Bestimmung des Massenträgheitsmomentes eines Rades aus der Schwingungsdauer bei Aufhängung als Torsionspendel und physisches Pendel

Stichworte: Massenträgheitsmoment, Steinerscher Satz, Physisches Pendel

1 Grundlagen

1.1 Dynamisches Grundgesetz der Drehbewegung

Die dynamische Grundgleichung für die Rotation eines beliebig geformten starren Körpers um eine raumfeste Drehachse (Abb. 1) lautet:

$$\vec{M} = J \cdot \vec{\alpha} \qquad (1)$$

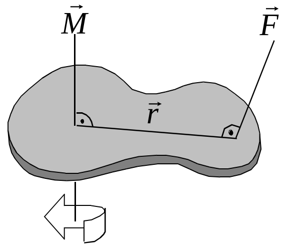

Abb. 1: Rotation eines beliebig geformten, starren Körpers um eine raumfeste Drehachse

Hierbei ist $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ das in Achsendrehung wirkende Drehmoment $\vec{M}$ (Ursache der Drehbewegung) und $\alpha = d\omega/dt = d^2\varphi/dt^2$ die Winkelbeschleunigung (Wirkung des Drehmoments). Beide Größen sind im allgemeinen zeitabhängig.

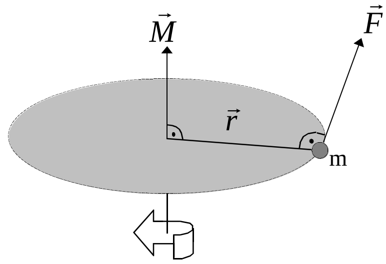

Abb. 2: Rotation eines Massenpunktes

Die Proportionalitätskonstante J heißt Massenträgheitsmoment und hängt sowohl vom jeweiligen Körper als auch von der Lage der Drehachse im Körper ab. Das Massenträgheitsmoment J kann experimentell aus einer Messung von Drehmoment M und resultierender Winkelbeschleunigung α aus (Gl. 1) bestimmt werden.

Die Berechnung des Massenträgheitsmomentes eines Massenpunktes (Abb. 2) im Abstand r von der Drehachse, ergibt:

$$J = r^2 \cdot m \qquad (2)$$

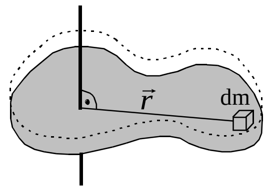

Abb. 3: Zerlegung eines beliebigen Körpers in einzelne Massenpunkte

Das Massenträgheitsmoment J eines beliebig geformten starren Körpers ist die Summe der Beiträge $dJ = r^2 \cdot dm$ der einzelnen praktisch punktförmigen Teilmassen dm (Abb. 3):

$$J = \int r^2 dm \qquad (3)$$

Für einfach geformte Körper mit analytisch gegebenen Begrenzungen lässt sich dieses Integral ausrechnen und damit das Massenträgheitsmoment theoretisch bestimmen. Speziell für den Fall eines um seine Symmetrieachse rotierenden Zylinders konstanter Dichte (Abb. 4) ergibt sich:

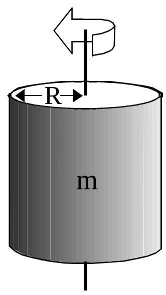

Abb. 4: Rotation eines Zylinders

$$J = 0{,}5 \cdot m \cdot R^2 \qquad (4)$$

Rotiert ein Körper um eine um a gegen den Schwerpunkt verschobene (exzentrische) Achse, so verknüpft der Satz von Steiner die Massenträgheitsmomente eines Körpers für diese verschiedenen, aber parallele Drehachsen (Abb. 5) miteinander, von denen eine durch den Schwerpunkt S des Körpers verläuft.

$$J' = J + m \cdot s^2 \qquad (5)$$

J = MTM um Schwerpunktachse
J’= MTM um aktuelle Achse
s = Abstand zwischen beiden Achsen
m = Körpermasse

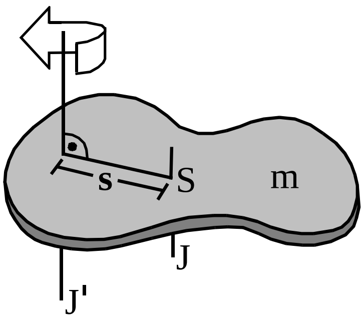

Abb. 5: Rotation um eine Achse außerhalb des Schwerpunktes

1.2 Torsionsschwingung am Draht (Torsionspendel)

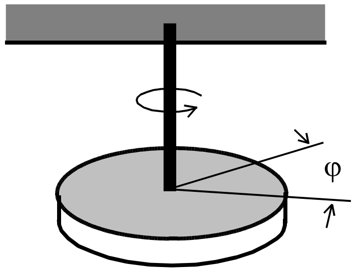

Abb. 6: Torsionspendel

Wird eine an einem Draht in der Mitte aufgehängte Scheibe (Abb. 6) aus der Ruhelage ausgelenkt, so übt der tordierte Draht auf die Scheibe ein rücktreibendes (daher negatives Vorzeichen!) Drehmoment aus, das dem Auslenkwinkel φ proportional ist:

$$M = -D^{*} \cdot \varphi \qquad (6)$$

Gl.6 in Gl. 1 eingesetzt, ergibt für den Auslenkwinkel die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{D^*}{J}\varphi = 0 \qquad (7)$$

mit einer harmonischen Drehschwingung als Lösung:

$$\varphi = \hat{\varphi} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{D^*}{J}}t\right) = \hat{\varphi} \cdot \cos\left(2\pi \frac{t}{2\pi\sqrt{\frac{J}{D^*}}}\right) \qquad (8)$$

Hierbei ist $\hat{\varphi}$ die anfängliche Drehwinkelamplitude. Für die Dauer einer Schwingung folgt aus Gl. 8:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D^*}}} \qquad (9)$$

1.3 Physisches Pendel

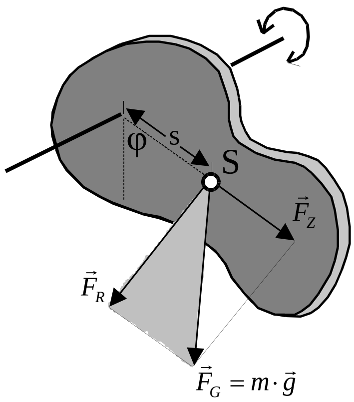

Abb. 7: Physisches Pendel

Man hängt einen Körper so auf, dass er um eine exzentrische Achse pendeln kann. Dann kommt durch die Rückstellkraft $\vec{F}_R$ als Komponente des im Schwerpunkt S angreifenden Gewichtes $\vec{F}_G = m \cdot \vec{g}$ ein rück-treibendes Moment M zustande (Abb. 7). Mit $\left|\vec{F}_R\right| = \left|\vec{F}_G\right| \cdot \sin\varphi$ und dem Abstand s zwischen der Drehachse und dem Schwerpunkt S ergibt sich

$$M = -m \cdot g \cdot s \cdot \sin\varphi \qquad (10)$$

Für kleinere Winkel ($\varphi_0 \leq 5°$) kann man näherungsweise $\sin\varphi = \varphi$ setzen:

$$M = -m \cdot g \cdot s \cdot \varphi \qquad (11)$$

Gl. 11 in Gl. 1 eingesetzt, ergibt für die Pendelbewegung die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{m \cdot g \cdot s}{J}\varphi = 0 \qquad (12)$$

mit einer harmonischen Schwingung als Lösung:

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \cos\left(\tfrac{m \cdot g \cdot s}{J} t + \delta\right) = \varphi_0 \cdot \cos\left(2\pi \frac{t}{2\pi\sqrt{\frac{J}{m \cdot g \cdot s}}} + \delta\right) \qquad (13)$$

Hierbei ist wieder φ_0 eine zeitlich konstante Größe und δ die Dämpfungskonstante, die durch die Anfangsbedingungen festgelegt sind. Die Schwingdauer folgt aus Gl. 13:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m \cdot g \cdot s}}} \qquad (14)$$

2 Experimentelle Bestimmung des Trägheitsmomentes eines Rades aus der Schwingungsdauer bei Aufhängung als Torsionspendel

2.1 Versuchsanordnung

T_1	=	Schwingungsdauer der Scheibe
m_1	=	Masse der Scheibe
J_1	=	Massenträgheitsmoment der Scheibe
D^*	=	Winkelrichtgröße des Drahtes
T_2	=	Schwingungsdauer des Rades
m_2	=	Masse des Rades
J_2	=	Massenträgheitsmoment des Rades

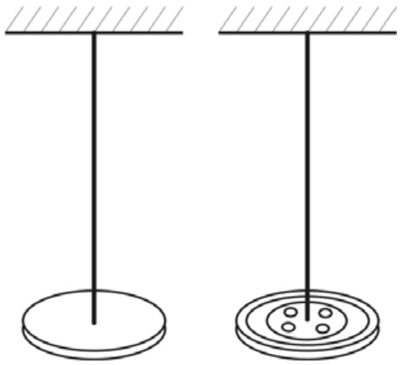

Abb. 8: Aufhängung als Torsionspendel

Zunächst wird die Scheibe, deren Massenträgheitsmoment aus ihrer Masse und dem Scheibenradius berechnet werden kann, in Torsionsschwingungen versetzt.

Die Schwingungsdauer ist die Zeit für ein volles Hin- und Herschwingen, d. h. sie ist die Zeit, die vergeht, bis sich eine an der Scheibe angebrachte Marke an einer anderen raumfesten Marke wieder in gleicher Richtung vorbeibewegt.

Aus der Schwingungsdauer der Scheibe und ihrem Massenträgheitsmoment kann die Winkelrichtgröße D^* des Drahtes bestimmt werden. Ist die Winkelrichtgröße bekannt, so kann durch Messen der Schwingungsdauer T_2 des Rades auch das Massenträgheitsmoment des Rades bestimmt werden.

2.2 Aufgaben

- Man bestimme:
  a) Massenträgheitsmoment J_1 der Scheibe
  a) Winkelrichtgröße D^* des Drahtes
  c) Massenträgheitsmoment J_2 des Rades

2.3 Versuchdurchführung

a) Zur Berechnung des Massenträgheitsmomentes (Gl. 4)der rotierenden Scheibe soll zunächst der eingefräste Schlitz vernachlässigt werden. Dann kann die Scheibe als Vollzylinder, der um seine Symmetrieachse rotiert, aufgefasst werden.

b) Bestimmen Sie die Schwingungsdauer T_1 für die Scheibe, indem Sie diese um maximal 180° auslenken und so viele Schwingungen stoppen, wie man noch gut erkennen kann. Führen Sie 10 Messungen aus, um einen guten Mittelwert für T_1 zu erhalten. Daraus erhält man D^*.

c) Man ersetzt die Scheibe durch das Rad und bestimmt auf gleiche Weise T_2. Vergleicht man die Gleichungen (9) für Scheibe bzw. Rad, lässt sich J_2 des Rades berechnen.

3. Experimentelle Bestimmung des Trägheitsmomentes des Rades aus der Schwingungsdauer bei Aufhängung als physisches Pendel

3.1 Versuchsanordnung

m = Masse des Rades
s = Abstand Drehachse (=Schneidkante)-Schwerpunkt (=Mittelpunkt)
T' = Schwingungsdauer
J' = Trägheitsmoment des Rades bei Drehung um Schneidkante
J_2 = Trägheitsmoment des Rades bei Drehung um eine zur Schneidenkante parallele Achse durch den Schwerpunkt

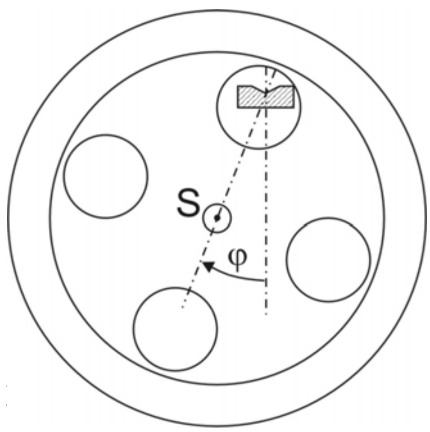

Abb. 9: Aufhängung als physisches Pendel

Versuchsziel ist die Bestimmung des Massenträgheitsmomentes des Rades nach einer zweiten Methode. Diesmal pendelt das Rad um eine horizontale Achse, die gegenüber der ursprünglichen Drehachse Schwingungsdauer kann wieder das Massenträgheitsmoment bestimmt werden.

3.2 Aufgaben

- Man bestimme:

  a) das Trägheitsmoment J' des Rades bezüglich der Drehachse (Pendelachse).

  b) das Trägheitsmoment J_2 des Rades bezüglich seiner Schwerachse

3.3 Versuchsdurchführung

a) Zur Bestimmung von T' stoppe man 3 mal die Dauer von 100 Schwingungen und mittle die Ergebnisse. Die Masse des Rades und der Abstand Achse - Schneidkante sind zu messen. Die Bestimmung von J' geschieht nach Gleichung (14).

b) Wenden Sie nun den Satz von Steiner (Gl. 5) an, um das Massenträgheitsmoment J_2 bezüglich der Schwerachse zu berechnen.

4 Auswertung

- Bestimmen Sie J_1, D^* sowie J_2 mit Hilfe der beiden Methoden.

- Bei der Messung der Schwingungsdauer sind nur die mehr oder weniger zufälligen Stoppfehler am Anfang und am Ende jeder Zeitmessung zu berücksichtigen und auf eine einzige Schwingung umzurechnen. In der Fehlerrechnung soll die rel. maximale Ergebnisunsicherheit aller zu bestimmenden Größen ermittelt werden. Zu beachten ist, dass bei der Berechnung von J_2 mit Hilfe des Steiner-Satzes eine Formel benutzt wird, die kein Potenzprodukt darstellt. Bilden Sie dafür entweder das vollständige Differential dJ oder benutzen Sie die Beziehung:

  $$|\Delta J_2| = |\Delta J'| + |\Delta(m \cdot s^2)|$$

- Vergleichen Sie die Ergebnisse mit ihren Fehlerintervallen nach beiden Methoden. Welche Methode ist die "genauere"?

Literatur:
Walcher: *Praktikum der Physik*, Teubner Verlag 1989, Seite 83 ff
Heywang, Treiber, Herberg, Neft: *Physik für Fachhochschulen und techn. Berufe*, Handwerk und Technik, Hamburg 1992, Seite 200 ff