

Doppelbrechung (DBR)

Stichworte:

Polarisation, Brechung, Brechzahl, optische Anisotropie, optische Achse, Huygensche Elementarwellen

Ziel des Versuchs:

Bestimmung der Hauptbrechungsindizes von zwei verschiedenen geschnittenen Kalkspatprismen

Literatur

Hering, Martin, Stohrer: Physik für Ingenieure, VDI

Demtröder: Experimentalphysik 2, Springer

Hecht, E.: Optik, Addison Wesley

Becker, Jodl: Physikalisches Praktikum, VDI

1 Grundlagen

1.1 Polarisation

Licht ist wie alle elektromagnetischen Wellen eine Transversalwelle. Der elektrische Feldvektor \vec{E} schwingt dabei in einer Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Der Begriff "Polarisation" kennzeichnet die Art und Weise, wie der Feldstärkevektor \vec{E} in dieser Ebene schwingt.¹

Unpolarisiertes Licht:

Temperaturstrahler (z.B. Glühlampen) emittieren Licht, in dem alle Schwingungsrichtungen von \vec{E} gleich häufig vorkommen. Die Phasenbeziehungen zwischen den Komponenten verschiedener Richtung ändern sich dabei statistisch. Solches Licht heißt **natürliches oder unpolarisiertes Licht**. Dies lässt sich damit erklären, dass beim Entstehungsprozess eine Vielzahl von Atomen einzelne Wellenzüge aussenden, deren Amplituden, Schwingungsrichtungen und Phasen nicht korreliert sind.

Polarisiertes Licht:

Bei polarisiertem Licht besteht eine feste Phasenbeziehung zwischen den sich überlagernden Komponenten. Zu einer Ausbreitungsrichtung gibt es zwei senkrecht zueinander stehende Transversalwellen, die voneinander linear unabhängig sind. Durch Superposition der beiden Wellen mit beliebigen Amplituden und Phasen lassen sich verschiedene Polarisationszustände darstellen².

Linear polarisiertes Licht: Schwingt der elektrische Feldvektor \vec{E} immer nur in einer Richtung, heißt das Licht *linear polarisiert*. Die Richtung von \vec{E} heißt Polarisationsrichtung. Die Ebene, die durch den \vec{E} -Vektor und die Ausbreitungsrichtung festgelegt ist, heißt Schwingungs- oder Polarisationsebene.

¹ Es ist klar, dass es nur bei transversalen Wellen sinnvoll ist von Polarisation zu sprechen. Longitudinale Wellen, wie z.B. Schall in Luft, schwingen immer längs der Ausbreitungsrichtung.

² Streng monochromatisches Licht muss demnach polarisiert sein, da die Phase für alle Zeiten ($-\infty \leq t \leq +\infty$) sich nicht ändern darf. (Eine Phasenänderung würde eine Frequenzänderung bedeuten).

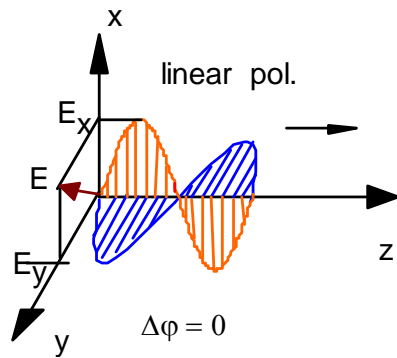


Abb. 1: Linear polarisierte Welle als Überlagerung von zwei orthogonalen, linear polarisierten Wellen ($\Delta\phi = 0$)

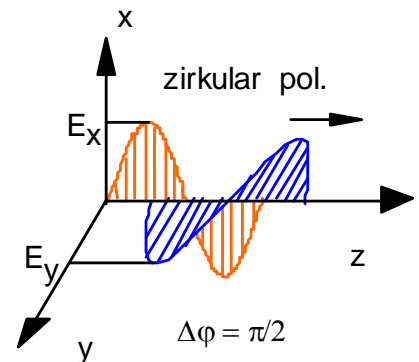


Abb. 2: Zirkular polarisierte Welle als Überlagerung von zwei orthogonalen, linear polarisierten Wellen ($\Delta\phi = \pi/2$)

Eine beliebige linear polarisierte Welle bestimmter Schwingungsrichtung können wir dann als Überlagerung von zwei orthogonalen, linear polarisierten Wellen \vec{E}_x und \vec{E}_y darstellen, die eine Phasendifferenz $\Delta\phi = 0$ haben.

Zirkular polarisiertes Licht: Überlagert man zwei senkrecht zueinander stehende linear polarisierte Wellen gleicher Ausbreitungsrichtung, Wellenlänge und Amplitude, aber mit einer Phasenverschiebung $\Delta\phi = \pi/2$, erhält man zirkular polarisiertes Licht. Der Feldstärkevektor \vec{E} rotiert auf einem Kreis um die Achse der Ausbreitungsrichtung. Die Zirkularpolarisation ist ein Sonderfall der elliptischen Polarisation. Bei beliebigem Amplitudenverhältnis bzw. beliebiger Phasendifferenz ist die Überlagerungswelle elliptisch polarisiert. Der \vec{E} -Vektor umläuft die Ausbreitungsrichtung auf einer Ellipse.³

1.2 Doppelbrechung

Optische Isotropie: In Gasen, Flüssigkeiten und amorphen Festkörpern (z.B. Glas) ist die Lichtgeschwindigkeit unabhängig von der Ausbreitungsrichtung und von der Polarisation des Lichtes. Diese Stoffe heißen optisch isotrop.

Optische Anisotropie: Sind die optischen Eigenschaften eines Stoffes richtungsabhängig, heißt er optisch anisotrop. Viele Kristalle sind optisch anisotrop.

Sie besitzen auf Grund der Symmetrie des Kristallgitters (mindestens) eine ausgezeichnete Symmetrierichtung (= **optische Achse**).

Fällt ein unpolarisierter Lichtstrahl senkrecht auf einen Kalkspatkristall, dessen optische Achse schräg zur Oberfläche liegt, wird er in zwei Teilstrahlen aufgespalten. Ein Teilstrahl tritt ungebrochen durch den Kristall und heißt deshalb **ordentlicher Strahl (o)**. Der andere Teilstrahl wird trotz des senkrechten Einfalls gebrochen und verlässt den Kristall parallelverschoben. Er folgt nicht

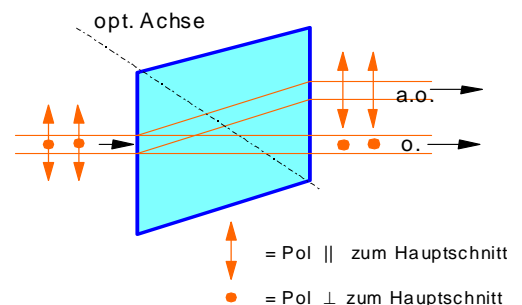


Abb. 2: Doppelbrechung im Kalkspatkristall

³ Anmerkung: Man kann Polarisationszustände nicht nur in einer kartesischen Basis darstellen. Eine rechts- und eine linkszirkular polarisierte Welle stellt eine sog zirkuläre Basis dar, mit der sich durch Linearkombination ebenso jeder Polarisationszustand einer transversalen Welle darstellen lässt.

dem Snelliusschen Brechungsgesetz und heißt **außerordentlicher Strahl (ao)**. Die beiden Teilbündel sind linear polarisiert und ihre Polarisationsrichtungen stehen senkrecht aufeinander.

Diese Eigenschaft wird Doppelbrechung genannt. Die durch optische Achse und Lichteinfallrichtung definierte Ebene heißt optischer Hauptschnitt⁴.

Das **ordentlichen Strahlenbündel ist senkrecht zum Hauptschnitt polarisiert**.

Das **außerordentliche Bündel ist parallel zum Hauptschnitt polarisiert**.

Die unterschiedliche Ausbreitung von Licht in anisotropen Kristallen wird wesentlich durch die Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Ausbreitungsrichtung des Lichtes und seinem Polarisationszustand bestimmt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des ordentlichen Strahles ist richtungsunabhängig. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des außerordentlichen Strahles ist dagegen richtungsabhängig. Bei negativ einachsigen Kristallen ist die Lichtgeschwindigkeit des außerordentlichen Strahls größer als die des ordentlichen Strahls. Nur in Richtung der optischen Achse stimmen beide Geschwindigkeiten überein.

Die Ausbreitung des ordentlichen und des außerordentlichen Strahls ist mit dem Huygenschen Prinzip zu erklären.

Das **Huygensche Prinzip** besagt: Jeder Punkt einer Wellenfläche ist Ausgang von neuen Elementarwellen, die sich überlagern. Die neue Wellenfront ist die Einhüllende der Elementarwellen. Die Phasenfronten der Elementarwellen sind danach Kugeln bei der ordentlichen Welle und Rotationsellipsoide bei der außerordentlichen Welle (siehe Abb. 4).

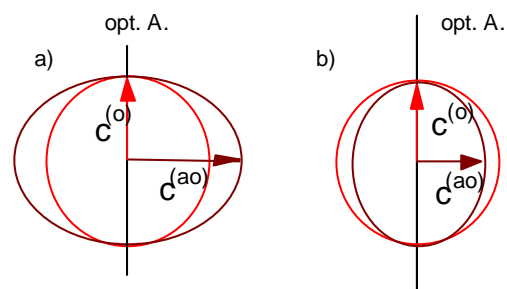


Abb. 4: Elementarwellen in einachsigen Kristallen
a) negativer Kristall (z.B. Kalkspat)
b) positiver Kristall (z.B. Quarz)

Abb. 5 zeigt den Fall, dass unpolarisiertes Licht senkrecht auf einen Kalkspatkristall fällt. Die Einhüllende der (ordentlichen) Kugelwellen ergibt nach dem Huygenschen Prinzip eine Wellenfront $WF^{(o)}$ parallel zur Oberfläche des Kristalls. Die Einhüllende der (außerordentlichen) Ellipsoidwellen ergibt auch eine Wellenfront $WF^{(ao)}$ parallel zur Oberfläche. Die Ausbreitungsrichtung der Lichtbündel erhält man, wenn man das Zentrum der Elementarwelle mit dem Berührungspunkt an der Einhüllenden verbindet. Der ordentliche Strahl verläuft damit ohne Brechung durch den Kristall. Die Wellenfronten des außerordentlichen Strahls werden jedoch seitlich versetzt und die Ausbreitungsrichtung steht nicht mehr senkrecht auf den Wellenflächen. Die Wellenrichtung (Richtung des Wellenvektors k) und die Strahlrichtung (Richtung des Energiestroms S) sind nicht mehr parallel. Nur für eine Lichtausbreitung in der opt. Achse oder senkrecht zu ihr, sind Strahlrichtung (Strahlgeschwindigkeit) und Wellenrichtung (Wellenvektor) gleich.

⁴ Jede Ebene, die die optische Achse enthält, bezeichnet man als Hauptschnitt. Nur wenn die Einfallsebene mit dem Hauptschnitt zusammenfällt (wie hier angenommen), liegen nach der Brechung die beiden Lichtbündel in der Ebene des Hauptschnittes. Andernfalls wird der außerordentliche Strahl aus der Einfallsebene herausgebrochen.

Die sog. **Hauptbrechzahlen** werden über die Ausbreitungsgeschwindigkeiten des ordentlichen Strahles $c^{(o)}$ und des außerordentlichen Strahles senkrecht zur optischen Achse $c^{(ao)}$ definiert:

$$n^{(o)} = \frac{c_0}{c^{(o)}}$$

$$n^{(ao)} = \frac{c_0}{c^{(ao)}}$$

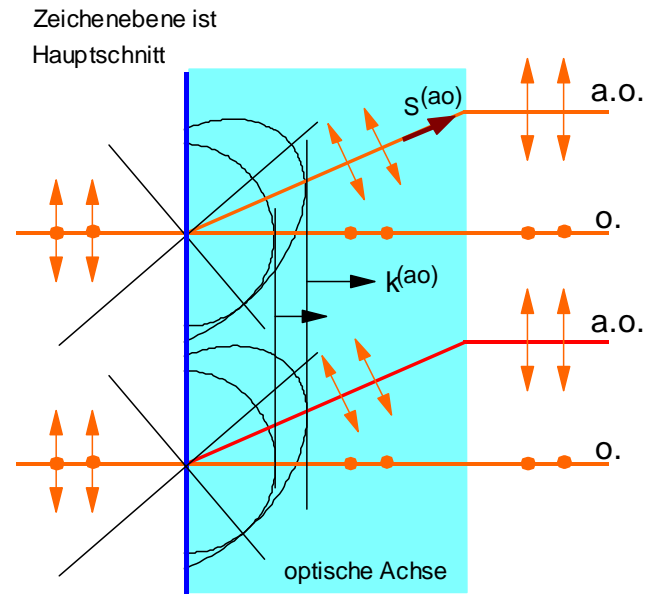


Abb. 5: Elementarwellen bei der Doppelbrechung in einem Kalkspatkristall (Kalzit CaCO_3 .)

Anwendungen:

- 1) Erzeugung von linear polarisiertem Licht durch Trennung von o. Bündel und ao. Bündel (z.B. Nicolsches Prisma).
- 2) Beim sog. $\lambda/4$ -Plättchen wird die Doppelbrechung zur Herstellung verschiedener Polarisationszustände verwendet. Die optische Achse liegt dabei parallel zur Oberfläche des Plättchens. Wird senkrecht dazu linear polarisiertes Licht eingestrahlt, dessen Schwingungsebene einen Winkel von 45° zur opt. Achse bildet, breiten sich das o. und das ao. Teilbündel mit unterschiedlicher Geschwindigkeit aus. Bei geeignet gewählter Dicke verlassen beide Bündel das Plättchen mit einem Gangunterschied von $\lambda/4$. Es entsteht zirkular polarisiertes Licht.

Im Anhang ist eine physikalische Erklärung für die Doppelbrechung gegeben.

1.3 Doppelbrechung bei einem Kalkspatprisma

Die Ablenkung eines parallelen Lichtbündels beim Durchgang durch ein Glasprisma folgt dem Snelliusschen Brechungsgesetz: $n_0 \sin \alpha = n_1 \sin \beta$

Ist der Strahlendurchgang symmetrisch, wird der Ablenkwinkel δ minimal.

Für den Zusammenhang zwischen Brechungsindex n_0 und n_1 , brechendem Winkel γ und minimalem Ablenkwinkel δ_{\min} gilt die Fraunhofer-Formel:

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{c_0}{c_1} = \frac{\sin\left(\frac{\delta_{\min} + \gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

Damit ergibt sich die Möglichkeit aus dem minimalen Ablenkwinkel und dem brechenden Winkel den Brechungsindex zu ermitteln.

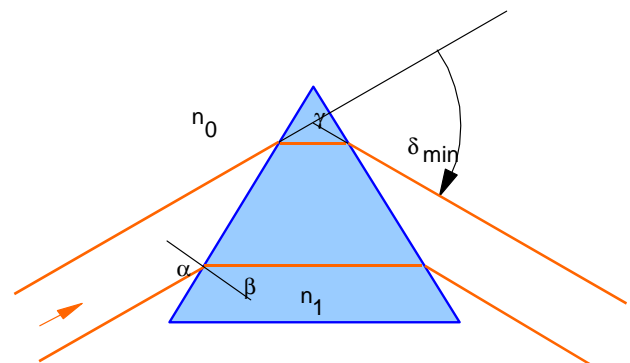


Abb. 6: Symmetrischer Strahlengang bei der Brechung am Prisma.

Wir betrachten nun die Brechung an zwei unterschiedlich geschnittenen Kalkspatprismen.

1.3.1 Optische Achse parallel zur brechenden Kante A||K (Prisma 1)

Bei diesem Prisma liegt die optische Achse A parallel zur brechenden Kante K. Der Hauptschnitt steht senkrecht zur Einfallsebene. In der Einfallsebene sind die Elementarwellen des ordentlichen Strahles Kreise. Die Elementarwellen des außerordentlichen Strahles sind ebenfalls Kreise. Als Sonderfall ist hier die Ausbreitungsgeschwindigkeit richtungsunabhängig und maximal. Das Snelliussche Brechungsgesetz gilt hier auch für den a.o. Strahl. Aus den Ablenkungswinkeln δ_{\min} der beiden Strahlen können die Hauptbrechzahlen ermittelt werden.

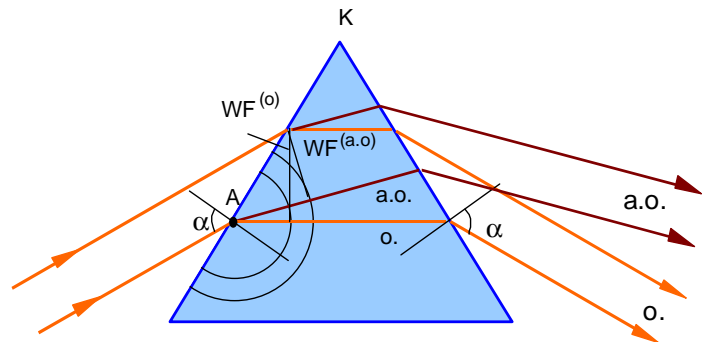


Abb. 7: Doppelbrechung an einem Kalkspatprisma. Die opt. Achse A steht parallel zur brechenden Kante K.

1.3.2 Optische Achse senkrecht zur brechenden Kante und parallel zur Basis

Die Einfallsebene liegt hier im Hauptschnitt (= Zeichenebene). Im Minimum der Ablenkung tritt das Licht in Richtung der optischen Achse durch das Prisma: Es hat dabei die Geschwindigkeit $c^{(o)}$ des ordentlichen Strahles. Bei minimaler Ablenkung (und nur bei dieser) findet keine Doppelbrechung statt, es gibt dann lediglich Einfachbrechung.

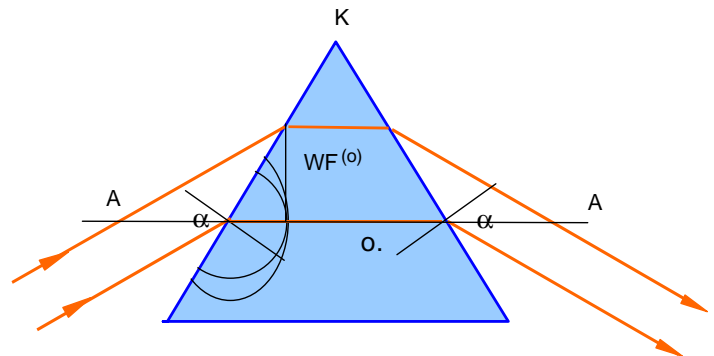


Abb. 8: Doppelbrechung an einem Kalkspatprisma. Die opt. Achse A steht senkrecht zur brechenden Kante K.

2 Versuchsdurchführung

Ziel des Versuches ist es, bei zwei verschieden geschnittenen Kalkspatprismen, die Hauptbrechzahlen $n^{(o)}$ und $n^{(ao)}$ für die Wellenlänge der gelben He-Linie bei $\lambda = 587,6 \text{ nm}$ zu bestimmen. Die Messungen werden mit Hilfe des Prismenspektrometers (siehe Versuch Spektroskopie) durchgeführt.

2.1 Bestimmung des brechenden Prismenwinkels γ

Das Verfahren zur Messung des brechenden Prismenwinkels ist in Abb. 9 skizziert.

An der brechenden Kante wird das einfallende Parallellichtbündel vom Spaltrohr geteilt und an den Ebenen, die den brechenden Winkel γ bilden, reflektiert. Die Richtungen A und B der reflektierten Strahlen werden dann mit dem schwenkbaren Fernrohr vermessen, indem das Spaltbild in das Fadenkreuz justiert wird. Der Winkel zwischen den beiden Stellungen ist dann der doppelte Prismenwinkel, denn es gilt:

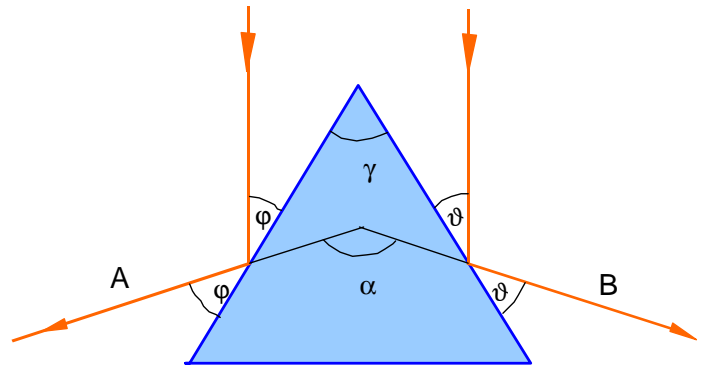


Abb. 9: Bestimmung des brechenden Prismenwinkels

$$\gamma = \varphi + \vartheta = \alpha / 2$$

- Messen Sie für beide Kalkspatprismen den brechenden Winkel γ . Achten Sie darauf, dass Sie das gespiegelte Bild des Spaltes nicht mit der gelben Spektrallinie verwechseln.

2.2 Bestimmung des minimalen Ablenkungswinkels δ_{\min}

Die Messung des minimalen Ablenkungswinkels ist im Versuch Spektroskopie beschrieben.

Man stellt das Prisma auf den Prismentisch und sucht mit dem Fernrohr die gelbe He-Linie. Dann dreht man das Prisma langsam in die Richtung kleiner werdender Ablenkungswinkel und rückt gleichzeitig mit dem Fernrohr so nach, dass das Spaltbild im Gesichtsfeld bleibt. Das Bild bewegt sich dann solange im gleichen Sinn bis die Stellung minimaler Ablenkung erreicht ist. Dort kehrt das Spaltbild seine Bewegungsrichtung um, wenn das Prisma gleichsinnig weitergedreht wird.

Die Stellung kann auf dem Teilkreis mit Nonius abgelesen werden.

Kalkspatprisma 1; $A \parallel K$:

- Messen Sie für gelbes He-Licht die minimalen Ablenkungswinkel $\delta_{\min}^{(o)}$ und $\delta_{\min}^{(ao)}$ des ordentlichen und des außerordentlichen Strahls. Der ordentliche Strahl wird stärker gebrochen!
- Überprüfen Sie mit einem Folienpolarisator⁵ die senkrecht zueinander stehende Polarisation von ordentlichem und außerordentlichem Strahl.

Kalkspatprisma 2; $A \perp K$ bei $A \parallel B$:

- Messen Sie für gelbes He-Licht den minimalen Ablenkungswinkel $\delta_{\min}^{(o)}$ des o. Strahls.
- Überprüfen Sie mit einem Folienpolarisator die Polarisation von ordentlichem und außerordentlichem Strahl. Um den außerordentlichen Strahl zu beobachten, ist das Prisma leicht aus der Stellung des minimalen Ablenkungswinkels zu verdrehen.

⁵ Folienpolarisatoren bestehen aus *dichroitischen* Substanzen, die Licht einer Polarisationsrichtung absorbieren.

2.3 Berechnung der Hauptbrechungsindizes von Kalkspat

- Berechnen sie aus den Messwerten für das Kalkspatprisma 1 die Hauptbrechungsindizes $n^{(o)}$ und $n^{(ao)}$ mit Hilfe der Fraunhofer-Formel.
- Berechnen sie aus den Messwerten für das Kalkspatprisma 2 den Hauptbrechungsindex $n^{(o)}$ mit Hilfe der Fraunhofer-Formel.
- Vergleichen Sie Ihre Messwerte mit den Literaturwerten:
 $n^{(o)} = 1,6584, \quad n^{(ao)} = 1,4864$

Geben Sie die relativen Abweichungen Ihrer Messwerte von den Literaturwerten an. Achtung: Die Literaturwerte gelten für gelbes Natrium-Licht mit der mittleren Wellenlänge $\lambda = 589,56$ nm. Das sollte prinzipiell eine Abweichung bedingen (Kalkspatdispersion).

Messunsicherheiten:

Schätzen Sie die Messunsicherheit für die Hauptbrechungsindizes ausnahmsweise nicht nach Gauß, sondern als relativen Größtfehler gemäß der Fraunhofer-Formel ab.

Die unabhängigen Variablen sind δ_{\min} und γ ; nach beiden ist zu variieren.

Relativer Größtfehler:

$$\pm \frac{\Delta n}{n} = \cot\left(\frac{\delta_{\min} + \gamma}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} (|\Delta \delta_{\min}| + |\Delta \gamma|) + \cot\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} |\Delta \gamma|.$$

Die Werte für $|\Delta \delta_{\min}|$ und $|\Delta \gamma|$ überlegen Sie selbst auf Grund ihrer Messerfahrung.

Beide Winkeldifferenzen sind im Bogenmaß einzusetzen, also:

$$|\Delta \delta_{\min}| = \frac{\pi}{180} |\Delta \delta_{\min}^{\text{grad}}|.$$

Für $\cot(\gamma/2)$ können Sie in der Fehlerformel $\cot(30^\circ) = \sqrt{3}$ setzen.

3 Testfragen

- 1) Warum ist natürliches Licht unpolarisiert ?
- 2) Was ist ein Polarisator ?
- 3) Was kennzeichnet zirkular polarisiertes Licht ?
- 4) Wie ist rechtszirkular polarisiertes Licht definiert ?
- 5) Stellen Sie linear polarisiertes Licht (Polarisationsrichtung x , Ausbreitungsrichtung z , Frequenz ω , Wellenlänge λ , Amplitude A) in einer zirkularen Basis dar, d.h. als Linearkombination von links- und rechtszirkular polarisiertem Licht.

Anhang: Oszillatormodell für die Doppelbrechung

Mikroskopisch bedeutet die Doppelbrechung eines Materials, dass die Polarisierbarkeit der Elektronen in Richtung der optischen Achse größer oder kleiner ist als senkrecht dazu.

Betrachten wir zum Beispiel als doppelbrechende Substanz eine gestauchte (gestreckte) Zellophanfolie, die dann aus gestauchten (langgezogenen) Molekülen besteht und die im wesentlichen alle in dieselbe Richtung zeigen. Diese Vorzugsrichtung ist die optische Achse der Substanz.

Wenn wir für die Molekülform ein **diskusförmiges Rotationsellipsoid** annehmen, ist klar, dass die Elektronen längs der opt. Achse schlechter polarisierbar sind als senkrecht dazu. Da die Polarisierbarkeit α der Moleküle den Brechungsindex n der Substanz bestimmt, ist der Brechungsindex für eine Polarisation in Richtung der optischen Achse kleiner als senkrecht dazu. Es gilt für jede der beiden ausgezeichneten Richtungen (E und P sind dabei parallel):

$$D = \epsilon_r \epsilon_0 E = \epsilon_0 E + P \quad \text{bzw.} \quad (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 E = P = N \alpha E ; \quad \epsilon_r = n^2$$

daraus folgt: $n^2 - 1 = N \alpha / \epsilon_0$

Schwingt der \vec{E} -Vektor des Lichts in Richtung der optischen Achse, ist seine Phasengeschwindigkeit c/n größer als senkrecht dazu.

Bei schrägem Einfall sind die Verhältnisse komplizierter: In unserem mechanischen Modell regt das elektrische Feld der Lichtwelle die Elektronen zu erzwungenen Schwingungen an. Die horizontale Schwingungskomponente ist dann weicher und hat eine andere Resonanzfrequenz als senkrecht dazu. Schwingt das einfallende Feld unter einem Winkel zwischen 0 und 90 ° zur optischen Achse, ist die Schwingungsrichtung der Dipole nicht mehr parallel zur Schwingungsrichtung des einfallenden Feldes (siehe Skizze). Die Elektronen folgen mehr der weichen Achse. Die Polarisation \vec{P} ist dann nicht mehr parallel zum Lichtfeld \vec{E} und $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ zeigt in eine andere Richtung. Die Wellenfronten liegen in Richtung von \vec{D} ($\vec{k} \perp \vec{D}$) und die Strahlrichtung ist wegen $\vec{S} = \epsilon_0 c^2 (\vec{E} \times \vec{B})$ senkrecht zu \vec{E} .

