sie den IC in cm-Schritten von der Achse und notieren Sie jeweils die Diagonalspannung. Berechnen Sie für jeden Messpunkt die relative Änderung im Vergleich zum Wert auf der Achse. Der absolute Wert des B-Feldes **auf** der z-Achse ergibt sich mit unseren Werten der Spule zu:

$$B(z=0) = \mu_0 N \cdot I \cdot \frac{R^2}{\left(R^2 + a^2\right)^{3/2}} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \cdot 125 \cdot \frac{(0{,}75m)^2}{\left((0{,}75m)^2 + (0{,}75m)^2\right)^{3/2}} I = 7{,}40 \cdot 10^{-5} \left[\frac{T}{A}\right] \cdot I[A] \tag{21}$$

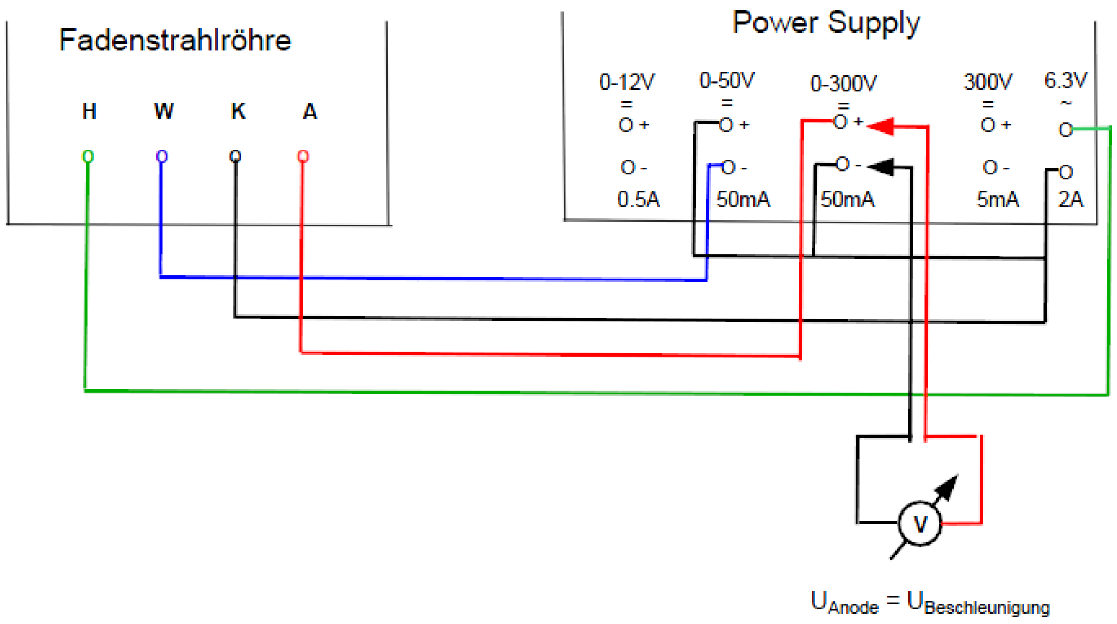
e) Stellen Sie das Ergebnis in einem sinnvoll skalierten Diagramm dar.

4.2 Messung und Bestimmung von e/m mit dem Fadenstrahlrohr

a) Entfernen Sie das Millimeterpapierbrett und bauen Sie das Fadenstrahlrohr nach dem unteren Anschlussschema auf. Schalten Sie die Geräte für die Verdrahtung aus. Die Geräte dürfen erst eingeschaltet werden, nachdem der Betreuer Ihre Verdrahtung überprüft hat. Verwenden Sie nur Kabel mit Berührungsschutz



Anschlussplan der Fadenstrahlröhre



b) Nehmen Sie das Fadenstrahlrohr in Betrieb. Schließen Sie folgende Spannungen an:
- Kathode: Bezugspotential
- Heizung: 6.3 V Wechselspannung
- Wehnelt: regelbar, 0 bis -50 V, typischer Wert -30 V
- Anode: regelbar, 0 bis +300 V, typischer Wert 300 V, Messgerät vorsehen!

c) Wenn alle Spannungen anliegen und die Kathode Betriebstemperatur erreicht hat, zeigt sich der Elektronenstrahl bei übergestülptem Verdunklungskasten als schwache rötliche Spur. Variieren Sie Spulenstrom, Anoden- und Wehneltspannung, um zu sehen, was passiert.

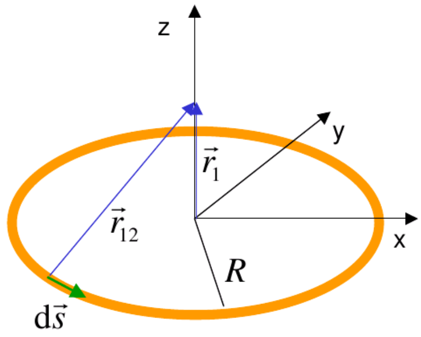
d) Hauptmessung: Stellen Sie die Anodenspannung auf Maximalwert und den Spulenstrom zunächst auf ungefähr 2 A. Versuchen Sie, mit Hilfe des Wehnelt den Strahl entlang seines Weges einigermaßen gleichmäßig zu fokussieren. Justieren Sie anschließend den Spulenstrom derart nach, dass der Bahndurchmesser exakt 80 mm beträgt. Vermeiden Sie Parallaxenfehler bei der Ablesung von r. Verwenden Sie die Markierung mit den Querstäben und schauen Sie parallel zu den Markierungen.

e) Bestimmen Sie nun e/m quantitativ.

f) Führen Sie die Fehlerrechnung von e/m durch. Größen, die mit einer Unsicherheit behaftet sind, sind in unserem Fall U_B, r und B. ΔU_B wird aus den Ungenauigkeitsangaben sowie Schwankungen des Messgeräts abgeschätzt.

Anhang – Theoretische Herleitung

Magnetfeld einer Leiterschleife



Das B-Feld einer Leiterschleife hat entlang der z-Achse aus Symmetriegründen nur eine z-Komponente, d.h . $\overrightarrow{r_{12}}$ steht senkrecht auf $d\vec{s}$.
Legt man beispielsweise $\overrightarrow{r_{12}}$ in die yz-Ebene, so besitzt $d\vec{s}$ nur noch eine x-Komponente:

$$\overrightarrow{r_{12}} \times d\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ds \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \cdot ds \\ -R \cdot ds \end{pmatrix}.$$

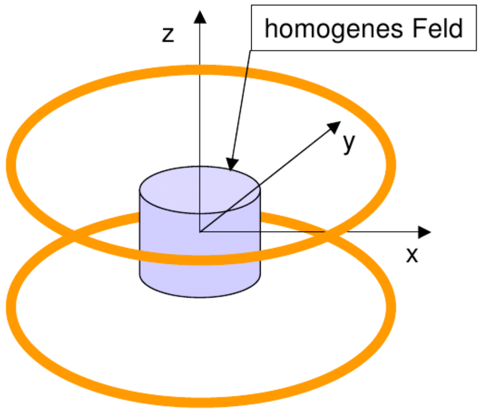
Daraus folgt für B_z:

$$B_z(z) = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{-R \cdot ds}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{R \cdot ds}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} \oint ds = \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}.$$

Verschiebt man die Spule um □□in Richtung der z-Achse wird Gl. (2) zu:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0}{2} I \cdot R^2 \frac{1}{\left(R^2 + (z-a)^2\right)^{3/2}}$$

Magnetfeld einer Spule



Fügt man eine zweite, identische Leiterschleife bei *z* = -*a* hinzu, so addieren sich deren ihre magnetische Felder:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0}{2} I \cdot R^2 \left(\frac{1}{\left(R^2 + (z-a)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(R^2 + (z+a)^2\right)^{3/2}} \right).$$

Diese Geometrie nennt man Helmholtz-Spulenpaar. Wie groß muss der Abstand zwischen den Spulen gewählt werden, damit man ein homogenes Feld erhält? Dazu müssen wir $\frac{d^2 B_z(z)}{dz^2} = 0$ berechnen. Nach einer kurzen Rechnung ergibt sich:

$$2 \cdot \frac{(R^2 + a^2) - 5a^2}{\left(R^2 + a^2\right)^{7/2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = R/2 \quad \Rightarrow \quad R = 2a = d.$$

Für ein Helmholtz -Spulenpaar erhält man somit ein sehr gutes homogenes Feld entlang der *z*-Achse, wenn man die Spulen im Abstand des Spulenradius *R* aufstellt (2*a* = *R*).

Die durch die Helmholtz-Spule erzeugte magnetische Flussdichte erhält man durch Superposition des Magnetfeldes bei *z'* = *d*/2 und *z'* = - *d*/2:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0}{2} I \cdot R^2 \left(\frac{1}{\left(R^2 + (z - d/2)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(R^2 + (z + d/2)^2\right)^{3/2}} \right)$$

Für *z* = 0 ergibt sich:

$$B(z=0) = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left(\frac{2}{\left((d/2)^2 + R^2\right)^{3/2}} \right) = \mu_0 N \cdot I \cdot \frac{R^2}{\left(R^2 + a^2\right)^{3/2}}$$

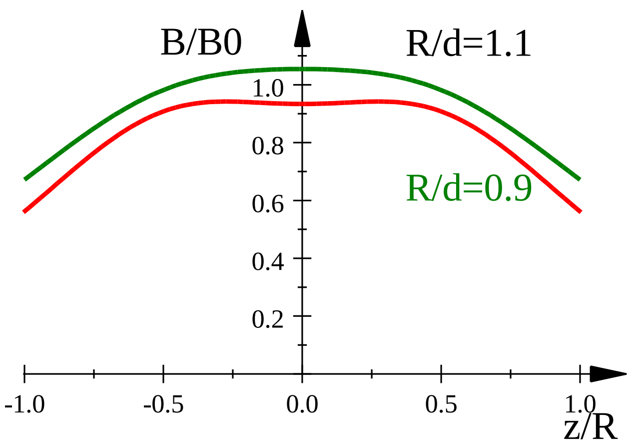
Entwickelt man diesen Ausdruck in einer Taylor-Reihe um z = 0, so ergibt sich:

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{\left((d/2)^2 + R^2\right)^{3/2}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{d^2 - R^2}{\left(d^2/4 + R^2\right)^2} z^2 + \mathrm{O}(4) \right).$$

Wählt man nun d = R (Helmholtz-Bedingung), so fällt der z^2-Term heraus, was bedeutet, dass das Magnetfeld in einem größeren Bereich um den Ursprung homogen ist.
Um die Größe des homogenen Bereiches bei der Helmholtzspule besser zu beschreiben, können wir die Taylor-Reihe eine Ordnung weiterentwickeln und *d* = *R* setzen:

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{\left((d/2)^2 + R^2\right)^{3/2}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{d^2 - R^2}{\left(d^2/4 + R^2\right)^2} z^2 + \frac{15}{8} \frac{d^4/2 - 3d^2R^2 + R^4}{\left(d^2/4 + R^2\right)^4} z^4 + O(6) \right).$$

$$B(z) \approx \frac{\mu_0 I}{(5/4)^{3/2} + R} \left(1 - \frac{144}{125} \frac{z^4}{R^4} \right)$$



Rel. Magnetische Feldstärke für unterschiedliche Anordnungen

Physikalisches Anfängerpraktikum

SLE – spezifische Ladung des Elektrons *e*/*m*

Gruppennummer	Name	

Auswertung ist o.k. ☐

Folgende Korrekturen sind nötig: