

Gekoppelte Schwingkreise (GSK)

Stichworte:

Digitaloszilloskop, gekoppelte Schwingungen, Fouriertransformation, schnelle Fouriertransformation FFT, Impulsantwort.

Ziel des Versuchs:

Gekoppelte Schwingungen sind in der Physik von zentraler Bedeutung. Mit den modernen Signalanalysetechniken von Digitaloszilloskopen werden im Versuch die Eigenschaften gekoppelter Schwingkreise untersucht. Am Beispiel von zwei gekoppelten LC-Schwingkreisen werden folgende Messungen durchgeführt:

- Messung der Resonanzfrequenzen und des Kopplungsfaktors
- Messung des Frequenzganges
- Impuls-Antwort Messungen (Impulse Response Test).

Zur Vorbereitung auf den Versuch sollten Sie sich auch die folgenden interaktiven Java-Applets anschauen (Internet Adressen siehe Anhang oder googeln).

- 1) Coupled Oscillators: Part C (Swept Sine)
- 2) Coupled Oscillators: Part A (Square Wave Input)

Die Bedienung des Digitaloszilloskops Tektronix TDS420A bzw. TDS340A ist bereits aus früheren Praktikumsversuchen bekannt. Ebenso wird die Funktionsweise von Analog- und Digitaloszilloskopen im Detail in der Messtechnikvorlesung behandelt.

Am Versuchsort liegt eine Kurzanleitung zur Bedienung des Oszilloskops auf. Bei Bedarf kann die darin enthaltene Übersicht zur Menüführung des Gerätes als Hilfe benutzt werden.

1 Grundlagen - Induktiv gekoppelte LC-Schwingkreise

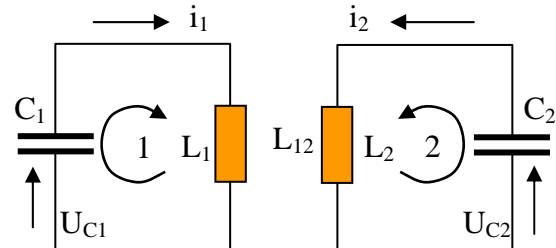
Das mechanische Analogon zu gekoppelten LC-Schwingkreisen sind gekoppelte Federpendel. Hier wird von der Schwingung eines Pendels über eine Koppelfeder eine periodische Kraft auf ein zweites Pendel ausgeübt, und dieses zu erzwungenen Schwingungen anregt. In der nächsten Phase dient dann das 2. Pendel als Erreger für das 1. Pendel. Bei diesem Vorgang wird Energie periodisch von einem Pendel auf das andere übertragen. Das periodische An- und Abschwellen der Amplitude hat das Aussehen einer Schwebung, von der wir wissen, dass sie durch Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen mit ähnlicher Frequenz, zustande kommt. Damit stellt sich die Frage, welche zwei Schwingungen hier überlagert werden.

Ganz ähnlich sind die Verhältnisse bei gekoppelten elektrischen Schwingungen. In der Abb. sind zwei induktiv gekoppelte LC-Schwingkreise gezeichnet. Die Kopplung erfolgt durch Annäherung der beiden Spulen. Das von Spule 1 erzeugte Magnetfeld durchsetzt teilweise auch die Spule 2 und erzeugt in ihr eine zusätzliche Induktionsspannung $u'_{\text{ind,L2}} = -L_{12}di_1/dt$, die wie eine treibende Spannung für den rechten LC-Kreis wirkt und sich zur Induktionsspannung $u_{\text{ind,L2}} = -L_2di_2/dt$ addiert. Umgekehrt gilt sinngemäß das gleiche.

Die Anwendung der Kirchhoffschen Schleifen- und Knotenregel auf die Kreise 1 und 2 liefert:

$$u_{C1} + u_{L1} + u'_{L1} = 0$$

$$u_{C2} + u_{L2} + u'_{L2} = 0$$



Für die Spannungen über C und L gilt allgemein:

$$u_C = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int idt \quad \text{und} \quad u_L = L \frac{di}{dt} \quad u_L = -u_{\text{ind}}$$

Differenziert man die beiden Schleifengleichungen, ergeben sich für den Spezialfall $C_1 = C_2 = C$ und $L_1 = L_2 = L$ die beiden gekoppelten DGL :

$$L \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{i_1}{C} + L_{12} \frac{d^2 i_2}{dt^2} = 0 \quad (1)$$

$$L \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{i_2}{C} + L_{12} \frac{d^2 i_1}{dt^2} = 0 \quad (2)$$

Bildet man die Summe (1)+(2) und die Differenz (1)-(2) der beiden Gleichungen, wird das Gleichungssystem mit dem Ansatz $i_a = i_1 + i_2$ und $i_b = i_1 - i_2$ entkoppelt.

$$\frac{d^2}{dt^2} (i_1 + i_2) + \frac{1}{(L + L_{12})C} (i_1 + i_2) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} (i_1 - i_2) + \frac{1}{(L - L_{12})C} (i_1 - i_2) = 0 \quad (4)$$

Die Lösungen i_a und i_b sind die beiden Normalschwingungen.

Für die beiden **Normalfrequenzen** ω_a und ω_b erhält man:

$$\omega_a^2 = \frac{1}{(L + L_{12})C} \quad (5)$$

$$\omega_b^2 = \frac{1}{(L - L_{12})C} \quad (6)$$

Im Normalfall stellt die freie Schwingung des gekoppelten Schwingkreises eine Überlagerung der Normalschwingungen mit den Frequenzen ω_a und ω_b dar.

Durch die Kopplung spaltet die Frequenz ω_0 des ungekoppelten Kreises in zwei Frequenzen ω_a und ω_b auf. Führt man den **Kopplungsgrad** $k = L_{12}/L$ ein, ergibt sich:

$$\omega_a = \sqrt{\frac{1}{(L+L_{12})C}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}} \cong \omega_0 - \frac{1}{2}k\omega_0 \quad (7)$$

$$\omega_b = \sqrt{\frac{1}{(L-L_{12})C}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}} \cong \omega_0 + \frac{1}{2}k\omega_0 \quad (8)$$

Für schwache Kopplung ($L_{12} \ll L$; $k \ll 1$) wird die Aufspaltung $\Delta\omega = \omega_b - \omega_a \approx k\omega_0$.

$$\boxed{k = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{L_{12}}{L}} \quad \text{wobei} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \cong \frac{\omega_a + \omega_b}{2} \quad (9)$$

Die Aufspaltung ist also proportional zum Kopplungsgrad k .

Bandfilter

Elektrische Bandfilter können mit gekoppelten Schwingkreisen realisiert werden.

Bei der sog. kritischen Kopplung ($k \approx 0,01$) hat die Resonanzkurve zwischen ω_a und ω_b nur eine kleine Einsattelung. Der gekoppelte Schwingkreis stellt somit ein einfaches Bandpassfilter dar. Mit mehreren kritisch gekoppelten Schwingkreisen lassen sich Bandpassfilter mit flachem Frequenzgang im Durchlassbereich und steilen Kanten realisieren, sog. Kammfilter.

Die schmalbandigen Empfangsfilter (Oberflächenwellenfilter SAW) in Handys arbeiten z.B. nach diesem Prinzip.

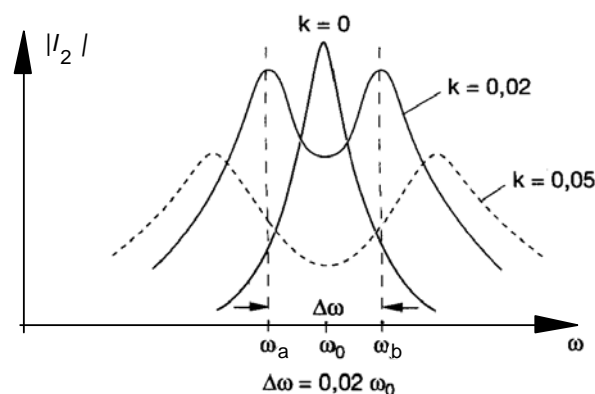


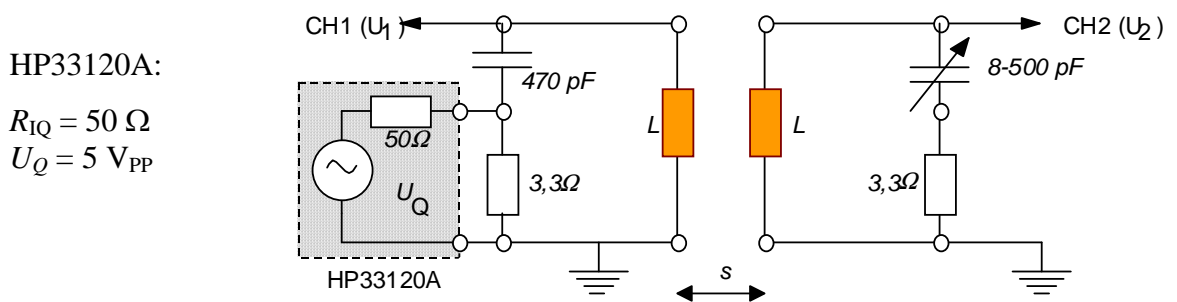
Abb.: Resonanzkurven eines Bandfilters aus zwei gekoppelten Schwingkreisen für unterschiedliche Kopplungsgrade k .

(Am ersten Schwingkreis wird von außen eine Wechselspannung angelegt. Der Strom i_2 im zweiten Schwingkreis zeigt ein Resonanzverhalten, das stark von der Kopplung k abhängt.)

2 Versuchsdurchführung und Auswertung

2.1 Resonanzkurve der gekoppelten Schwingkreise (Sinus Sweep)

Verwenden Sie die Schaltung nach untenstehender Skizze zur Erzeugung von gekoppelten Schwingungen. Die Wechselspannung des Signalgenerators wird über einen $3,3\ \Omega$ Widerstand eingekoppelt. Der Widerstand reduziert zwar den $50\ \Omega$ Innenwiderstand der Signalquelle drastisch, vermeidet aber eine zu starke Dämpfung des Schwingkreises. Mit dem Drehkondensator ($8\text{-}500\ \text{pF}$) lässt sich der zweite Schwingkreis auf die Resonanzfrequenz des ersten abstimmen.



a) Abstimmung der Schwingkreise

- Legen Sie einen sinusförmigen Sweep (Wobbeln) an den Schwingkreis 1 an. Schalten Sie dazu den Funktionsgenerator auf "sweep" um und nehmen Sie folgende Einstellungen vor:
 - Spannung: $5\ \text{V}_{PP}$
 - Startfrequenz: $100\ \text{kHz}$
 - Stopfrequenz: $1\ \text{MHz}$
 - Wobbelzeit: $90\ \text{ms}$
 - Wobbelmode: lin
 - Zeitbasis Oszilloskop: $10\ \text{ms/div}$
 - Triggerposition: 10%

Einstellung des Funktionsgenerators und des Oszilloskops - siehe Anhang 1.

- Beginnen Sie mit einem Abstand der Spulen von $s = 4\ \text{cm}$. Stellen sie u_1 und u_2 auf dem Oszilloskop dar. Zur Abstimmung der beiden Schwingkreise variieren Sie die Kapazität des Drehkondensators bis die Resonanzkurven des gekoppelten Schwingkreises symmetrisch sind, d.h. bis die beiden Resonanzpeaks gleich hoch sind. Die beiden Schwingkreise sind dann auf gleiche Resonanzfrequenz abgestimmt **Verwenden Sie unbedingt Tastköpfe!** (Warum?).

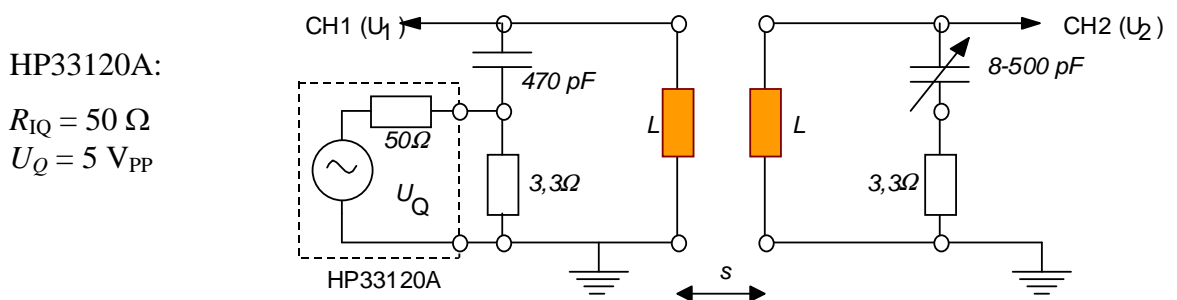
b) Aufnahme der Resonanzkurve

- Verändern Sie zunächst den Abstand s der Spulen und beobachten Sie dabei qualitativ die Änderung des Oszillographenbildes. Erklären Sie ihre Beobachtungen.
- Drucken Sie die Resonanzkurve des zweiten Kreises für $s = 4\ \text{cm}$ aus. Eichen Sie die x-Achse mit den Frequenzwerten. Bestimmen Sie anhand des Ausdruckes die Normalfrequenzen ω_a und ω_b und die Schwebungsfrequenz $\Delta\omega$.
- Berechnen Sie die Frequenz ω_0 und die Induktivität L für die schwache Kopplung. Berechnen Sie weiter den Kopplungsgrad k und die Koppelinduktivität L_{12} .

2.2 Resonanzkurve der gekoppelten Schwingkreise (High Resolution - lin Chirp)

In Versuch 2.1 wurde das Signal im "Peak Detect" Mode dargestellt. Die Resonanzfrequenzen konnten über den Umweg der Zeitmessung bestimmt werden, obwohl dabei das Abtasttheorem verletzt wurde.

Nun wollen wir die Signale von CH1 (u_1) und CH2 (u_2) unter Einhaltung des Abtasttheorems aufnehmen und mit Hilfe der FFT die Resonanzfrequenzen bestimmen. Dazu muss der Frequenzbereich des Sweeps möglichst klein sein und die Sweepzeit auf die "Record-Length" des Oszilloskops abgestimmt sein.



a) Abstimmung der Schwingkreise

- Wahl der Start- und Stopfrequenz.

Wählen Sie die Start- und Stopfrequenz in Einheiten von 10^5 Hertz so, dass der Frequenzbereich 200 KHz beträgt und die beiden bereits bestimmten Eigenfrequenzen einschließt.

1. Beispiel: $f_{\text{Start}} = 500 \text{ kHz}$, $f_{\text{Stop}} = 700 \text{ kHz}$)

Sweepzeit: 1 ms

Abtastrate: 2,5 MSamples/s

Record Length: 2500 Data Points

2. Beispiel: $f_{\text{Start}} = 300 \text{ kHz}$, $f_{\text{Stop}} = 500 \text{ kHz}$)

Sweepzeit: 1 ms

Abtastrate: 1 MSamples/s

Record Length: 1000 Data Points

b) Spektrum des Sweepsignals u_2

- Führen Sie mit Hilfe der FFT-Funktion des Oszilloskops eine Fourier-Transformation der Schwingung u_2 (Schwingkreis 2) durch. Bestimmen mit Hilfe der Anzeigemarken die Normalfrequenzen ω_a und ω_b und die Schwebungsfrequenz $\Delta\omega$ (Hardcopyausdruck).
- Berechnen Sie ω_0 und die Induktivität L der Spulen. Berechnen Sie weiter den Kopplungsgrad k und die Koppelinduktivität L_{12} .

Hinweise: Schalten Sie zur besseren Darstellung des Spektrums das Oszilloskop auf Mittelwertbildung um (Average 8).

2.3 Resonanzkurve der gekoppelten Schwingkreise (Impulse Response)

Der Funktionsgenerator wird vom Betreuer mit Hilfe des Rechners so eingestellt, dass er eine Folge von 500 ns Impulsen aussendet. Mit den Impulsen wird der Schwingkreise zu freien gedämpften Schwingungen angestoßen.

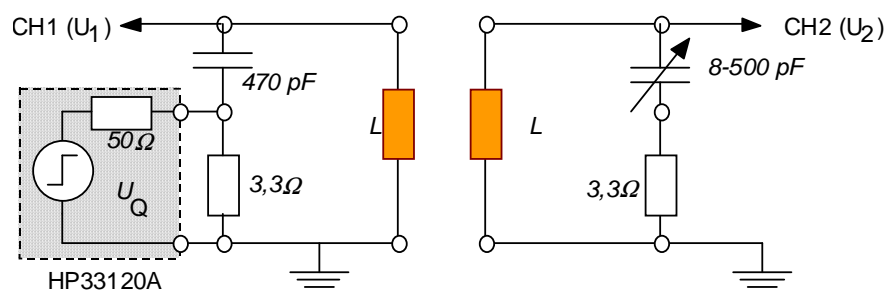
Aus der Regelungs- bzw. Messtechnikvorlesung kennen wir den bekannten Satz: Die Fouriertransformation der Impulsantwort eines linearen zeitinvarianten Systems (LTI-System) liefert das Übertragungsverhalten des Systems.

Da die Schwingung u_2 die Impulsantwort des gekoppelten Schwingkreises ist, stellt das Spektrum von u_2 das Übertragungsverhalten des Schwingkreises dar.

HP33120A:

$$R_{IQ} = 50 \Omega$$

$$U_Q = 5 \text{ V}_{PP}$$



a) Aufnahme der Impulsantwort

- Erzeugen Sie mit dem Funktionsgenerator eine Folge von 500 ns Impulsen¹. Fixieren Sie Abstand der Spulen auf $s = 4 \text{ cm}$ (Abstandsholz).
- Stellen Sie die freien Schwingungen u_1 und u_2 auf dem Oszilloskop dar.
- Mit Hilfe der Oszilloskop-Mathematik-Funktion CH1+CH2 können die zwei Signale addiert werden. Addieren Sie u_1 und u_2 . Erklären Sie das Ergebnis !
 - Warum ergibt sich eine gedämpfte harmonische Schwingung ?
 - Welche Frequenz hat diese gedämpfte Schwingung ? (Hardcopyausdruck)

b) Spektrum der Impulsantwort u_2

- Führen Sie mit Hilfe der FFT-Funktion des Oszilloskops eine Fourier-Transformation der Schwingung u_2 (Schwingkreis 2) durch. Bestimmen mit Hilfe der Anzeigemarken die Normalfrequenzen ω_a und ω_b und die Schwebungsfrequenz $\Delta\omega$ (Hardcopyausdruck).
- Berechnen Sie ω_0 und die Induktivität L der Spulen. Berechnen Sie weiter den Kopplungsgrad k und die Koppelinduktivität L_{12} .

Hinweise: Schalten Sie zur besseren Darstellung des Spektrums das Oszilloskop auf Mittelwertbildung um (Average 8).

Stellen Sie eine Abtastrate von ca. 2 MSamples/s (bzw. 100 kHz/div) ein.

¹ HP Benchlink ARB Einstellung:

File: singlepulse40pt.arb ; Send Waveform 5 kHz ; Amplitude 5V_{pp} ; .

Zusammenfassung

Fassen Sie die Ergebnisse der einzelnen Versuche in einer Tabelle zusammen und führen Sie einen Vergleich der Messergebnisse durch.

	Versuch 2.1 Lin-Sweep	Versuch 2.2 HighRes-Sweep	Versuch 2.3 Impulse Response
Eigenfrequenz ω_h in 1/s			
Eigenfrequenz ω_b in 1/s			
Frequenz ω_0 in 1/s			
Differenzfrequenz $\Delta\omega$			
Induktivität L in μH			
Kopplungsinduktivität L_{12}			
Kopplungsgrad k			

ANHANG 1

Frequenzwobbelung (Sweep) zur direkten Darstellung der Resonanzkurve

Beim *Wobbeln* ändert sich die Frequenz von einer *Startfrequenz* bis zu einer *Stopfrequenz* innerhalb einer bestimmten Zeit (*Wobbelzeit*) linear oder logarithmisch. Dieser Vorgang wiederholt sich, so dass die Frequenz periodisch (z.B. linear = sägezahnförmig) moduliert wird. Bei einem Durchlauf von der Start- bis zur Stopfrequenz stellt dann die Amplitude der Resonanzspannung U_2 direkt den Frequenzgang des Resonanzkreises dar. Dazu wird noch ein externes Triggersignal benötigt, das das Oszilloskop bei der Startfrequenz triggert. Welche Fehler treten auf, wenn die Wobbelzeit zu kurz gewählt wird ?

Einstellung des Funktionsgenerators HP33120A:

- Aktivierung der Wobbelbetriebsart: **Shift Sweep** SWP erscheint
 - SWP Menu aufrufen:: **Shift Recall Menu** SWP Menu Anzeige
 - Startfrequenz (100 kHz) eingeben: **>** 1:START F **✓** f_{Start} eingeben
 - Eingabe der Einstellung: **Enter**
- Verfahren Sie ebenso mit der Eingabe von:
- Stopfrequenz (1 MHz): **>** 2:STOP F
 - Wobbelzeit (90 ms): 3:SWP TIME
 - Wobbelmode (lin) 4:SWP MODE

Zum Triggern liefert der Funktionsgenerator ein SYNC-Signal, das an den Ext Triggereingang (TDS340A) bzw. AUX-Eingang (TDS420A Rückseite) des Oszilloskops gelegt wird..

Einstellung des Oszilloskops:

- Zeitbasis einstellen: 10 ms/div mit (horiz.) SCALE-Drehknopf
- Externe Triggerung: (TriggerMenu \Rightarrow (TypeEdge:) Source \Rightarrow Ext/Aux)
- Triggerlevel: (TriggerMenu \Rightarrow (TypeEdge:) Level \Rightarrow Set to TTL)
- Triggerposition (10%) einstellen: (Horizontal Menu \Rightarrow Trigger Position \Rightarrow Drehknopf)
- Rollmode abschalten (TDS430A): (Horizontal Menu \Rightarrow Horz Control \Rightarrow Roll Mode Off)
- Darstellungsmode: (Acquire \Rightarrow Mode \Rightarrow Peak Detect)

ANHANG 2



Educators's Corner: Interactive Experiments Coupled Oscillators: part C (Swept Sine)

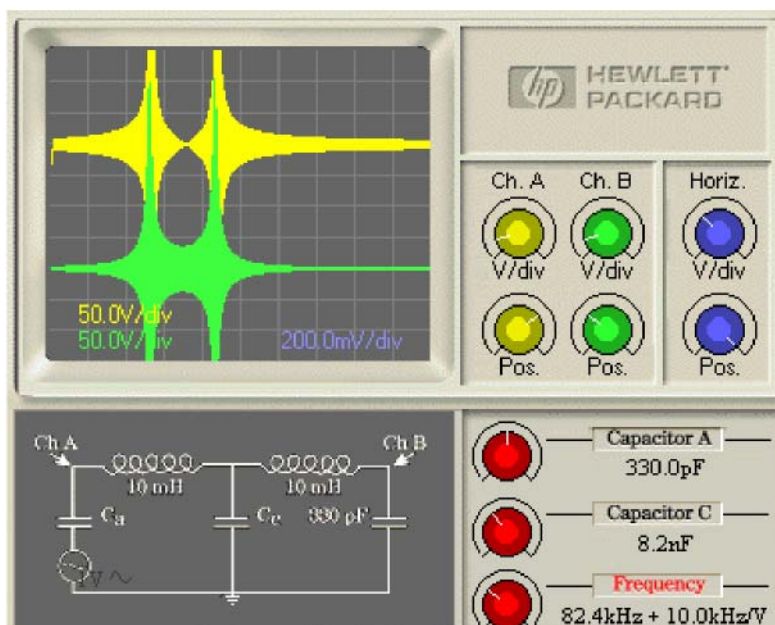
By: S. A. Dodds
Physics Department
Rice University
Houston, TX

In this part we will use the function generator to excite the first oscillator with a sinusoidal wave and measure the response of the second oscillator. The scope is used to measure the voltage and hence infer the charge on capacitors C_a and C_b

You can easily visualize what is happening by using the sweep function on the Agilent 33120A. Set the sweep start and stop frequencies with the SWEEP MENU.

In the Java example below, we have assumed the Agilent 33120A solution, with the function generator sweeping internally and the scope time base set to show one complete sweep.

Using your mouse, click on the instrument controls to adjust them.



If an Agilent 33120A is not available, an alternate is to use a second function generator to sweep the driving frequency of a function generator that has an external sweep input. Set the second function generator for a triangle-wave output a 10 Hz and connect it to the VCF (voltage controlled frequency) input of the driving generator. Set the scope for X-Y operation, with the sweep voltage as X input and the capacitor voltage as Y input. If the driving generator is set near the resonance frequency you should see two peaks on the display. Adjust the amplitude and offset of the sweep generator and the scope scales to get a nice display.

Quelle: (Agilent heißt nun "Keysight")

<http://www.keysight.com/main/editorial.jsp?cc=DE&lc=ger&ckey=1756523&nid=-32750.0&id=1756523>

ANHANG 3



Educators' Corner: Interactive Experiments
Coupled Oscillators: Part A (Square Wave Input)

By: S. A. Dodds
 Physics Department
 Rice University
 Houston, TX

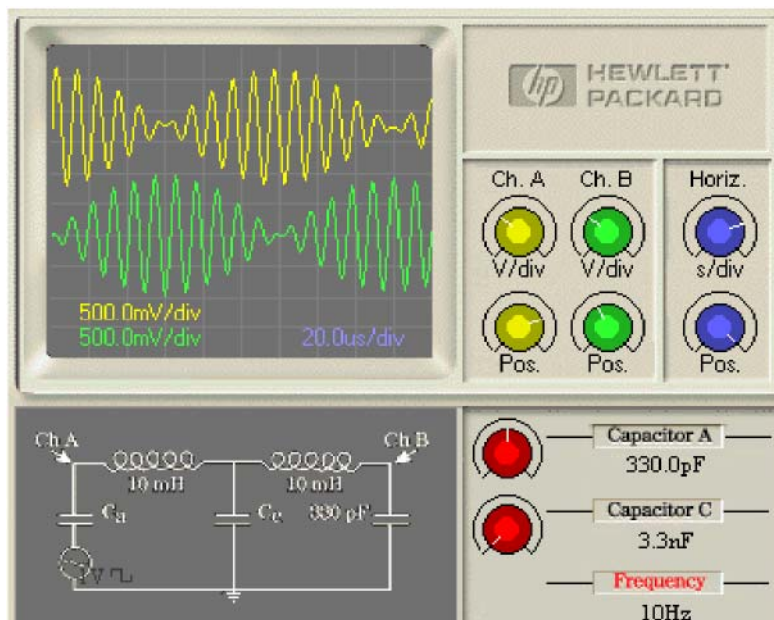
Our first exercise will be to pulse the circuits and watch the energy slosh back and forth between the two capacitors. The method is similar to what you used in studying transients in a single RLC circuit.

Wire up the circuit shown below. The variable capacitor has a range of 250 - 650 pF so it can vary the oscillation frequency for the first RLC circuit in a range centered on that of the second. The 3.3ohm resistor is used to reduce the impedance of the function generator. Otherwise the 50ohm internal impedance would introduce too much damping in our first oscillator. Channel 1 measures the charge on C_a (approximately) and Channel 2 measures the charge on C_b . Begin with C_c at an intermediate value, say 0.01 μF .

Set the function generator to produce a maximum-amplitude square wave at 200-300 Hz. Adjust the time base and vertical sensitivity of the scope so that you can see the transients that occur each time the square wave reverses polarity. You will probably find it convenient to use the TTL output as an external trigger for the scope.

Vary the tunable capacitor and observe the qualitative behavior of the signals. Find the capacitor setting that gives the slowest beat frequency on C_b . By minimizing w_{ex} in this way we achieve the condition $C_a = C_b$ assumed in our previous analysis. Using this setting, sketch the two waveforms and identify the relevant features on your sketch. You should be able to recognize the decay of the signal due to the finite resistance in the circuit and the expected $\cos w_{ex}t$ and $\sin w_{ex}t$ dependencies of the q_a and q_b envelopes. Be sure to get a good estimate of the modulation frequency w_{ex} for comparison with later measurements. Don't forget that the minima in the modulation envelope occur at intervals of $2\pi/2w_{ex}$, not $2\pi/w_{ex}$.

After doing the detailed sketches for $C_c = 0.01 \mu\text{F}$, describe the changes when you use a 0.0047 μF and a 0.047 μF coupling capacitor. As before, adjust the variable capacitor setting to obtain the slowest beat. Using your mouse, click on the instrument controls to adjust them.



Quelle: (Agilent heißt nun "Keysight")

<http://www.keysight.com/main/editorial.jsp?cc=DE&lc=ger&ckey=1756523&nid=-32750.0&id=1756523>