

Fabry-Perot-Resonator (FPR)

Stichworte:

Superposition von Wellen, Interferenz, Vielstrahlinterferenz, optische Weglänge, optische Wegdifferenz OPD, Gangunterschied, Kohärenz, Spektren von Lichtquellen.

Ziel des Versuchs:

Studium von Interferenzerscheinungen mit einem Fabry-Perot-Resonator.

- Justierung eines Fabry-Perot-Resonators/Michelson-Interferometers.
- Beobachtung der FP-Interferenzringe (d fest)
- Messung der Airy-Funktion (d variabel).
- Bestimmung der Finesse, des freien Spektralbereiches und des Auflösungsvermögens.

Literatur

Hecht, E.: Optik, Addison Wesley

Jenkins, F.A.; White, H.E.: Fundamentals of Optics, Mac Graw Hill

1 Grundlagen

Fabry-Perot-Resonatoren sind wichtige Bauteile der modernen Optik und werden auf folgenden Gebieten eingesetzt.

- Hochauflösende optische Spektrometrie: Messung von Linienbreiten und Linienintervallen (\Rightarrow **FP-Interferometer**)
- Laser: optischer Resonator hoher Güte (\Rightarrow **FP-Laserresonator**)
- Längenmessung: weniger bedeutend, da solche Systeme meist nach dem Prinzip des Michelson-Interferometers gebaut sind.

Ein Fabry-Perot Resonator besteht aus zwei keilförmigen Glasplatten. Auf jeweils eine Seite ist eine hoch reflektierende Schicht aufgebracht. Die beiden Keilplatten sind mit Distanzstücken zusammengefügt und bilden eine **planparallele „Luftplatte“**.

Monochromatisches Licht einer ausgedehnten Lichtquelle wird (z.B. mit Hilfe einer Linse oder Streuscheibe) divergent auf den FP-Resonator abgebildet. Jedes Lichtbündel der

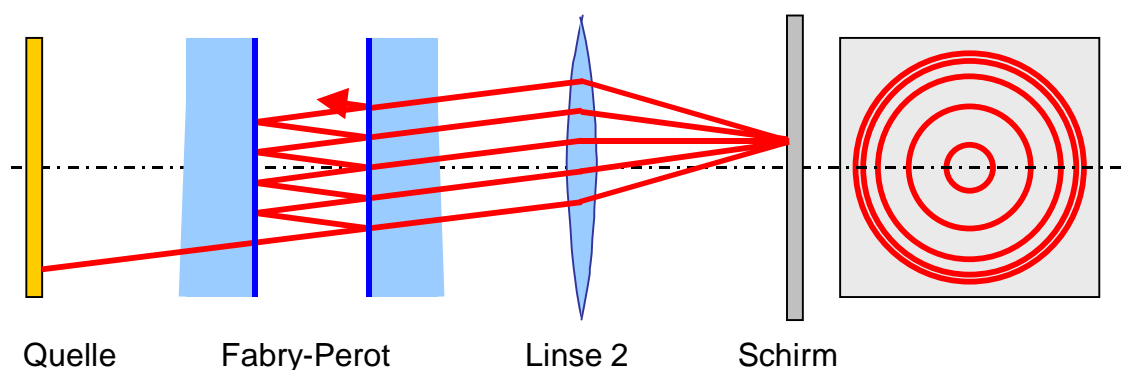


Abb.: Vielstrahlinterferenz beim Fabry-Perot-Resonator (A. Fabry und Ch. Perot 1897)

Lichtquelle wird an den planparallelen Flächen hin- und herreflektiert und verlässt das FP als Schar paralleler Lichtbündel. In der Brennebene einer Linse beobachtet man dann konzentrische Ringe als Interferenzmuster gleicher Neigung (Haidingersche Ringe)¹.

Bei nicht allzu hohen Anforderungen werden auch planparallele Glasplatten verwendet, die außen mit Reflexionsschichten versehen sind, sog. **Fabry-Perot-Etalons**.

1.1 Vielstrahlinterferenz am FP

Zur genauen Berechnung der Überlagerung aller transmittierten Partialwellen unter einem bestimmten Winkel α bedienen wir uns der Phasorenmethode.

$$E_{1t}(R) = A_0 t t' e^{j(\omega t - kR)} = E_0 t t'$$

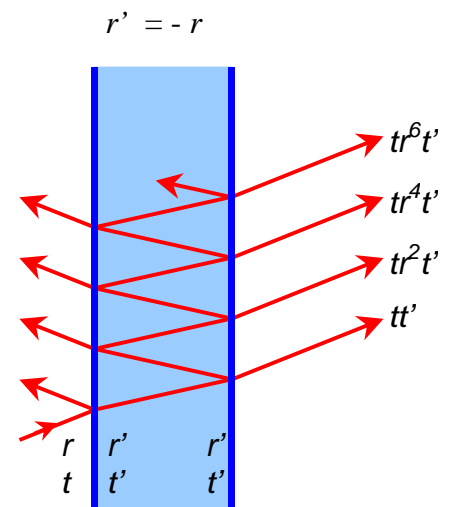
$$E_{2t}(R) = A_0 t r'^2 t' e^{j(\omega t - kR - k\Delta)} = E_0 t r'^2 t' e^{-jk\Delta}$$

$$E_t = E_{1t} + E_{2t} + E_{3t} + E_{4t} + \dots$$

$$E_t = E_0 t t' + E_0 t r'^2 t' e^{-jk\Delta} + E_0 t r'^4 t' e^{-2jk\Delta} + \dots + E_0 t r'^6 t' e^{-3jk\Delta} + E_0 t r'^8 t' e^{-4jk\Delta} + \dots$$

$$E_t = E_0 t t' (1 + r'^2 e^{-jk\Delta} + r'^4 e^{-2jk\Delta} + r'^6 e^{-3jk\Delta} + \dots)$$

$$E_t = E_0 t t' \sum_{p=0}^{\infty} (r'^2 e^{-jk\Delta})^p$$



Die Summe stellt eine geometrische Reihe dar

$$y = \sum_{p=0}^{\infty} x^p \quad \text{mit } x = r'^2 e^{-jk\Delta}$$

Da $|r'^2 e^{-jk\Delta}| < 1$ ist, lässt sich die Reihe aufsummieren und man erhält:

$$E_t = E_0 t t' \frac{1}{1 - r'^2 e^{-jk\Delta}}$$

Für die transmittierte Intensität ergibt sich dann:

$$\frac{I_T}{I_0} = \frac{|E_t|^2}{|E_0|^2} = \frac{(t t')^2}{1 + r'^4 - 2r'^2 \cos k\Delta}$$

Liegt keine Absorption vor, gilt $t t' = 1 - r'^2$ (wegen $t = r + 1$; $t' = r' + 1$; $r' = -r$):

$$I_T = I_0 \frac{(1 - r'^2)^2}{(1 - r'^2)^2 + 4r'^2 \sin^2(k\Delta/2)}$$

¹ Bei Interferenzen gleicher Neigung erscheinen helle Ringe, wenn für den Gangunterschied Δ gilt:

$$\Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = m\lambda \quad \text{für Luftspalt } n = 1 \text{ gilt: } \boxed{\Delta = 2d \cos \alpha = m\lambda}$$

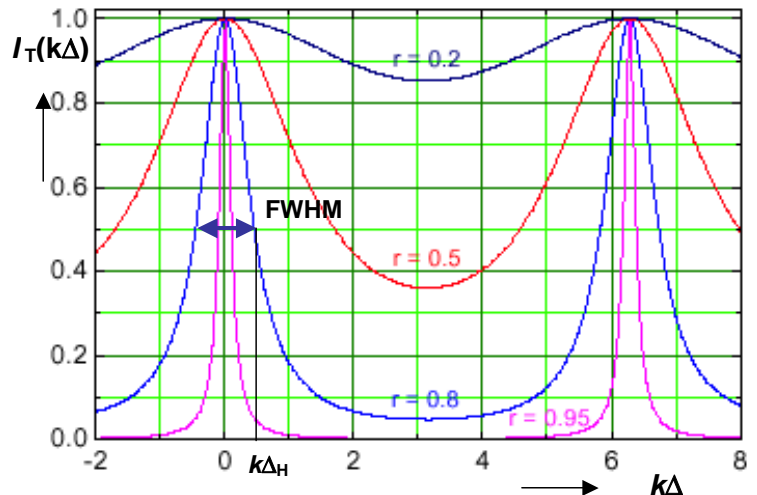
$$I_T = I_0 \frac{1}{1 + F \sin^2(k\Delta/2)}$$

mit:

$$F = 4r^2 / (1 - r^2)^2$$

$$k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} 2d \cos \alpha$$

Die Funktion $I_T(k\Delta)$ wird **Airy-Funktion**² genannt



Die Transmission $I_T(k\Delta)$ ist eine Funktion des Phasenunterschiedes $k\Delta$ der einzelnen Teilwellen. Wegen $k\Delta = (2\pi/\lambda)\Delta$ kann dies als Funktion der Wellenlänge λ , als auch als Funktion des Gangunterschiedes $\Delta(\alpha, d)$ betrachtet werden.

Helle Ringe (Maxima) ergeben sich in Transmission für $k\Delta/2 = m\pi$ oder:

$$2d \cos \alpha = m\lambda$$

Lage der Transmissionsmaxima beim FP Interferometer

Eigenschaften der Airy-Funktion (Transmission)

- In der Nähe eines Maximums ist der Verlauf der Airy-Funktion lorentzförmig, da hier $\sin x = x$ gilt.
- Weiter kommt man zu der paradoxen Vorstellung, dass bei einem sehr kleinen Transmissionskoeffizienten, also hoher Reflexion, an den Stellen mit $k\Delta/2 = m\pi$ das gesamte Licht transmittiert wird. Dies resultiert natürlich daher, dass die starke transmittierte Welle aus der konstruktiven Interferenz der zahlreichen mehrfach reflektierten Teilwellen resultiert.
- Bei großen Reflexionskoeffizienten werden die Interferenzringe sehr scharf und zwischen den Maxima ist die Transmission sehr gering (z.B. $r = 0,95$ und $F = 1520 \Rightarrow T_{\min} \approx 1/F = 6,6 \cdot 10^{-4}$).
- Da aus Energieerhaltungsgründen $I_T + I_R = 1$ gilt, ist das reflektierte Intensitätsmuster und das transmittierte Intensitätsmuster zueinander komplementär. Während die Transmission die hellen scharfen Ringe vor dunklem Hintergrund liefert, treten bei der Beobachtung in Reflexion scharfe dunkle Ringe auf. Die Lage dieser dunklen Ringe ist ebenfalls gegeben durch $k\Delta/2 = m\pi$.

Aufgabe: Berechnen Sie mit der Phasorenmethode auch den reflektierten Anteil E_r und die reflektierte Intensität I_R .

Hinweis: Alle Reflexe, außer dem ersten, interferieren konstruktiv

Zeigen Sie, dass gilt, $I_T + I_R = 1$.

² erstmals von C.B. Airy 1833 errechnet

Halbwertsbreite

Die Transmission fällt auf den halben Maximalwert ab wenn gilt: $F \sin^2(k\Delta_H/2) = 1$. Daraus lässt sich die volle Halbwertsbreite FWHM (in rad) der Maxima berechnen:

$$FWHM = 2k\Delta_H = 4 \arcsin(1/\sqrt{F}) \approx 4/\sqrt{F}$$

Finesse

Die Finesse vergleicht die Breite eines Maximums mit dem Abstand benachbarter Maxima.

Der Abstand von zwei Maxima der Airy-Funktion $I_T(k\Delta)$ ist 2π . Damit:

$$f = \frac{\text{Abstand benachbarter Maxima}}{\text{Breite eines Maximums}} = \frac{2\pi}{4/\sqrt{F}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{F} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$$

1.2 Das Fabry-Perot Interferometer

Bisher betrachteten wir die Transmission des FP allgemein als Funktion des Phasenfaktors $k\Delta = (2\pi/\lambda)\Delta$ mit $\Delta = 2d \cos \alpha$. Da $k\Delta$ eine Funktion der Wellenlänge λ und der Dicke d ist, ergeben sich zwei unterschiedliche Arten des Betriebs.

- a) Betrachtet man die Transmission bei festem Abstand d (senkrechter Einfall $\alpha = 0$) ergibt sich die Transmission als Funktion von k , bzw. der Wellenlänge λ .

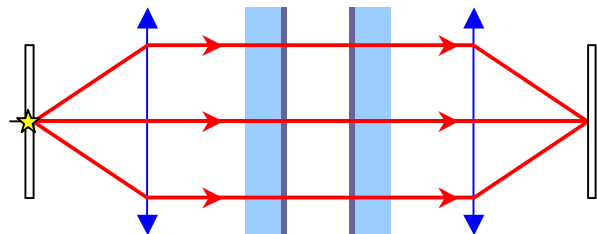
Man erhält auf diese Art ein **Interferenzfilter**.

In einem Laser ist der **Optische Resonator** ein Fabry-Perot. Die Resonanzfrequenzen dieses Resonators ergeben die Modenstruktur des Lasers.

- b) Variiert man die Dicke des Fabry-Perots (senkrechter Einfall $\alpha = 0$), wird die Transmission eine Funktion der Wellenlänge. Man erhält ein Interferenz-**Spektrometer**.

Abb.: Ein Fabry-Perot Interferometer mit festem Abstand d wirkt bei senkrechtem Lichteinfall (im Zentrum des Ringsystems) wie ein Spektralfilter für das gilt:

$$\lambda_1 = 2d/m_1$$



Freier Spektralbereich

Bei einem typischen Plattenabstand von $d = 1$ cm und einer Wellenlänge $\lambda_1 = 500$ nm wird die Ordnungszahl zu $m_1 = 2d/\lambda_1 = 40000$. An die gleiche Stelle kommt aber auch die Ordnung $m_2 = m_1 + 1 = 40001$ für Licht der Wellenlänge $\lambda_2 = 499,9875$ nm.

($\lambda_1 - \lambda_2 = 0,0125$ nm !)

D.h., beobachtet man zwei Linien, die sich um mehr als $D_\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ unterscheiden, können sie nicht mehr eindeutig einer entsprechenden Ordnung zugerechnet werden. Ein Fabry-Perot Interferometer erlaubt nicht die absolute Bestimmung der Wellenlänge, sondern nur die Bestimmung von Wellenlängendifferenzen innerhalb des sog freien Spektralbereichs D_λ des Spektrometers. Es gilt:

$$m\lambda_1 = 2d$$

$$(m+1)\lambda_2 = 2d$$

$$m(\lambda_1 - \lambda_2) = \lambda_2$$

$$D_\lambda = (\lambda_1 - \lambda_2) = \frac{\lambda_2}{m} = \frac{\lambda_2}{2d / \lambda_1} = \frac{\lambda_2 \lambda_1}{2d}$$

$$D_\lambda \approx \frac{\lambda}{m} \approx \frac{\lambda^2}{2d}$$

Freier Spektralbereich eines FP-Interferometers

Wegen $\nu = \frac{c}{\lambda}$ und $\Delta \nu = \frac{c}{\lambda^2} \Delta \lambda$ gilt auch $D_\nu \approx \frac{c}{2d}$

Für die Analyse muss deshalb ein Spektrometer mit geringerer Auflösung (z.B. Gitterspektrometer) davor geschaltet werden, welches das Spektrum auf den freien Spektralbereich eingrenzt.

Aufgabe: Berechnen Sie den Freien Spektralbereich für ein Fabry-Perot Interferometer mit $d = 1\text{cm}$; $n = 1$ bei der Wellenlänge $\lambda = 500\text{ nm}$

Auflösungsvermögen

Kriterium: Zwei benachbarte Spektrallinien sind noch getrennt auflösbar, wenn ihr Abstand gerade der vollen Halbwertsbreite FWHM entspricht. Da die Position der benachbarten Linien einer Phase von $k\Delta = m2\pi$ entspricht, ergibt sich

$$\frac{\lambda}{\Delta \lambda} = \frac{m2\pi}{FWHM} = \frac{m2\pi}{4/\sqrt{F}} = \frac{m\pi\sqrt{F}}{2}$$

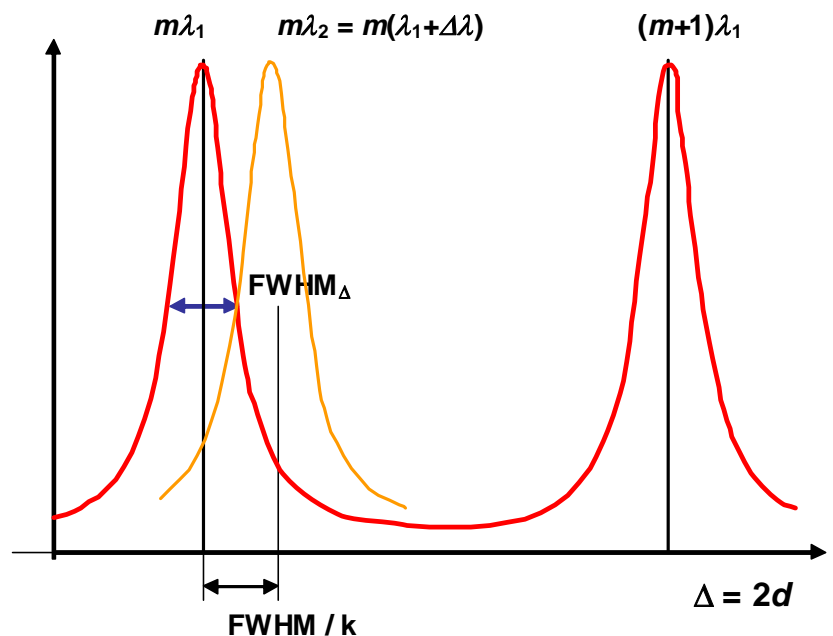
$$\frac{\lambda}{\Delta \lambda} = \frac{\nu}{\Delta \nu} = m\mathcal{F}$$

Beweis:

$$m\lambda_1 - m\lambda_2 = m(\lambda_1 - \lambda_2)$$

$$m\Delta \lambda = \frac{FWHM}{k}$$

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{FWHM}{2\pi m} = \frac{4/\sqrt{F}}{2\pi m} = \frac{1}{m\mathcal{F}}$$



Bedeutungen:

- Die Ordnungszahl m gibt an, über wie viele Wellenlängen die interferierenden Teilbündel gegeneinander verschoben werden. ($\Delta = m\lambda$)
- Die Finesse gibt an, wie viele Teilbündel im Mittel miteinander interferieren.
- Die Finesse ist weiter ein Maß dafür, um wie viel das Interferenzmaximum gegenüber dem bei Zweifachinterferenz verschmälert wird.

Aufgabe: Berechne das Auflösungsvermögen für ein Fabry-Perot mit $d = 1\text{cm}$ und $r^2 = 0,95$; ($\mathcal{F} = 61$)

1.2 Bilder des Versuchsaufbaus (1)

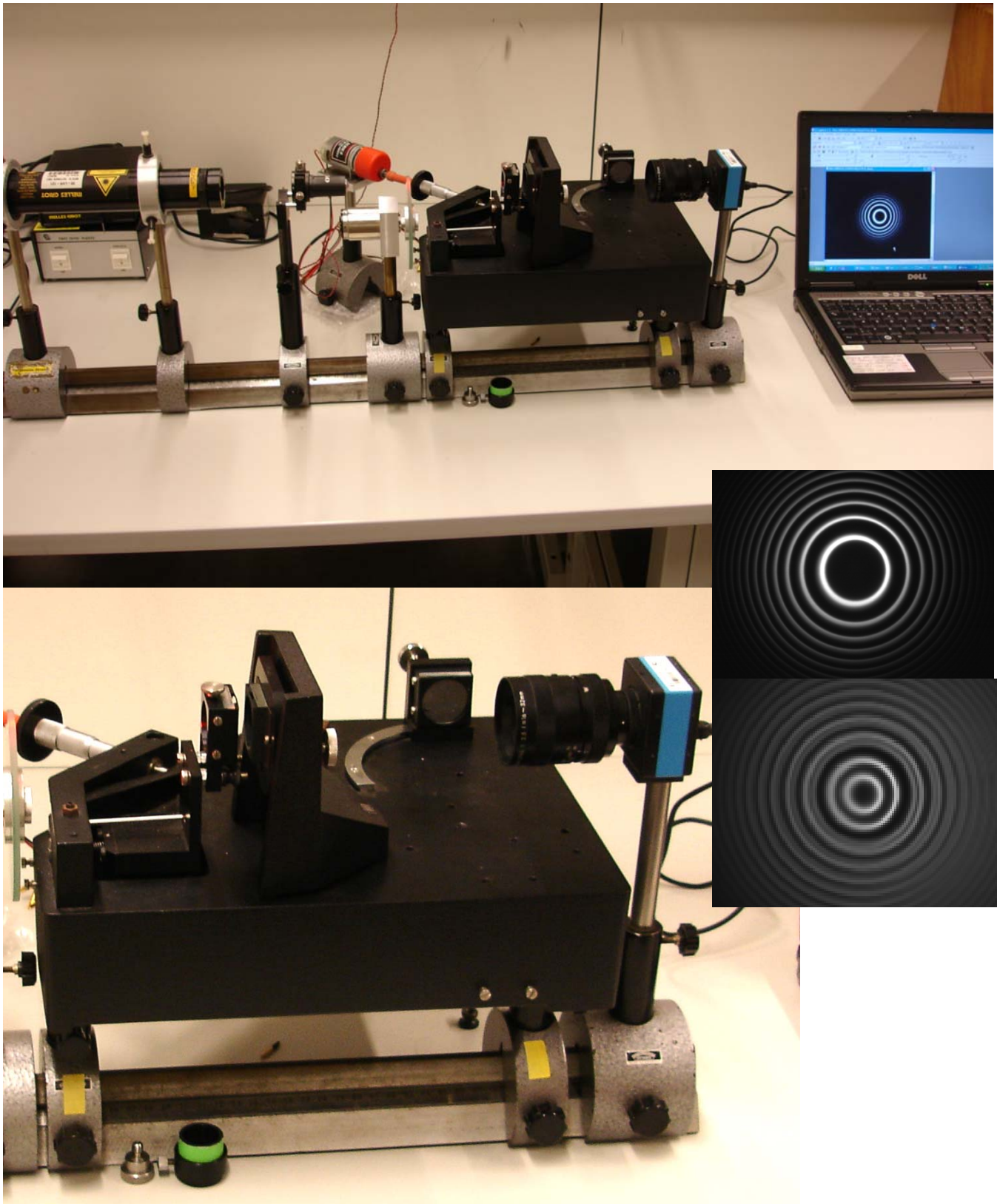


Abb.: Fabry-Perot mit dem divergenten (Streuscheibe) Licht eines HeNe-Lasers beleuchtet.
Das obere Ringsystem zeigt, dass der Laser auf einer einzigen longitudinalen Mode strahlt.
Im unteren Ringsystem zeigt das Auftreten von zwei longitudinalen Moden.
Der Abstand der FP-Platten war dabei ca. 4 cm.

1.2 Bilder des Versuchsaufbaus (2)

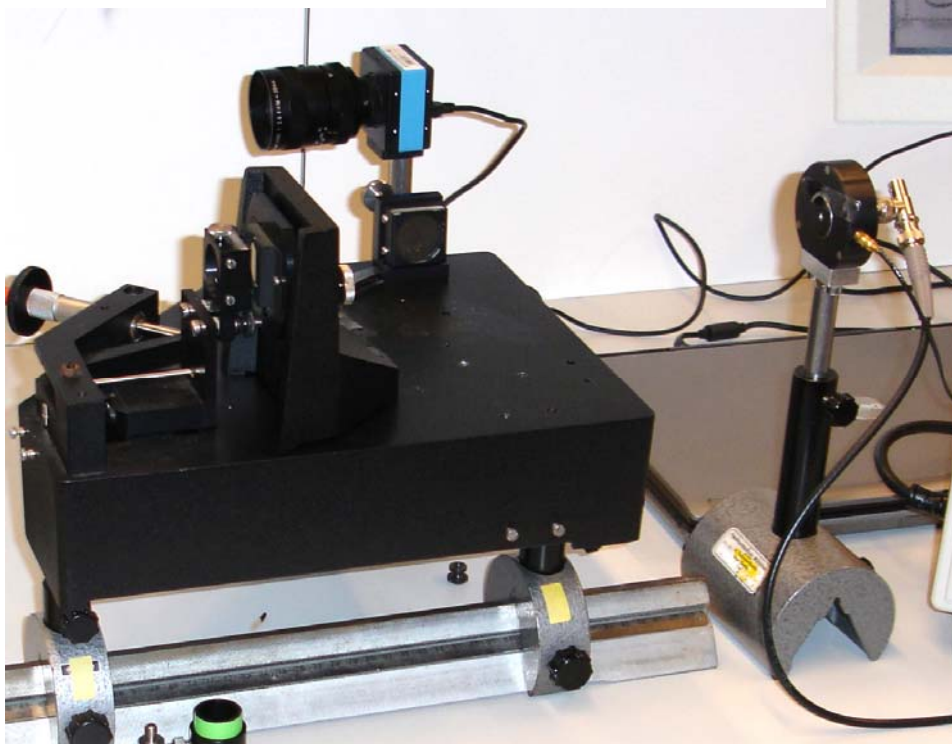
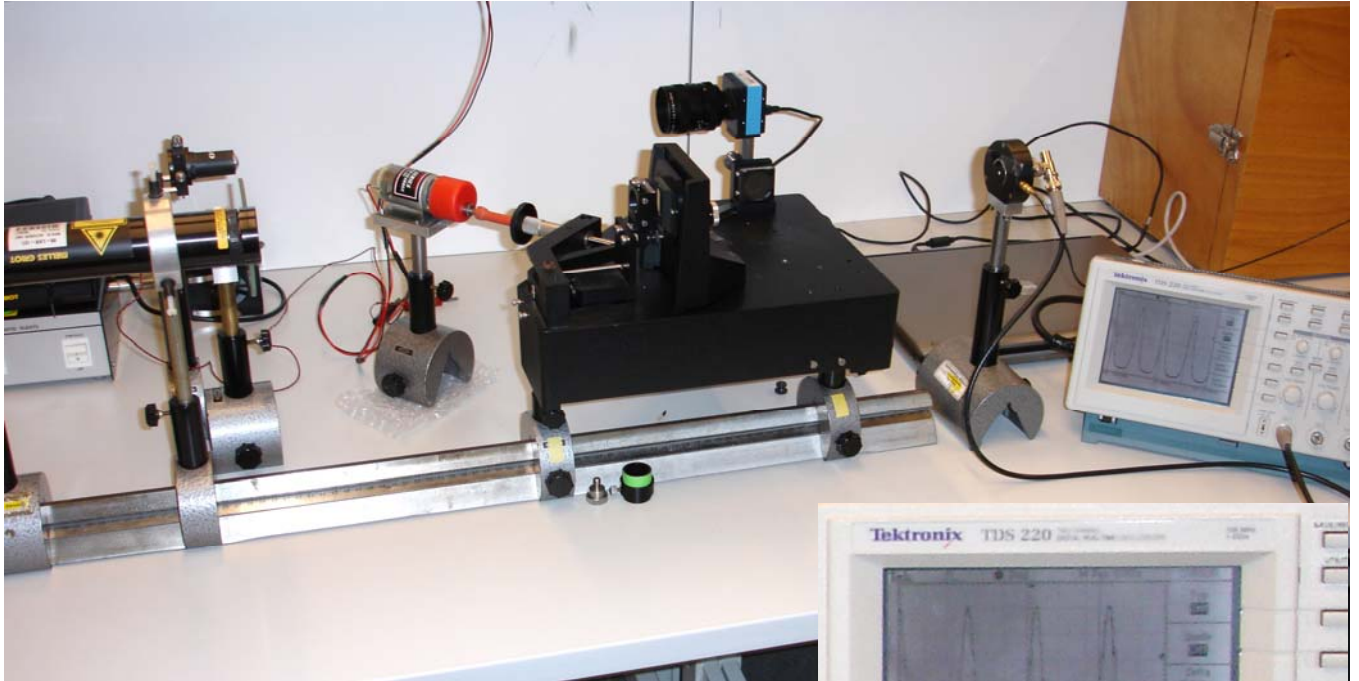


Abb.: Fabry-Perot als Interferometer

Der HeNe-Laser wird dabei direkt und ohne Aufweitung eingestrahlt.

Die FP-Platten dürfen jedoch nicht genau senkrecht zum Strahl stehen, da sonst der Reflex eine Rückkopplung im Laserresonator verursacht.

Das Interferogramm zeigt nur eine longit. Mode. Aus der Breite der Peaks lässt sich die Finesse des FPI abschätzen.