1.3 Erzwungene Schwingung - Resonanz

Experiment: Wir untersuchen die Einwirkung einer periodisch veränderlichen Kraft auf ein schwingungsfähiges System (Federpendel).

1.3.1 Schwingungs-DGL und Lösung

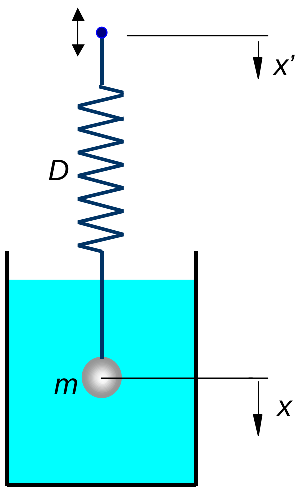
Außer der rücktreibenden Federkraft $-Dx$ und der viskosen Dämpfungskraft $-b\dot{x}$ greift an der Masse m noch eine äußere Kraft F_a an:

z.B. durch sinusförmige Bewegung des Aufhängepunktes mit der Frequenz ω.

$$x'(t) = \hat{x}_0' \cos \omega t$$

$$F_a = Dx'(t) = D\hat{x}_0' \cos \omega t = \hat{F}_0 \cos \omega t$$

Achtung: Die Anregungsfrequenz ω hat nichts mit ω_0 zu tun !



Bewegungsgleichung (Newton II):

$$m\ddot{x}(t) = \sum F_{ang.}$$

$$m\ddot{x}(t) = -Dx - b\dot{x}(t) + F_a$$

Dies führt zu

$$m\ddot{x}(t) + 2m\delta\dot{x}(t) + Dx = F_a \qquad \text{mit } \delta = \frac{b}{2m};\ \omega_0^2 = \frac{D}{m}$$

$$\boxed{\ddot{x}(t) + 2\delta\dot{x}(t) + \omega_0^{\,2} x(t) = \frac{\hat{F}_0}{m}\cos \omega t}$$

Bewegungsgleichung der erzwungenen Schwingung

Lineare, inhomogene DGL 2. Ordnung

oder:

$$m\ddot{x} + 2\delta m\dot{x} + D(x - x') = 0$$

Hierin bedeutet $D(x-x')$ die effektive Federkraft.

Lösung der DGL

Experiment zeigt:

Die allgemeine Schwingungsform ist eine Überlagerung der freien gedämpften Schwingung (Frequenz ω_0) und einer erzwungenen Schwingung mit der Anregungsfrequenz ω.

Die Überlagerung dieser beiden Schwingungen ist während des Einschwingvorgangs deutlich erkennbar.

Nach Abklingen der freien Schwingung (schnell bei großem δ) bleibt nur noch die erzwungene Schwingung mit der Frequenz ω übrig.

$$x(t)_{inhomog.} = x(t)_{hom.} + x(t)_{part.}$$

↳ klingt mit $e^{-\delta t}$ ab: $x(t)_{hom} \to 0$ für $t \to \infty$
Es bleibt nur die partikuläre oder stationäre Lösung übrig.

Das Experiment zeigt weiter, dass Amplitude und Phasenlage relativ zur Anregung von der Anregungsfrequenz ω abhängen. Wir machen daher für die stationäre Lösung $x(t)_{part} = x(t)$ den Ansatz:

$$x(t) = \hat{x}_0(\omega) e^{j(\omega t - \varphi_0(\omega))}$$

$$\dot{x}(t) = j\omega\hat{x}_0 e^{j(\omega t - \varphi_0)}$$

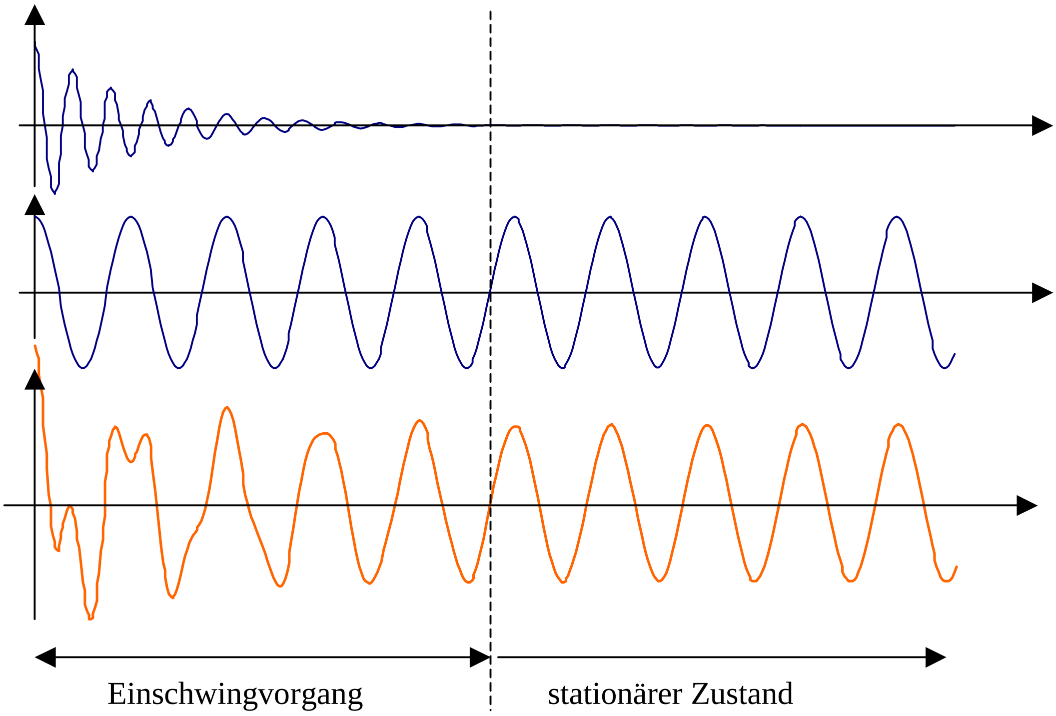
$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 \hat{x}_0 e^{j(\omega t - \varphi_0)}$$

Einschub: Einschwingvorgang

Einschwingvorgang und stationärer Zustand bei erzwungener Schwingung.

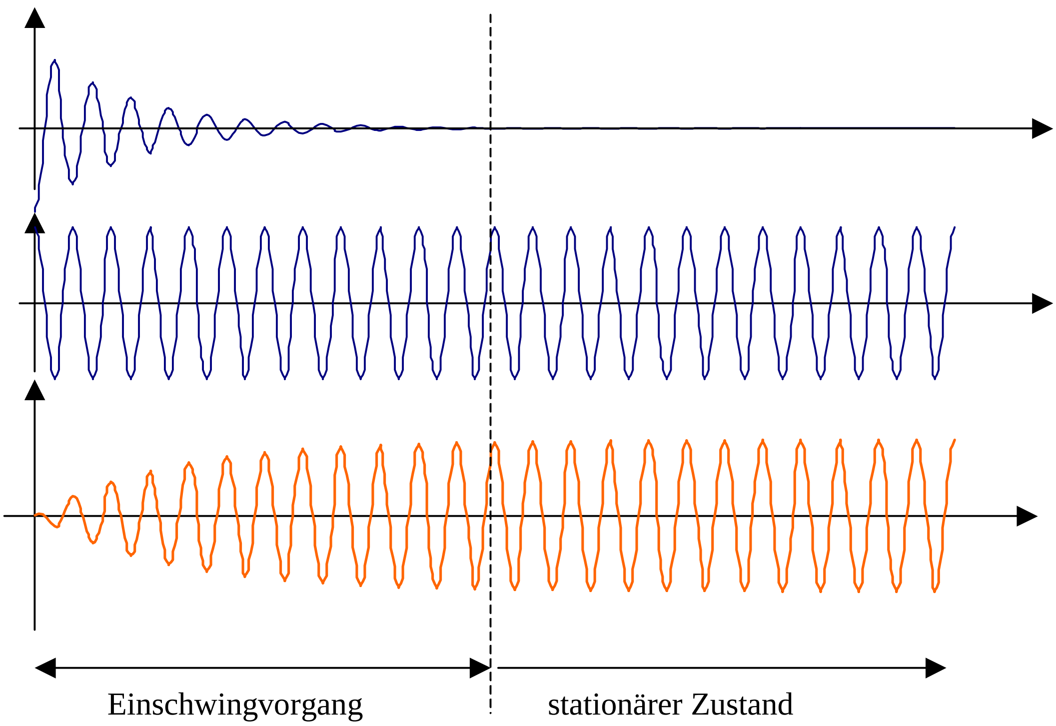
1) Beliebige Anregung.

Anregungsbedingung: $x(t = 0) = x_0$; $v(t = 0) = v_0$; $\omega = 0{,}4\ \omega_0$
Nach zwei bis drei Abklingzeiten bleibt nur noch die stationäre Schwingung übrig



2) Resonanzanregung

Anregungsbedingung: $x(t = 0) = 0$; $v(t = 0) = 0$; $.\omega = \omega_0$.



Einsetzen in die DGL liefert:

$$[-\omega^2 + 2\delta j\omega + \omega_0{}^2]\hat{x}_0(\omega)e^{j(\omega t - \varphi_0)} = \frac{\hat{F}_0}{m}e^{j\omega t}$$

$$[(\omega_0{}^2 - \omega^2) + j(2\delta\omega)]\hat{x}_0(\omega) = \frac{\hat{F}_0}{m}e^{j\varphi_0}$$

Die beiden komplexen Zahlen links und rechts sind identisch, wenn ihre Beträge und Phasen gleich sind, bzw. wenn ihre Real- und Imaginärteile gleich sind.

a) Betrag links = Betrag rechts

$$\hat{x}_0\sqrt{(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2} = \frac{\hat{F}_0}{m}$$

$$\boxed{\hat{x}_0(\omega) = \frac{\hat{F}_0 / m}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}}$$

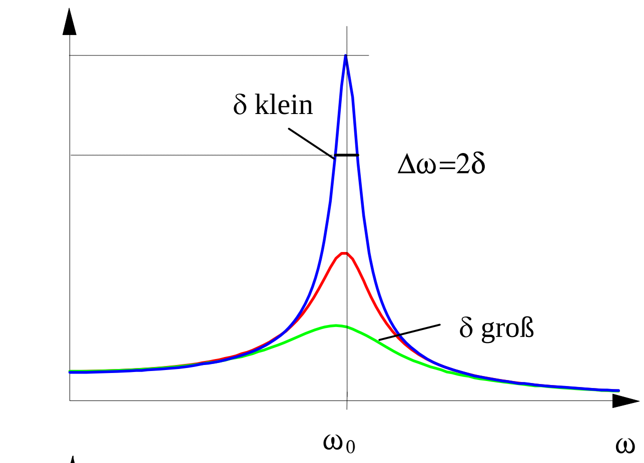
AMPLITUDEN-RESONANZFUNKTION

b) Phase links = Phase rechts

$$\text{links: } \tan\varphi_0' = \frac{2\delta\omega}{(\omega_0{}^2 - \omega^2)} \text{ ; rechts: } \varphi_0 \quad \Rightarrow \varphi_0 = \varphi_0'$$

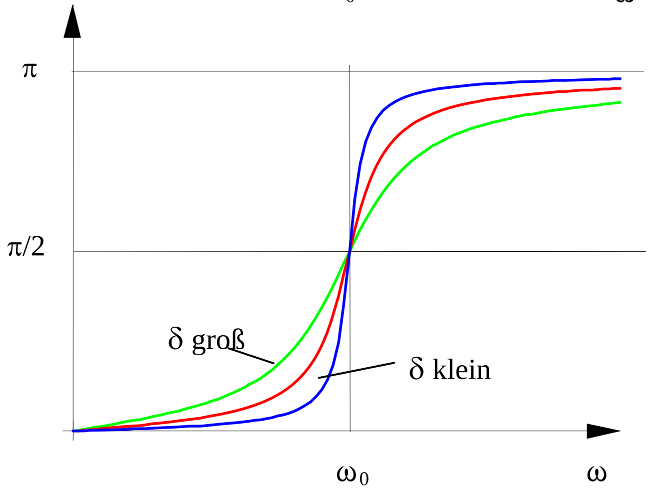
$$\boxed{\tan\varphi_0 = \frac{2\delta\omega}{(\omega_0{}^2 - \omega^2)}}$$

PHASEN-RESONANZFUNKTION



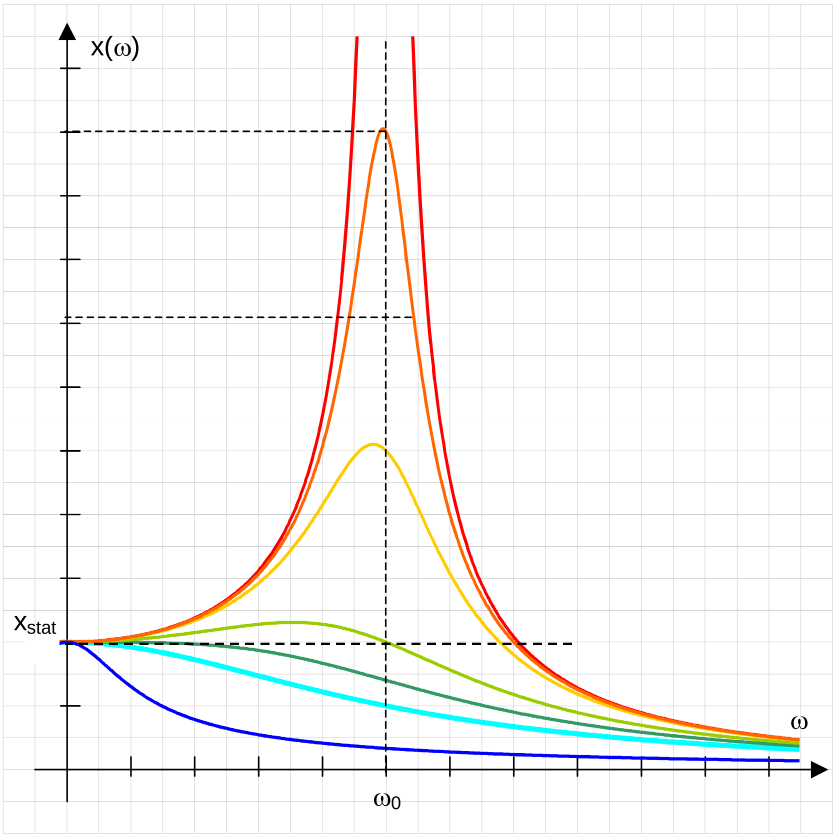
Maximum liegt links von ω_0

$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_0{}^2 - 2\delta^2}$$



$\varphi_0 = \pi / 2$ für $\omega = \omega_0$

AMPLITUDEN-RESONANZFUNKTION

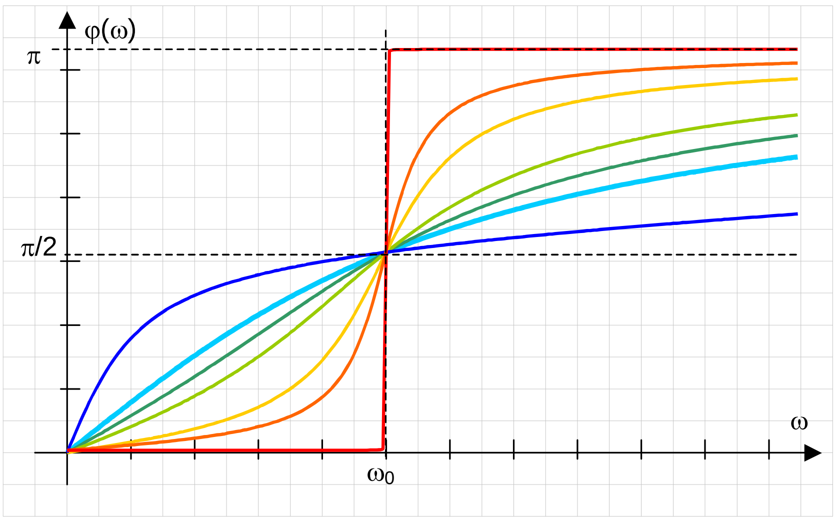


$$\hat{x}_0(\omega) = \frac{\hat{F}_0 / m}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

Eigenschaften:

- $\Delta\omega = 2\delta$
- Maximum bei:
  $\omega_{\max} = \sqrt{\omega_0{}^2 - 2\delta^2}$
- $\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_0$: $\hat{x}_0(\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}) = \frac{x_{stat}}{\sqrt{2}}$
- $\delta = \omega_0$: $\hat{x}_0(\omega_0) = \frac{x_{stat}}{2}$
- $\delta = \omega_0 / 2$: $\hat{x}_0(\omega_0) =$

PHASEN-RESONANZFUNKTION

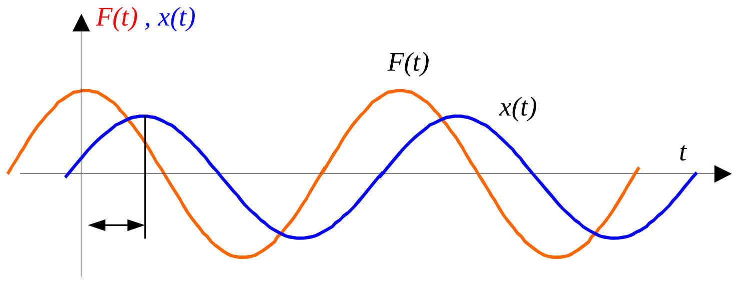


$$\tan\varphi_0 = \frac{2\delta\omega}{(\omega_0{}^2 - \omega^2)}$$

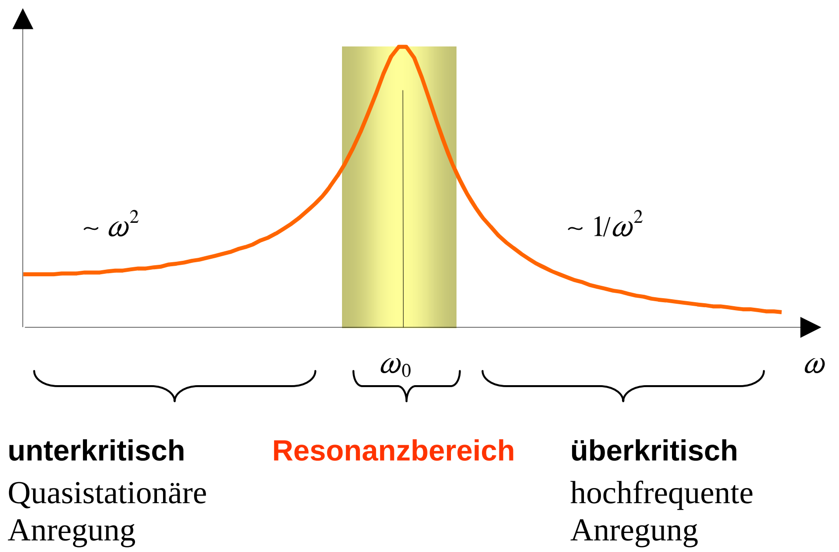
Eigenschaften:

$\varphi_0 = \pi / 2$ für $\omega = \omega_0$
unabhängig von δ

Der Schwinger läuft dem Erreger immer um φ_0 hinterher.
Ursache: Trägheit!



1.3.2 Diskussion der erzwungenen Schwingung



Der unterkritische Bereich

- Die Kraft ändert sich sehr langsam (=quasistatisch).
  $\rightarrow$ Der Schwinger kann folgen.
  $\rightarrow$ keine Phasenverschiebung zwischen Anregung und Antwort $\varphi = 0$
- BWGL: $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0{}^2 x = \frac{\hat{F}_0}{m}\cos\omega t$

  $$0 + 0 + \omega_0{}^2 x = \frac{\hat{F}_0}{m}\cos\omega t \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = \frac{\hat{F}_0}{m\omega_0^2}\cos\omega t = \frac{\hat{F}_0}{D}\cos\omega t$$

  Zeigen Sie durch Entwicklung der Resonanzfunktion, dass für kleine Frequenzen gilt:

  $$\hat{x}_0(\omega)\big|_{\omega<<\omega_0} = \frac{\hat{F}_0}{m\omega_0^2}[1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}(1 - \frac{2\delta^2}{\omega_0^2}) + \ldots]$$

- Leistungseinkopplung: $P(t) =$

Der überkritische Bereich

- Die Amplitude geht immer gegen Null.

  Zeigen Sie durch Diskussion der Resonanzfunktion, dass gilt: $\hat{x}_0(\omega)\big|_{\omega>>\omega_0} = \frac{\hat{F}_0}{m\omega^2}$

- BWGL $-\omega^2 x + 0 + 0 = \frac{\hat{F}_0}{m}\cos\omega t \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = -\frac{\hat{F}_0}{m\omega^2}\cos\omega t$
- Phasenverschiebung $\varphi = \pi$ (180°)
- Leistungseinkopplung: $P(t) =$

Der Resonanzbereich

1) Lage der Resonanzstelle

- Phasenverschiebung $\varphi = \pi/2$ (90°) bei $\omega = \omega_0$ (unabhängig von der Dämpfung)
- Maximum der Amplitudenresonanz

$$\max[\hat{x}_0(\omega)] = \min[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\omega}[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2] = 0 = 2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 2(2\delta\omega)2\delta = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}$$

Das Maximum der Resonanzamplitude liegt unterhalb von ω_0.
(Achtung: nicht identisch mit der Frequenz der frei abklingenden Schwingung ω_d .)

2) Höhe der Resonanzkurve ($\delta << \omega_0$)

Für den Fall geringer Dämpfung liegt das Maximum sehr nahe bei ω_0.

Resonanzüberhöhung $\dfrac{\hat{x}_{\text{max}}}{\hat{x}_{\text{stat}}} \approx \dfrac{\hat{x}(\omega_0)}{\hat{x}(0)} = \dfrac{\omega_0}{2\delta} = Q$ Q = Güte

3) Breite der Resonanz ($\delta << \omega_0$)

Es gilt $\Delta\omega = 2\delta$ bei $1/\sqrt{2}$ von der Maximalamplitude.

Zum Beweis berechnen wir die Amplitude für (ω_0 - δ) und (ω_0 + δ).

$$\hat{x}_0(\omega_0 \pm \delta) = \frac{\hat{F}_0 / m}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - (\omega_0 \pm \delta)^2)^2 + (2\delta(\omega_0 \pm \delta))^2}}$$

$$\hat{x}_0(\omega_0 \pm \delta) = \frac{\hat{x}_{\text{stat}} \cdot \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - \omega_0^2 \pm 2\delta\omega_0 - \delta^2)^2 + (2\delta\omega_0 \pm 2\delta^2)^2}}$$

$$\hat{x}_0(\omega_0 \pm \delta) = \frac{\hat{x}_{\text{max}} \dfrac{2\delta}{\omega_0} \cdot \omega_0^2}{\sqrt{(2\delta\omega_0)^2 + (2\delta\omega_0)^2}} = \frac{\hat{x}_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$$

4) Güte:

Die **Güte *Q*** ist eine wichtige Kenngröße der Resonanz eines schwingungsfähigen Systems. Sie ist definiert als Verhältnis von Energie W des Oszillators zu Energieverlust ΔW pro Periode T_0 mal 2π.

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W_{T0}}$$ [1]

Weiter kann man zeigen:

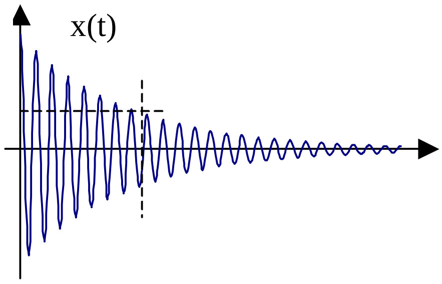
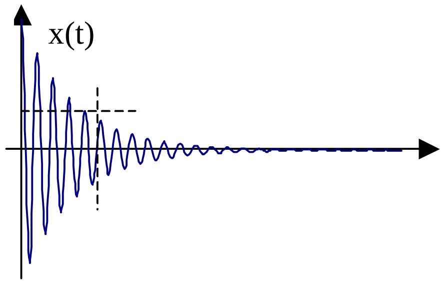
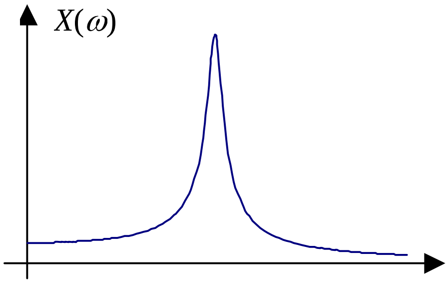
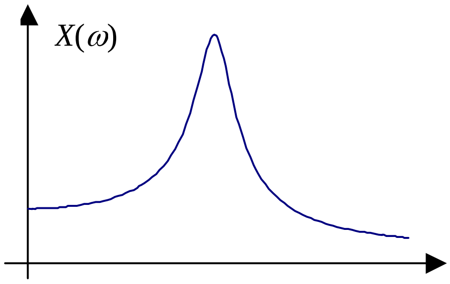
Die Güte ist das Verhältnis der Resonanzfrequenz ω_{res} zur Breite der Resonanz $\Delta\omega$ bei der Höhe $\hat{x}_{0\,\text{max}} / \sqrt{2}$ (oder das Verhältnis von Resonanzamplitude $\hat{\varphi}_{0,\text{max}}$ zu stat. Schwingerantwort $\hat{\varphi}_{0,\text{statisch}}$).

$$Q \cong \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\delta}$$ (Definition mit spektraler Breite)

$$\boxed{Q \cong \frac{\hat{x}_{0,\text{max}}}{\hat{x}_{0,\text{statisch}}} = \frac{\omega_0}{2\delta}}$$ (Definition mit Resonanzüberhöhung)

[1] Diese Definition wird in der Elektrotechnik z.B. auch für den Kriechfall verwendet. Der Kehrwert von Q heißt dann Verlustfaktor $d = 1/Q$.

Zusammenhang: Frequenzbereich / Zeitbereich

	Hohe Güte	Geringe Güte
Zeitbereich Freie Schwingung		
Frequenzbereich Resonanzkurve		

Charakteristischer Parameter im Zeitbereich: Abklingzeit $\Delta t = \tau$
Charakteristischer Parameter im Frequenzbereich: Breite der Resonanz $\Delta\omega = 2\delta$

Produkt: $\Delta\omega \cdot \Delta t = 2\delta \cdot \frac{1}{\delta} = 2$

$\boxed{\Delta\omega \cdot \Delta t = const}$ **Unschärferelation**[2]

Konsequenz: Dämpfungskonstante bestimmbar aus

- Breite der Resonanz
- Abklingdauer der freien Schwingung
- Energiedissipation (später)
- Fourier-Transformation der Impulsantwort ($\rightarrow$ Praktikumsversuch)

---

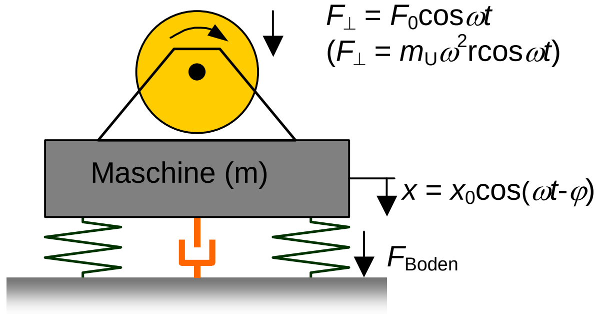
[2] Zwischen der Breite der Resonanzkurve $\Delta\omega$ und der Breite der Zeitfunktion $\Delta t = \tau = 1/\delta$ gilt die wichtige Beziehung: $\tau \cdot \Delta\omega = 2$.
Dies ist die Unschärfebeziehung zwischen Frequenz (Resonanzbreite) und Lebensdauer eines linearen Schwingers. Die Unschärfebeziehung spielt in der Physik eine bedeutende Rolle. In der Quantenmechanik heißt diese Beziehung *Heisenbergsche Unschärferelation* und ist dort von großer Bedeutung.

1.3.3 Beispiele für Resonanz in der Technik

Alle Körper besitzen Masse und Elastizität. Sie sind deshalb schwingungsfähig und können bei erzwungener Anregung Resonanzverhalten zeigen.

Beispiel: Unwucht bei drehenden Maschinen, schwingungsisolierendes Fundament

Aufgrund einer Unwucht entsteht eine periodische Kraft (Zentrifugalkraft), die Schwingungen der Maschine anregt. Das Fundament soll nun so beschaffen sein, dass die Schwingungen der Maschine nicht auf den Boden der Halle übertragen werden.



Wir berechnen die periodische Krafteinwirkung, die die schwingende Maschine auf den Boden ausübt (statische Kräfte sind weit weniger gefährlich und interessieren deshalb nicht).
Zunächst antwortet die Maschine auf die harmonische Krafteinwirkung mit der bekannten Resonanzschwingung.

$$x(t) = \hat{x}_0(\omega) e^{j(\omega t - \varphi)} \quad \text{mit}$$

$$\hat{x}_0 = \frac{\hat{F}_0 / m}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

Feder und Dämpfer üben aber ihrerseits wegen der Bewegung der Masse auch eine Kraft auf den Boden aus.

$$F_{Boden} = F_{Feder} + F_{Dämpfer} (+mg)$$

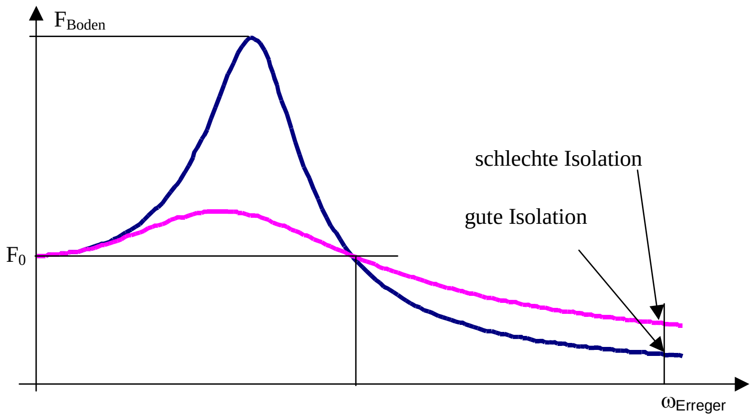
$$F_{Boden} = Dx + b\dot{x}$$

$$F_{Boden} = (D\hat{x}_0 + jb\omega\hat{x}_0) e^{j(\omega t - \varphi)}$$

$$F_{Boden} = \hat{F}_{Boden} e^{j(\omega t - \varphi)}$$

mit $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$; $\qquad \delta = \frac{b}{2m}$

ergibt sich für die Amplitude der Bodenkraft



Eine isolierende Wirkung ergibt sich erst bei hohen Frequenzen $\omega > \sqrt{2}\,\omega_0$.
Bemerkenswert ist, dass die Isolation dann bei geringer Dämpfung besser ist.
Schwingungsisolation und Schwingungsdämpfung sind physikalisch also verschiedene Prozesse.

$$\hat{F}_{Boden}(\omega) = \sqrt{\mathrm{Re}^2(F_{Boden}) + \mathrm{Im}^2(F_{Boden})} = \frac{\hat{F}_0 \sqrt{\omega_0^4 + (2\delta\omega)^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

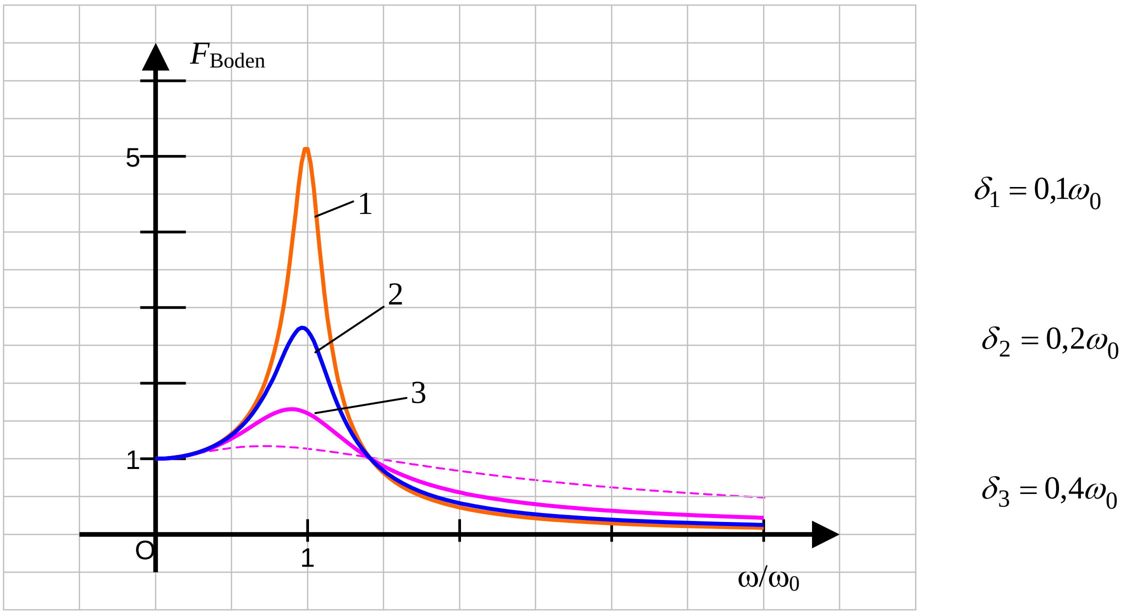
Aufgabe: Erklären Sie die isolierende Wirkung bei geringer Dämpfung und hohen Frequenzen. Betrachten Sie dazu die Krafteinleitung von Feder und Dämpfer bei verschiedenen Frequenzen getrennt.
(ω klein $F_{Dämpfer}$ klein: - Kraft nur von Federwirkung - Feder wirkt wie Tiefpass)
- Dämpfer spielt keine Rolle
(ω groß $F_{Dämpfer}$ groß: - Kraft nur vom verhärteten Dämpfer - Dämpfer wirkt wie Hochpass)
- Feder spielt keine Rolle

Detailkurven: Resonanz der Bodenkraft

1) Bodenkraft aufgrund einer periodischen Krafteinwirkung mit konstanter Amplitude

$$F = \hat{F}_0 e^{j\omega t}$$

$$\boxed{\hat{F}_{Boden}(\omega) = \frac{\hat{F}_0 \sqrt{\omega_0^4 + (2\delta\omega)^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}}$$

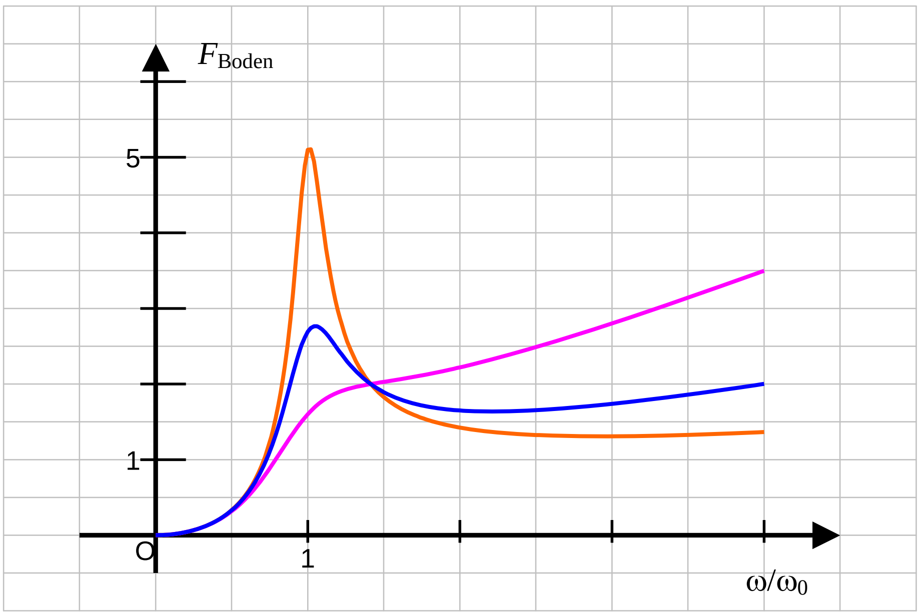


2) Bodenkraft aufgrund einer Unwucht am Umfang der drehenden Maschine
Unwuchtmasse *m'*; Radius *r*

$$F = m' r\omega^2 \; e^{j\omega t}$$

Skalierung: $\hat{F}_0 = m' r\omega_0^2$

$$\boxed{\hat{F}_{Boden}(\omega) = \frac{m' r\omega^2 \sqrt{\omega_0^4 + (2\delta\omega)^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}}$$



Beispiel: Fußpunktanregung bei Fahrzeugen

Fahrbahnunebenheiten erzeugen eine (periodische) Bewegung der Radaufhängung.
Diese Bewegung verursacht eine Krafteinkopplung über die Federung und den Stoßdämpfer auf das Fahrzeug. (Auf ähnliche Weise wirken Motorschwingungen auf ein Fahrzeug)

Kraft auf das Fahrzeug der Masse *m*
(*Fußpunktanregung*))

$$F_{ang} = Dx' + b\dot{x}'$$

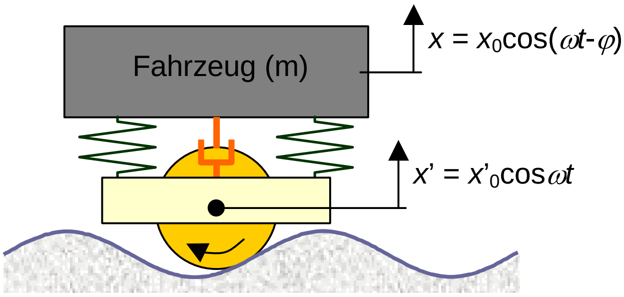
$$F_{ang} = (D + jb\omega)\hat{x}'_0 \, e^{j\omega t}$$

Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + 2\delta m\dot{x} + Dx = (D + jb\omega)\hat{x}'_0 \, e^{j\omega t}$$

Lösungsansatz (stationär):

$$x(t) = \hat{x}_0(\omega) e^{j(\omega t - \varphi)}$$



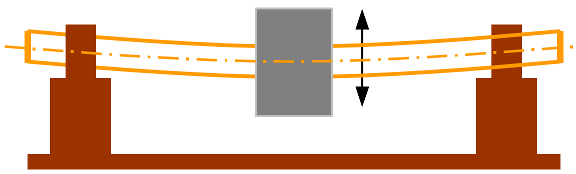
periodische Fahrbahnunebenheiten

Aufgabe: Bestimmen Sie die Amplitude $\hat{x}_0$ der Fahrzeugschwingung $x(t)$.

Beispiel: Biegeschwingungen von Wellen (z.B. Turbinen beim Hochfahren)

Fällt die Frequenz der Biegeschwingung mit der Winkelgeschwindigkeit der Welle (Betriebsfrequenz) zusammen.

$\Rightarrow$ Resonanz!



Unerwünschte Resonanz

Maßnahmen gegen Resonanzkatastrophe

- periodische Anregung vermeiden
- Einbau von Dämpfungselementen (aufwendig)
- Eigenfrequenz und Betriebsfrequenz sehr unterschiedlich
- schnelles Durchfahren von Resonanzbereichen

Erwünschte Resonanz

- Verstärken von Schwingungen in Resonatoren, z.B. Resonanzkreise in Rundfunk und TV Geräten.
- Aussieben von Frequenzen in Resonanzkreisen (LC)
- Resonatoren in der Akustik, z.B. pyramidenförmige Hohlraumresonatoren in Konzertsälen (Die Römer hatten Tonröhren, um bestimmte Töne hervorzuheben).
- Atomphysik: Lichtabsorption an Resonanzübergängen (klass. Modell der Resonanzabsorption)