

## Michelson-Interferometer (MIF)

### Stichworte:

Superposition von Wellen, Interferenz, Interferenzen gleicher Neigung, Interferenzen gleicher Dicke, räumliche und zeitliche Kohärenz, Brechzahl und optische Weglänge, Dispersion, spektrale Bandbreite, Monochromasie, Spektren von Lichtquellen.

### Ziel des Versuchs:

Studium von Interferenzerscheinungen mit einem Michelson-Interferometer:

- Justierung eines Michelson-Interferometers
- Beobachtung von Interferenzstreifensystemen
- Eichung einer Verschiebeeinrichtung durch Abzählen von Interferenzstreifen
- Bestimmung der Lichtwellenlänge einer Spektrallampe
- Bestimmung der Brechzahlen von Luft und  $\text{CO}_2$
- Messung der spektralen Breite von Lichtquellen mit Hilfe von Weißlichtinterferenzen

### Literatur

Hering, Martin, Stohrer: Physik für Ingenieure, VDI

Hecht, E.: Optik, Addison Wesley

Berkley Physik Kurs Bd. 6: Physik und Experiment, Vieweg

Jenkins, F.A.; White, H.E.: Fundamentals of Optics, Mac Graw Hill

## 1 Grundlagen

### 1.1 Interferenzen gleicher Neigung

Interferenzen gleicher Neigung treten auf, wenn monochromatisches Licht unter verschiedenen Einfallswinkeln (divergente Strahlung) auf zwei parallele Grenzflächen fällt.

Alle Lichtstrahlen mit gleicher Einfallsrichtung erfahren den gleichen Gangunterschied und interferieren somit gleichartig, z.B. konstruktiv oder destruktiv. Man nennt sie daher Interferenzen gleicher Neigung.

Das Interferenzmuster kann mit dem Auge direkt oder auf einem Schirm in der Fokalebene einer Linse betrachtet werden. Da die Linse alle Strahlen einer Einfallsrichtung in einem Punkt fokussiert, kann die Lichtquelle auch ausgedehnt sein.

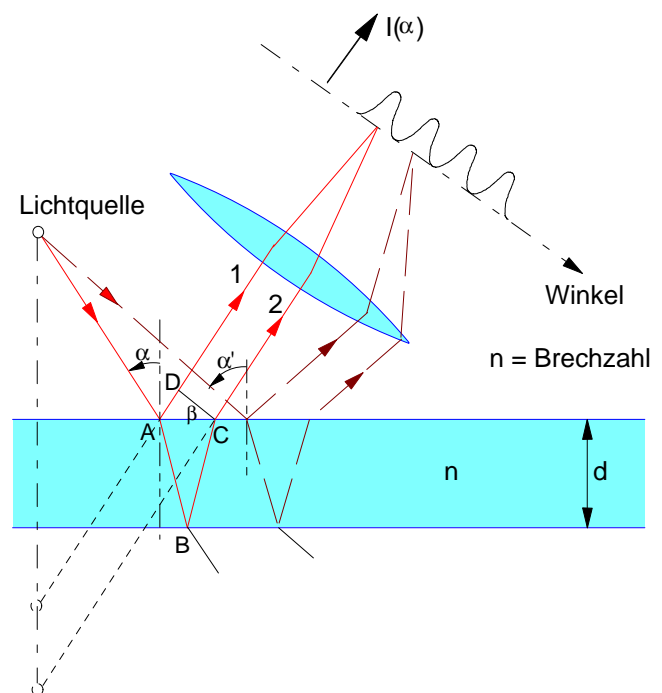


Abb.1: Anordnung zur Beobachtung von Interferenzen gleicher Neigung in Reflexion

Anmerkung: Bei einer punktförmigen Lichtquelle ist keine Linse notwendig, da sich die beiden Spiegelbilder der Quelle als virtuelle Wellenzentren auffassen lassen:  
→ Interferenzen von zwei Punktlichtquellen.

Der **optische Wegunterschied**  $\delta(\alpha)$  zwischen Strahl 1 und 2 ergibt sich nach Abb.1 zu:

$$\delta = n(\overline{AB} + \overline{BC}) - \overline{AD} = \frac{2nd}{\cos \beta} - \overline{AC} \sin \alpha$$

mit:  $\overline{AC} = 2d \tan \beta$  und  $\sin \alpha = n \sin \beta$  folgt weiter:

$$\delta = \frac{2nd}{\cos \beta} - 2d \tan \beta \sin \alpha = \frac{2nd}{\cos \beta} \left( 1 - \sin \beta \frac{\sin \alpha}{n} \right)$$

$$\delta = \frac{2nd}{\cos \beta} (1 - \sin \beta \sin \beta) = 2nd \cos \beta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$$

Unter Beachtung des Phasensprunges von  $\pi$  für den reflektierten Strahl 1 wird dann der **Gangunterschied**  $\Delta(\alpha)$  zu:

$$\Delta(\alpha) = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2} \quad (1)$$

$$\Delta = m\lambda \quad \text{ergibt **Intensitätsmaxima**}$$

$$\Delta = (2m + 1)\lambda/2 \quad \text{ergibt **Intensitätsminima** .}$$

## 1.2 Interferenzen gleicher Dicke

Interferenzen gleicher Dicke erhält man, wenn paralleles Licht auf eine Keilplatte fällt (siehe Abb. 2).

Für fast senkrechten Einfall und bei kleinem Keilwinkel gilt für den Gangunterschied  $\Delta$ :

$$\Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \varepsilon} - \frac{\lambda}{2} \approx 2dn - \frac{\lambda}{2}$$

Zwei benachbarte Intensitätsmaxima treten bei der Dicke  $d_1$  und  $d_2$  auf, wenn für die Gangunterschiede gilt:

$$\Delta_1 = 2d_1 n - \frac{\lambda}{2} = m\lambda$$

$$\Delta_2 = 2d_2 n - \frac{\lambda}{2} = (m+1)\lambda$$

$$\Rightarrow \Delta_2 - \Delta_1 = 2n(d_2 - d_1) = \lambda$$

Wegen  $(d_2 - d_1) = l \tan \varepsilon$  ergibt sich dann für den *räumlichen Abstand* zwischen zwei Intensitätsmaxima:

$$l = \frac{\lambda}{2n \tan \varepsilon} \quad (2)$$

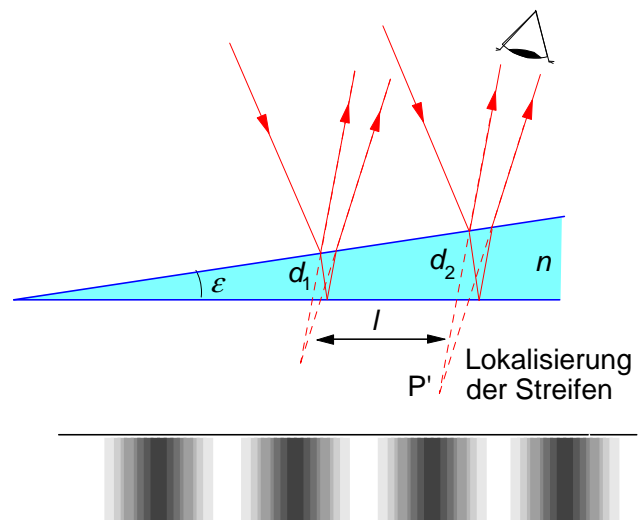


Abb.2: Interferenzen gleicher Dicke

Die beiden Strahlen können entweder mit einer Linse auf einem Schirm oder mit der Augenlinse auf der Netzhaut vereinigt werden (Lokalisierung der Streifen). Mit zunehmender Dicke erhält man in regelmäßigen Abständen helle und dunkle Streifen, sog. *Fizeau-Streifen*. Bei konstantem Einfallswinkel ist der Gangunterschied für Stellen gleicher Dicke gleich und zeigt damit die gleiche Interferenzerscheinung, z.B. dunkle Streifen. Daher bezeichnet man diese Interferenzen als Interferenzen gleicher Dicke.

### 1.3 Kohärenz

Lichtinterferenzen treten nur dann auf, wenn die am Beobachtungsort interferierenden Lichtwellen *kohärent* sind. Lichtwellen werden zeitlich kohärent genannt, wenn sich während der Beobachtungszeit die Phasendifferenz  $\Delta\varphi$  der Teilwellen nicht ändert (genauer - weniger als  $2\pi$  ändert). Die **Kohärenzzeit** ist dann die maximale Zeit, während der sich die Phasendifferenz  $\Delta\varphi$  der Teilwellen um höchstens  $2\pi$  ändert.

#### Spektrale Linienbreite und Kohärenzlänge

Eine Lichtquelle der Frequenz  $f_0$  und der spektralen Breite  $\Delta f$  ist nach Fourier eine Überlagerung unendlich vieler monochromatischer Teilwellen mit Frequenzen zwischen  $f_0 - \Delta f/2$  und  $f_0 + \Delta f/2$ .

Wir betrachten zwei repräsentative

Teilwellen mit den Frequenzen

$$f_1 = f_0 - \Delta f/2 \quad \text{und} \quad f_2 = f_0 + \Delta f/2.$$

Die Überlagerung ergibt eine Schwebung. Die Phasendifferenz der Teilwellen wächst linear mit der Zeit  $t$  an (siehe Abb. 3b)<sup>1</sup>:

$$\Delta\varphi(t=0) = 0$$

$$\Delta\varphi(t_{\text{Koh}}) = 2\pi(f_2 - f_1)t_{\text{Koh}} = 2\pi$$

Nach der so definierten Kohärenzzeit  $t_{\text{Koh}} = 1/\Delta f$  ist also die Phasendifferenz auf  $2\pi$  angewachsen. Das ist die maximale Phasendifferenz für zwei Teilwellen, da für alle übrigen Teilwellen mit Frequenzdifferenzen kleiner als  $\Delta f$  gilt:  $\Delta\varphi(t_{\text{Koh}}) < 2\pi$ .

**Die Kohärenzzeit  $t_{\text{Koh}}$  einer Lichtquelle ist damit gleich dem Kehrwert der spektralen Bandbreite  $\Delta f$ .**

Sie entspricht nach Abb. 3c der typischen Zeitdauer des Wellenzuges.

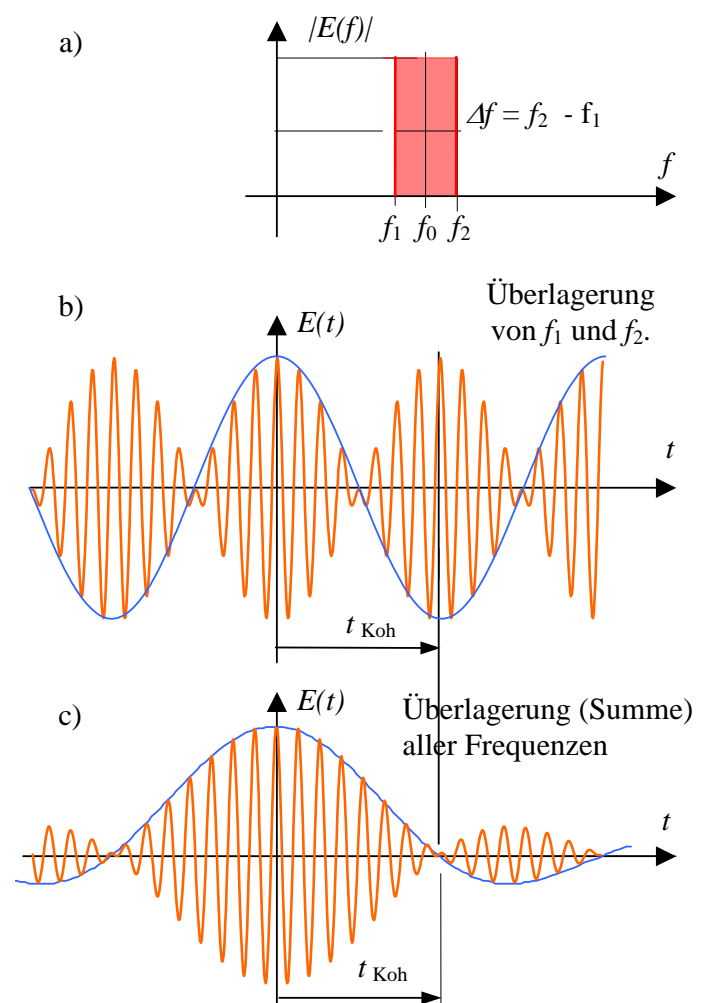


Abb.3: Zeitliche Kohärenz einer Welle

Als **Kohärenzlänge**  $l_{\text{Koh}}$  wird die Strecke bezeichnet, die das Licht während der Kohärenzzeit  $t_{\text{Koh}}$  zurücklegt und ist gleich der typischen Länge des Wellenzuges:

$$t_{\text{Koh}} = 1/\Delta f \quad l_{\text{Koh}} = c/\Delta f.$$

<sup>1</sup> Nach der Schwebungsperiode  $T_S = 1/(f_2 - f_1)$  ist die Phasendifferenz auf  $2\pi$  angewachsen.

Bei Interferenzexperimenten wird die Kohärenzbedingung meist durch Aufteilung der Strahlen erreicht (Amplituden- oder Wellenfrontaufteilung). Die von einer einzigen Lichtquelle ausgehenden Strahlen werden aufgeteilt und nach Durchlaufen unterschiedlicher Wege wieder überlagert. Der Wegunterschied (Gangunterschied) zwischen den Teilwellen darf dann nicht größer als die Kohärenzlänge der Lichtquelle sein.<sup>2</sup>

#### 1.4 Das Michelson-Interferometer

Das in Abb. 4 dargestellte Michelson-Interferometer ist ein Zweistrahlinterferometer mit Amplitudenteilung (Amplitudenverhältnis 1:1).

Die von einer punktförmigen oder ausgedehnten Lichtquelle L ausgehenden Lichtwellen werden mit einem unter  $45^\circ$  zur optischen Achse geneigten, halbdurchlässigen Spiegel (ST) in zwei Teilwellen aufgespalten. Der Einfachheit halber nehmen wir im folgenden eine punktförmige Lichtquelle an. Nach der Reflexion an den beiden Planspiegeln S1 und S2 werden die Teilwellen auf einem Schirm vereinigt, oder mit einem Fernrohr beobachtet.

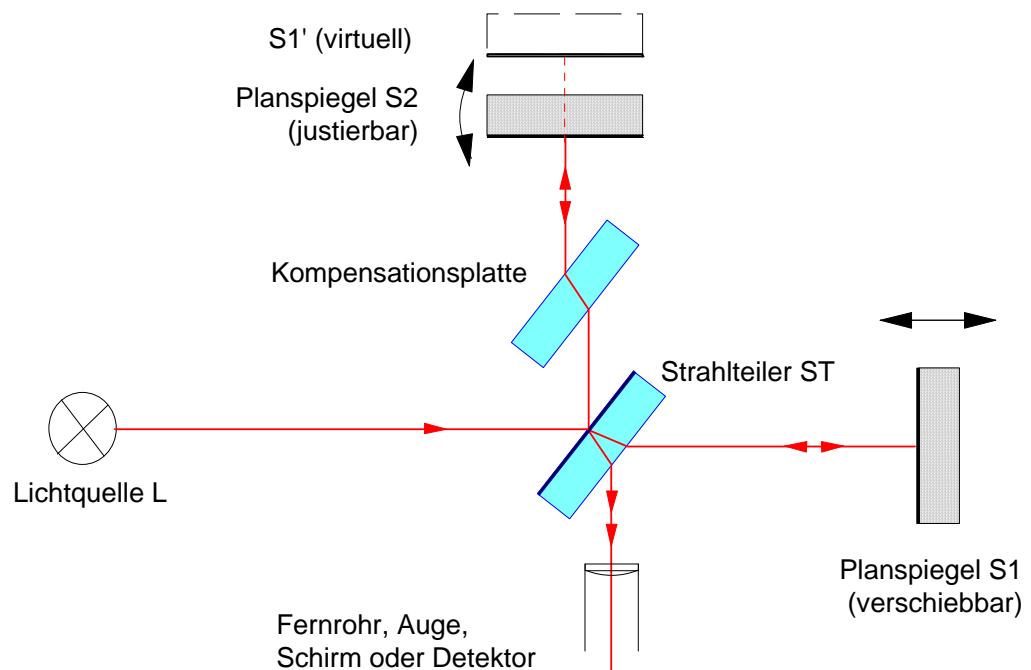


Abb. 4: Michelson-Interferometer (schematisch)

Der Planspiegel S1 wirkt genauso wie sein in den zweiten Interferometerarm gespiegeltes Bild S1'. Damit kann man die Lichtquelle L durch ihre virtuellen Bilder L1' und L2' ersetzen und statt der vom Punkt L ausgehenden Welle, die von ihren Bildpunkten L1' und L2' ausgehenden Teilwellen betrachten (siehe Abb. 5a).

<sup>2</sup> Dieser Zusammenhang wird mit Hilfe der Fouriertransformation noch deutlicher.

Zwischen der zeitlichen Dauer  $\Delta t$  des Wellenzuges  $E(t)$  und der Breite  $\Delta f$  seines Spektrums  $g(f)$  besteht über die Fouriertransformation ein fester Zusammenhang (Unschärfebeziehung):  $\Delta f \cdot \Delta t \cong 1$

Ist die spektrale Feldstärkeverteilung  $g(f)$  einer Lichtwelle sehr breit, so wird die Zeitdauer  $\Delta t$  (Halbwertsbreite) sehr schmal. Diese Zeitdauer  $\Delta t$  ist als die Kohärenzzeit  $t_{\text{Koh}}$  zu interpretieren.

Geht man zu der messbaren Intensität  $I(t) \propto |E(t)|^2$  und der spektralen Intensität oder Leistungsdichte  $I(f) \propto |g(f)|^2$  über, ändert sich an dieser Aussage nichts wesentliches. Das Produkt aus der spektralen Linienbreite  $\gamma$  und der Kohärenzzeit hat einen festen, von der jeweiligen Impulsform abhängigen Wert von der Größenordnung 1.

Für ein spektrales Rechteckprofil mit der Linienbreite  $\gamma$  gilt:  $\gamma \cdot t_{\text{Koh}} \cong 1$

Damit der optische Wegunterschied der beiden Interferometerarme für alle Wellenlängen gleich ist, wird in einen Arm eine **Kompensatorplatte** eingebracht. Sie sorgt dafür, dass die Lichtwege durch Glas für beide Arme gleich groß sind. Dies ist von Bedeutung bei breitbandigen Lichtquellen, da sich sonst wegen der Dispersion unterschiedliche Gangunterschiede für die einzelnen Wellenlängen ergeben.

#### 1.4.1 Kreisförmiges Streifensystem.

Wenn S1' und S2 annähernd parallel ausgerichtet sind, erblickt man ein System aus hellen und dunklen Ringen. Konstruktive Interferenz (helle Ringe) erhält man, wenn der Gangunterschied der beiden Wellen entweder gleich Null oder gleich einem ganzzahligen Vielfachen der Wellenlänge ist. Berücksichtigt man den zusätzlichen Phasensprung von Strahl 1 am Strahlteiler ST, treten Maxima unter dem Beobachtungswinkel  $\Theta$  auf, wenn für den Gangunterschied gilt:

$$\Delta = 2d \cos\Theta - \frac{\lambda}{2} = m\lambda \quad d: \text{Abstand der Spiegel (=Luftplattendicke)} \quad (3)$$

$\lambda$ : Wellenlänge der monochromatischen Strahlung  
 $m = 0, 1, 2, \dots$ : Ordnung der Interferenz

Eine Vergrößerung des "Abstandes" der Spiegel ergibt eine Aufweitung der Ringe.

Beobachtet man irgendeinen Ring (Ordnung  $m$ ) und vergrößert den Abstand  $d$ , wird der Winkel  $\Theta$ , unter dem dieser Ring auftritt, auch größer.

Wird  $d$  genau um  $\lambda/2$  größer, quillt ein neuer Ring aus dem Zentrum heraus. Es entsteht eine zusätzliche Ordnung  $m$ . Bei entgegengesetzter Bewegungsrichtung schrumpfen die Ringe und verschwinden im Zentrum.

Da die Interferenzen des Michelson-Interferometers denen einer planparallelen Luftplatte S2 - S1' äquivalent sind, ergibt sich das Streifensystem nach dem Prinzip der "Interferenz gleicher Neigung". Interferenzen gleicher Neigung werden auch *Haidingerstreifen* bzw. **Haidinger'sche Ringe** genannt.

#### 1.4.2 Lokalisiertes Streifensystem

Wenn die Spiegel S2 und S1' eine keilförmige "Luftplatte" bilden, entsteht ein Streifensystem nach dem Prinzip der **Interferenzen gleicher Dicke** (siehe Abb.5b und 5c). Die beiden Teilstrahlen, die von den virtuellen Lichtquellen L1' und L2' ausgehen, sind nicht mehr parallel, sondern scheinen (für das Auge) von ihrem Schnittpunkt P' in der Nähe der Spiegelebenen zu kommen.

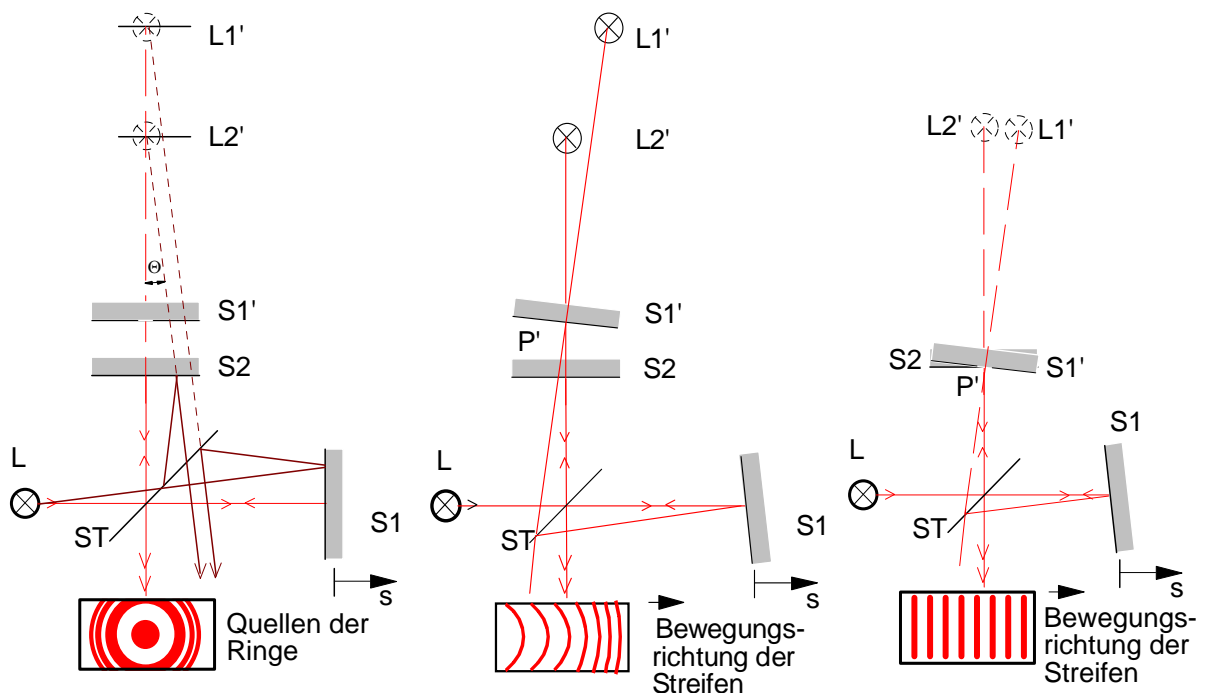
Das Streifensystem ist gerade oder gekrümmt (konvex bezüglich der Lage der Keilspitze) und nahe den Spiegelebenen lokalisiert. Von einem Streifen zum nächsten ändert sich die virtuelle Keildicke um  $\lambda/2$ .

Durch Beobachtung der Streifen, bzw. Ringe ist es relativ leicht, das Interferometer auf Wegunterschied  $\delta = 0$  einzustellen:

- Die Streifen im Streifensystem (keilförmige Luftplatte) verlaufen dann parallel.
- Das Ringsystem (parallele Luftplatte) schrumpft zu einem einzigen dunklen Fleck. ( $\Delta = \lambda/2$  unabhängig von der Richtung  $\Theta$  und das gesamte Gesichtsfeld ist dunkel.<sup>3</sup>)

<sup>3</sup> Hierbei wird an der Strahlteilerplatte ein Phasensprung bei der Reflexion in den oberen Interferometerarm (S2) angenommen, während der Rückreflex von S1 keinen Phasensprung erfährt. Bei einer Metallbeschichtung erfährt auch der von S1 kommende Rückreflex einen Phasensprung, so dass sich bei Wegunterschied Null ein helles Gesichtsfeld (heller Streifen) ergibt.

## Übersicht der Streifensysteme beim Michelson-Interferometer



"Luftplatte" parallel

Das Interferenzstreifensystem ist ein Haidingersches Ringsystem (Interferenzen gleicher Neigung).  
Bei einer Verschiebung von  $S1$  in Pfeilrichtung von  $s$  quellen Ringe aus dem Zentrum heraus, da der virtuelle Plattenabstand  $S2-S1'$  größer wird.  
Bei einer ausgedehnten Lichtquelle werden die Strahlen (gleicher Neigung) mit einer Linse vereinigt oder mit dem Auge betrachtet.

"Luftplatte" keilförmig

Das Auge lokalisiert ein Interferenzstreifensystem gleicher Dicke am virtuellen Schnittpunkt  $P'$  in der Nähe des Luftkeils  $S2-S1'$ .  
*Deutung:*  
Für die zwei virtuellen Punktlichtquellen  $L1'$  und  $L2'$  liegt das Zentrum des Ringsystems in der Verlängerung der Verbindungsgeraden. Da dieses Zentrum aber außerhalb des Überlagerungsbereichs liegt, sieht man nur einen Ausschnitt.

"Luftplatte" keilförmig mit  $d \cong 0$

Interferenzstreifen wie bei der Interferenz von zwei Punktlichtquellen senkrecht zur Verbindungsgeraden.  
Bei der Betrachtung mit dem Auge scheinen die Streifen im Schnittpunkt  $P'$  lokalisiert.  
Stellt man die Spiegel parallel, vergrößert sich der Abstand der Streifen, bis schließlich bei Parallelstellung das ganze Gesichtsfeld dunkel wird. (Virtuelle Lichtquellen decken sich).

Hinweis:

Bei Beobachtung des Interferogramms mit einem Fernrohr oder mit einer Kamera muss das Fernrohr bzw. die Kamera auf die im virtuellen Schnittpunkt  $P'$  lokalisierten Streifen scharf gestellt werden. Dazu beobachtet man am besten ein Hilfsobjekt, das man unmittelbar vor den Spiegel  $S2$  stellt.

Abb. 5: Streifensysteme (Interferogramme) beim Michelson-Interferometer

### 1.4.3 Fourierspektrometrie

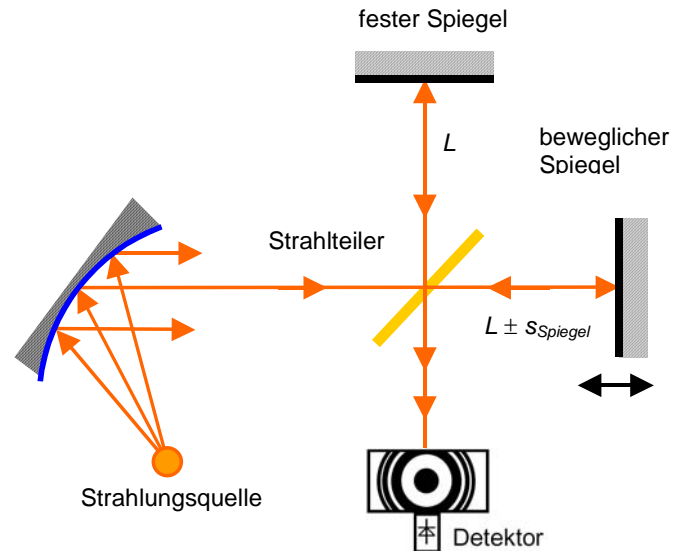
#### (Das Michelson-Interferometer als Fourier-Spektrometer)

Moderne IR-Spektrometer arbeiten nach der Fourier-Transform-Methode (**FTIR-Spektrometer**). Dabei wird die spektrale Emission einer Lichtquelle oder die spektrale Absorption einer Probe mit Hilfe der Fourier-Transformation gemessen.

Das Michelson-Interferometer wird so justiert, dass ein Haidingersches Ringsystem entsteht, d.h. der Strahlengang der beiden Teilstrahlen ist bei der Überlagerung gleich (parallele Luftplatte).

Am Ort der Überlagerung wird mit einem Detektor nur die zentrale Ordnung der Interferenz beobachtet.

Wird nun der Spiegel S1 verschoben, quellen Ringe aus dem Zentrum, bzw. verschwinden darin. Trägt man das Detektorsignal als Funktion des Wegunterschiedes  $\delta = 2s$  auf, erhält man das sog. "Interferogramm"  $I(\delta)$ .



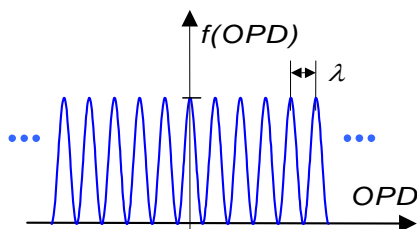
Der besondere Vorteil dieser Methode ist, dass alle spektralen Anteile der Lichtquelle gemeinsam auf das bei einem festen Wegunterschied registrierte Signal wirken.

#### a) monochromatische Lichtquelle

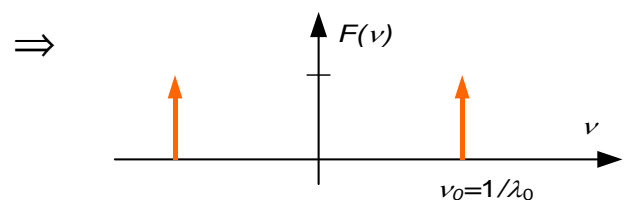
Bei einer monochromatischen Lichtquelle mit der Wellenlänge  $\lambda_0$  (z.B. HeNe-Laser) ist das Interferogramm ein  $\cos^2$ -förmiges Signal mit der Periode  $\lambda_0$ .

Trägt man das Signal als Funktion des Gangunterschiedes  $\Delta = \text{OPD}$  auf, ist die Periode gerade  $\lambda_0$ . ( $\Delta = \text{OPD} = \text{Optical Path Difference}$ )

Detektorsignal (Interferogramm):



Spektrum des Detektorsignals:



### b) zwei Spektrallinien

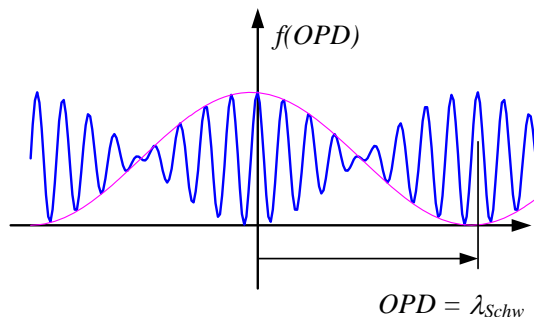
Enthält die Lichtquelle zwei verschiedene Wellenlängen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , überlagern sich die Interferogramme der beiden Wellenlängen. Bei zwei eng benachbarten Spektrallinien ergibt sich dann eine Schwebung. Ist die OPD gerade eine Schwebungsperiode gilt:

$$OPD = m\lambda_1$$

$$OPD = (m+1)\lambda_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OPD} = \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}$$

Detektorsignal (Interferogramm):

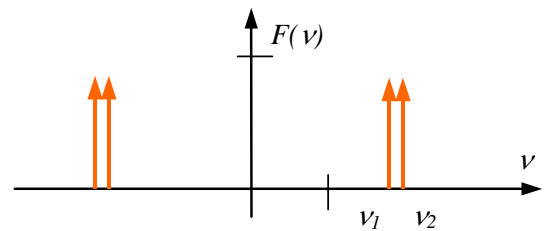


$$\Delta k = k_2 - k_1$$

$$2\pi / \lambda_{Schw} = 2\pi / \lambda_2 - 2\pi / \lambda_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_{Schw}} = \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}$$

Spektrum des Detektorsignals:

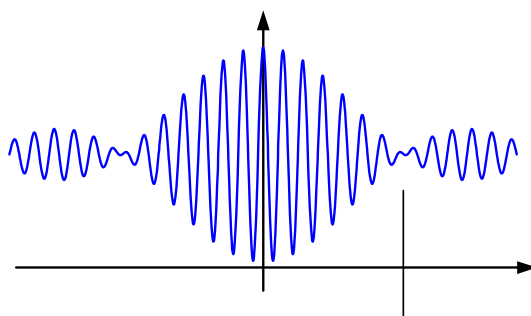


### c) breitbandige Strahlungsquelle

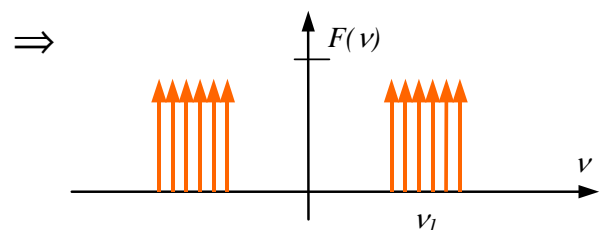
Besteht die Strahlung aus mehreren Frequenzkomponenten, wird jede Frequenz in ein  $\cos^2$ -förmiges Signal moduliert.

$\Rightarrow$  Das Interferogramm dieser Strahlung setzt sich dann additiv aus den Interferogrammen der einzelnen Frequenzen (Wellenlängen) zusammen.

Detektorsignal (Interferogramm):



Spektrum des Detektorsignals:



Das Ergebnis lässt vermuten:

Das gemessene Interferogramm ist die (Umkehr-)Fouriertransformation des Spektrums der Lichtquelle.

**Die Fouriertransformation des gemessenen Intensitätsverlaufs  $I(OPD)$  liefert das Spektrum  $F(\tilde{\nu})$  der Lichtquelle.  $\tilde{\nu} = 1/\lambda$   
 $I(OPD)$  und  $F(\tilde{\nu})$  bilden ein Fouriertransformationspaar.**

$$F(\tilde{\nu}) = \int I(x) e^{-j2\pi\tilde{\nu}x} d\tilde{\nu}; \quad x = OPD$$



Bei einer breitbandigen Lichtquelle spricht man dann von **Weißlichtinterferenzen**.

Die Interferogramme der verschiedenen Wellenlängen von weißem Licht sind nur für den Gangunterschied  $OPD = 0$  alle in Phase und verstärken sich (kein Phasensprung am Strahlteiler für den reflektierten Teil S2), bzw. löschen sich aus (Phasensprung für den reflektierten Teil). Mit zunehmendem Gangunterschied (Spiegelverschiebung) verschieben sich die Streifensysteme immer mehr und verschwinden schließlich im Interferogramm. Stark durchmodulierte Interferogramme treten also nur bei geringem Gangunterschied auf.

Das durch Verschieben eines Spiegels erhaltene Interferogramm  $I(\Delta)$  kann näherungsweise auch dadurch erhalten werden, dass der justierbare Spiegel verkippt wird. Bei gering geneigten Spiegeln sind dann neben einem zentralen (dunklen/hellen) Streifen bei Gangunterschied  $OPD = 0$  beidseitig etwa 4-6 farbige Streifen zu sehen.

Wird dann ein Profilschnitt über das entstehende Streifensystem auf dem Bildschirm gelegt, erhält man das eigentliche Interferogramm.

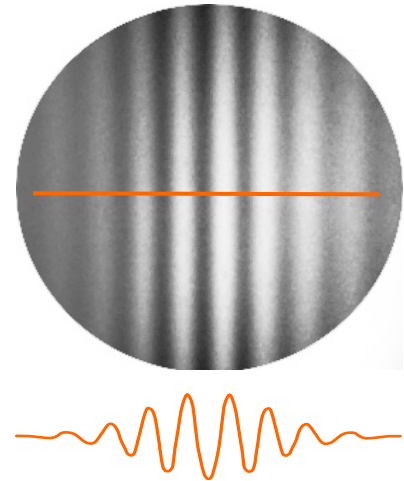


Abb. 6:

Profilschnitt durch das zweidimensionale Interferogramm zur Erzeugung eines eindimensionalen auswertbaren Interferogramm-Signals (Intensitätsprofil).

Der **Streifenkontrast** in einem Interferogramm ist definiert als

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (4)$$

wobei  $I_{\max}$  und  $I_{\min}$  die Intensitäten im Maximum und im benachbarten Minimum bedeuten. Je weniger der Kontrast mit zunehmendem Wegunterschied abnimmt, desto geringer ist die spektrale Breite der Lichtquelle. Wenn der Streifenkontrast verschwindet, ist der Wegunterschied etwa gleich der Kohärenzlänge der Strahlung.

Eine genauere Analyse zeigt, wie oben plausibel dargestellt, dass die spektrale Form der Intensitätsverteilung  $I(\tilde{\nu})$  der Quelle gleich der Fouriertransformierten des Interferogramms ist. Durch Fouriertransformation kann demzufolge aus dem Verlauf des Interferogramms das Wellenzahl-Spektrum  $I(\tilde{\nu})$  der Lichtquelle ermittelt werden (*Fourier-Spektrometrie*).

Die folgende Fußnote enthält eine mathematische Begründung dieser Aussage.<sup>4</sup>

**Beispiel: Gaußförmiges Profil der spektralen Intensität**

Das Fouriertransformationspaar eines Gaußimpulses lautet allgemein:

$$u(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp(-\alpha x^2) \quad \circ \text{---} \bullet \quad g(k) = \exp\left(-\frac{k^2}{4\alpha}\right)$$

Ist der Detektorstrom  $I(x) = I(\delta)$  ein gaußförmig modulierter Kosinus (plus eine Konstante) wird das Spektrum  $g(k)$  der Gaußglocke nach dem Faltungstheorem an die Stelle  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  verschoben. Die Fouriertransformierte des Detektorstromes  $I(x)$  ist die spektrale Intensitätsverteilung  $I(\nu)$  der Lichtquelle (siehe Abb. 7).

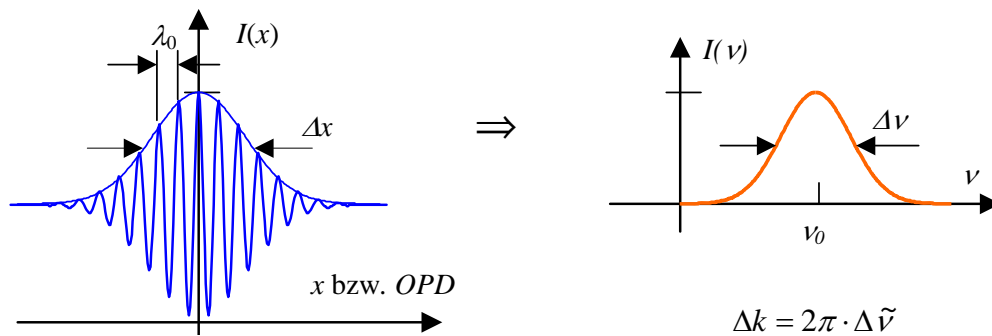


Abb. 7: Die Halbwerts-Breite des Interferogramms ist  $\Delta x_{FWHM} = 2\sqrt{\ln 2 / \alpha}$

Die Halbwerts-Breite der spektralen Intensität ist  $\Delta k_{FWHM} = 4\sqrt{\ln 2 \cdot \alpha}$ .

Damit ergibt sich ein **Orts-Bandbreiteprodukt** von<sup>5</sup>:  $\Delta x \cdot \Delta k \cong 5,5$

Für die spektrale Breite  $\Delta\lambda$  erhält man:

$$\Delta\lambda = \frac{2\pi}{k_0^2} \Delta k \cong \frac{2\pi\lambda_0^2}{4\pi^2} \cdot \frac{5,5}{\Delta x} \cong \frac{2,75 \cdot \lambda_0^2}{\pi \cdot \Delta x}$$

$\Delta x$  ist als *Kohärenzlänge*  $l_{Koh}$  zu interpretieren,  $t_{Koh} = l_{Koh} / c$  als *Kohärenzzeit*.

<sup>4</sup> Die beiden Teilstrahlen der Interferometerarme treffen am Detektor zeitlich verzögert ein. Die Zeitverzögerung  $\tau$  ist gleich dem Wegunterschied  $\delta$  geteilt durch  $c$  ( $\tau = \delta/c$ ). Beide Teilstrahlen sollen die gleiche Intensität besitzen. Wir berechnen nun den zeitlichen Mittelwert der Lichtleistung am Detektor als Funktion der Verschiebung  $\tau$ .

$$I(\tau) \propto \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} [E(t) + E(t + \tau)]^2 dt \propto 2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} [E(t)]^2 dt + 2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} [E(t) \cdot E(t - \tau)] dt$$

$$I(\tau) = 2I_0 + 2 \cdot AKF(\tau)$$

Das erste Glied ist die Intensität der beiden Teilstrahlen. Das zweite Integral ist die Intensität aufgrund der Überlagerung der zwei Teilstrahlen. Mathematisch bedeutet dieses Integral die *Autokorrelation* von zwei elektrischen Feldern.

Mit dem Detektor wird also die Autokorrelationsfunktion AKF (plus eine Konstante) der Lichtwelle gemessen. Im allgemeinen kann diese AKF nicht berechnet werden, da das elektrische Feld einer realen Lichtwelle statistische Phasenänderungen erfährt und daher nicht analytisch angegeben werden kann. Ein Satz aus der Funktionentheorie stellt aber genau den Zusammenhang mit dem Spektrum her:

**Die Fouriertransformation der AKF ist die spektrale Leistungsdichte  $I(f)$ .**

Dieser Satz liefert die Grundlage zur Berechnung des Spektrums einer Lichtquelle aus dem Interferogramm. Setzt man anstelle der Verzögerungszeit  $\tau$  den Wegunterschied  $\delta$  ein ( $\delta = \tau c$ ), lässt sich auch schreiben:  $I(\delta) = 2I_0 + 2 \cdot AKF(\delta)$ . Die Fouriertransformation der gemessenen Ortsfunktion ( $I(x) = AKF(\delta)$ ) liefert die spektr. Leistungsdichte  $I(k) = 1/2\pi \int I(x) \exp(jkx) dx$ .

<sup>5</sup> Da die meisten Linienprofile keine scharfen Grenzen haben und die zugehörigen Interferenzstreifen keinen sprunghaften Kontrastverlauf, ist die Definition von  $\Delta x$  und  $\Delta k$  nicht immer einheitlich.

## 2 Versuche mit dem Michelson-Interferometer

### Vorsichtsmaßnahmen:

- Keinesfalls in den direkten oder reflektierten Strahl des HeNe-Lasers blicken. Die Interferenzmuster dürfen bei Laserbeleuchtung nur auf dem Projektionsschirm beobachtet werden.
- Beim Arbeiten mit der Hg-Lampe ist eine Mattscheibe und ein Filterglas (GG395) vor das Lampengehäuse zu setzen.
- Die Oberflächen der Spiegel und Glasplatten des Interferometers nicht berühren.

### Justierung und Vorversuche:

Das Interferometer wird zuerst unter Anleitung des Betreuers justiert. Dazu werden mit Hilfe eines Fadenkreuzes, das man vor dem Strahlteiler in den Strahlengang stellt, die beiden Teilstrahlen zur Deckung gebracht.

Als Lichtquelle wird ein HeNe-Laser ( $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ ) verwendet.

*Notieren Sie Ihre Beobachtungen ins Protokollheft.*

- Erzeugen Sie nach Abb. 5 durch Spiegelverkipfung (S2) und Spiegelverschiebung (S1) lokalisierte und kreisförmige Streifensysteme. Einen besonders großen Gangunterschied erhält man mit einem, vor dem Spiegel S1 positionierten Glasquader.
- Versuchen Sie das Interferenzmuster auf Gangunterschied Null zu stellen (paralleles Streifenmuster).
- Stellen Sie ein vertikales und paralleles Streifenmuster ein. Bringen Sie nun ein dünnes Mikroskop-Deckplättchen vor S1 in den Interferometerarm ein und beurteilen Sie die Parallelität bzw. Ebenheit der Oberflächen.

### 2.1 Versuch 1: Eichung der Verschiebeeinrichtung

Der Spiegel S1 wird durch eine Mikrometerschraube und eine Hebelübersetzung parallel zum Laserbündel verschoben. Wird der Spiegel genau um  $\lambda/2$  verschoben, wandert gerade ein Streifen an einer beliebigen Markierung auf dem Projektionsschirm vorbei.

Zur Eichung wird auf der Projektionsfläche ein *Streifenabstand von einigen Millimetern* eingestellt. Dann wird die Mikrometerschraube gedreht und für eine bestimmte Zahl  $N$  von Streifen, die an dem frei gewählten Fixpunkt vorbeiwandern, die Mikrometerverschiebung  $\Delta s$  gemessen. Mit dem Übersetzungsverhältnis  $u$  und der Streifenzahl  $N$  ergibt sich die Spiegelverschiebung  $s$ :

$$s = u\Delta s = N(\lambda/2)$$

- Berechnen Sie die Übersetzung  $u$ , indem Sie die Mikrometerverschiebung  $\Delta s$  für 50 Streifendurchgänge bestimmen. Wiederholen Sie die Messung.

Achtung: Die Teilung am Mikrometer beträgt  $10 \mu\text{m}$ .

Versuchen Sie durch Interpolation möglichst auf  $2 \mu\text{m}$  genau abzulesen.

### 2.2 Versuch 2: Bestimmung der Wellenlänge der grünen Hg-Spektrallinie

Setzen Sie nun die Quecksilberlampe mit Grünfilter ein und justieren Sie das Interferometer. Das Interferenzstreifenmuster wird mit einem Fernrohr beobachtet, das am Interferometerausgang eingesetzt wird. Da die Interferenzstreifen an der (virtuellen) Keiloberfläche (siehe Abb. 5) lokalisiert sind, ist ein auf Unendlich eingestelltes Fernrohr mit einer Vorsatzlinse ( $f' \cong 200 \text{ mm}$ ) zu versehen.

Zur Wellenlängenbestimmung wird die Verschiebung  $\Delta s$  der Mikrometerschraube für  $N$  vorbeiziehende Streifen gemessen. Als Markierung dient das Fadenkreuz im Fernrohrokular.

Mit dem Untersetzungsverhältnis  $u$  und der Streifenzahl  $N$  ergibt sich ( $u \cdot \Delta s = N \cdot \lambda / 2$ ):

$$\frac{u \Delta s_{\text{HeNe}}}{u \Delta s_{\text{Hg}}} = \frac{N_{\text{HeNe}} \lambda_{\text{HeNe}}}{N_{\text{Hg}} \lambda_{\text{Hg}}} \Rightarrow \lambda_{\text{Hg}} = \frac{N_{\text{HeNe}}}{N_{\text{Hg}}} \frac{\Delta s_{\text{Hg}}}{\Delta s_{\text{HeNe}}} \lambda_{\text{HeNe}} \quad (5)$$

- Bestimmen Sie die Wellenlänge der grünen Hg-Spektrallinie. Setzen Sie dazu das grüne Farbfilterglas zur Unterdrückung der gelben Hg-Linien ein und führen Sie zwei Messungen der Verschiebung  $\Delta s$  für  $N = 50$  Streifen durch.
- Führen Sie eine Messunsicherheitsabschätzung durch.

### 2.3 Versuch 3: Messung der Brechzahlen von Luft und CO<sub>2</sub>

Der Versuch wird mit HeNe-Laserlicht durchgeführt. Der Betreuer setzt die Gasküvette in das Gerät ein und justiert das Interferometer.

Evakuiert man die Gasküvette mit der Handpumpe, ändert sich die optische Weglänge in der Gaszelle und die vorher eingestellten Interferenzstreifen verschieben sich.

Die Zahl  $\Delta N$  der vorbeigewanderten Streifen ist dabei proportional zur Druckänderung  $\Delta p$  in der Zelle. Trägt man  $\Delta N$  gegen  $\Delta p$  auf, erhält man eine Gerade, aus deren Steigung ( $\Delta N / \Delta p$ ) die Brechzahl  $n$  für den Umgebungsdruck  $p$  berechnet werden kann.<sup>6</sup>

$$n = 1 + \frac{\lambda_0}{2l} \cdot N_p = 1 + \frac{\lambda_0}{2l} \cdot \left| \frac{\Delta N}{\Delta p} \right| p \quad (6)$$

$l$  = Länge der Küvette ( $l = 50$  mm)

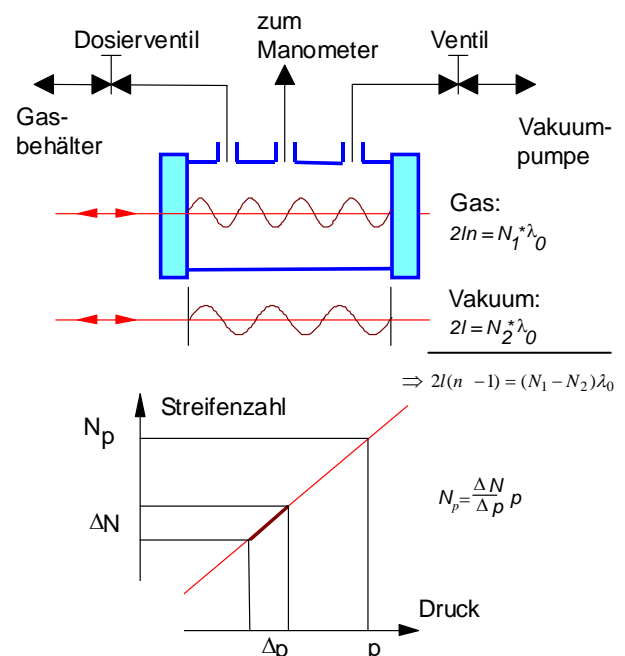


Abb. 8: Brechzahlbestimmung mit der Gasküvette

Zwischen Streifenzahl  $N$  und Änderung der optischen Weglänge  $\Delta$  besteht bei vollkommener Evakuierung der Zusammenhang (siehe Skizze):

$$\Delta = 2l(n - 1) = (N_1 - N_2) \lambda_0 = N_p \lambda_0 \quad \text{oder: } n = 1 + N_p \lambda_0 / 2l$$

<sup>6</sup> Nach obiger Skizze gilt bei gasgefüllter Küvette  $2ln = N_1 \lambda_0$  und bei evakuierter Küvette  $2l = N_2 \lambda_0$ . Für die Differenz (=opt. Wegdifferenz) ergibt sich:  $2l(n-1) = (N_1 - N_2) \lambda_0 = N_p \lambda_0$ .

Die Proportionalität der gezählten Streifen  $N_p$  und  $p$  folgt aus dem idealen Gasgesetz: Die Abweichung der Brechzahl  $n$  eines Gases von der des Vakuums ist proportional zur Anzahl der Gasteilchen und damit proportional zur Dichte  $\rho$ :  $n - 1 \propto \rho = p / (R_S T)$ . Damit ist  $p \propto N_p$  bzw.  $\Delta N / \Delta p = \text{const}$ . Die Zahl  $N_p$  der Streifendurchgänge vom Vakuum ( $p = 0$ ) bis Umgebungsdruck  $p$  lässt sich wegen des groben Vakuums nicht genau messen. Der lineare Zusammenhang von  $N_p$  und  $p$  erlaubt aber  $N_p$  zu berechnen:

$$N_p = (\Delta N / \Delta p) p \quad (\text{siehe Skizze}).$$

Setzt man  $N_p = (\Delta N / \Delta p) p$  in  $2l(n - 1) = N_p \lambda_0$  ein, folgt direkt Gleichung (6).

### Durchführung und Auswertung

- Bestimmen Sie die Brechzahl von Luft  $n_{\text{Luft}}$  mit der oben beschriebenen Methode. Lesen Sie dazu den Druck beim Evakuieren des Gases durch das Dosierventil nach jeweils 5 Streifendurchgängen ab und tragen Sie die Werte in ein Diagramm  $N(p)$  ein. Aus der Steigung wird mit Gleichung (6) die Brechzahl für den Umgebungsdruck bestimmt.  
Bestimmen Sie die Messunsicherheit für  $(n_{\text{Luft}} - 1)$ .
- Bestimmen Sie in gleicher Weise die Brechzahl von CO<sub>2</sub>. Die Küvette ist vorher gut mit CO<sub>2</sub> durchzuspülen, damit sich keine Restluft in der Küvette befindet. Der Druck und die Zahl der Streifendurchgänge wird hier ebenfalls beim Abpumpen des Gases gemessen.  
Bestimmen Sie die Messunsicherheit  $\Delta(n_{\text{CO}_2} - 1)$ .

**Achtung: Nicht am Druckreguliertventil drehen!**

**Nur Absperrhahn öffnen bzw. schließen ( $p_{\text{max}} = 0,2 \text{ bar}$ )**

- Vergleichen Sie ihre Werte mit den Literaturwerten<sup>7</sup>. Dazu sind die Messwerte von  $n$  erst auf Literaturbedingungen umzurechnen. Es gilt (siehe Fußnote):

$$\frac{(n-1)T}{p} = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \frac{n-1}{n_0-1} = \frac{p}{R_S T} \cdot \frac{R_S T_0}{p_0} = \frac{p}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T}$$

## 2.4 Versuch 4: Das Michelson-Interferometer als Fourierspektrometer

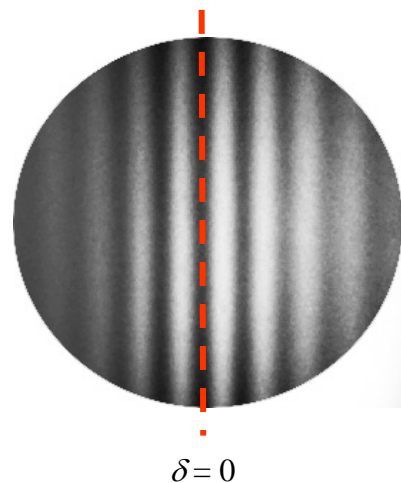
### Justierung auf Gangunterschied Null

Das Interferometer ist erst mit der HeNe-Laserlichtquelle möglichst genau auf Gangunterschied Null zu justieren (vertikale und exakt parallele Interferenzstreifen).

- Verwenden Sie nun divergentes Licht der Hg-Lampe (mit Mattscheibe) und justieren Sie bei direkter Beobachtung (ohne Fernrohr) den Spiegel S2 so, dass etwa 10 - 15 vertikale Streifen im Gesichtsfeld auftreten.

**Vorsicht! Nicht direkt in die Hg-Lampe schauen (UV-Licht!).**

- Schalten Sie nun an Stelle der Hg-Lampe die Glühlampe (mit Mattscheibe) ein. Die Suche ist einfacher, wenn man zunächst ein schmalbandiges Interferenzfilter ( $\lambda = 546 \text{ nm}$ ) einsetzt und erst damit die Interferenzstreifen sucht. Drehen Sie dazu langsam (max. eine Umdrehung vor und zurück) an der Mikrometerschraube bis die Interferenzstreifen erscheinen.
- Tauschen Sie das Interferenzfilter nun gegen das grüne Farbfilter aus und suchen Sie erneut die Interferenzstreifen.
- Zum Schluss entfernen Sie das Farbfilter. Die Interferenzstreifen sollten jetzt sichtbar sein. Positionieren Sie die Streifen so, dass der intensivste dunkle (bzw. helle) Streifen in der Gesichtsfeldmitte ist.



$\delta = 0$

Das Interferometer ist damit auf Gangunterschied Null eingestellt.

<sup>7</sup> Literaturwerte für die Brechzahlen von Gasen (15 °C; 1013 hPa):

Luft:  $n = 1,00029$  Kohlendioxid:  $n = 1,00045$  Argon:  $n = 1,000036$

### Durchführung und Auswertung (ohne Rechnerunterstützung)

Das Interferogramm kann mit Hilfe einer USB-CMOS-Kamera auf dem PC-Monitor dargestellt werden. Dazu ist das Programm "IC Capture 2.2" zu starten.

- Messung der **Bandbreite und der Kohärenzlänge von Glühlampenlicht** mittels **Weißlichtinterferenz** (alternativ kann auch eine LED-Lichtquelle verwendet werden). Bestimmen Sie dazu die Anzahl  $N$  der sichtbaren Interferenzstreifen, für die ihrer Einschätzung nach der Kontrast besser 0,5 ist.. Die Breite des Streifenkontrastes  $V$  ist dann nach dem Beispiel in Abschnitt 1.4.3 :  $\Delta x = N \cdot \lambda_0$   
Berechnen Sie mit der in 1.4.3 angegebenen Formel die spektrale Breite  $\Delta\lambda$  und die Kohärenzlänge  $t_{\text{Koh}}$  für das Modell eines gaußförmigen weißen Spektrums.  
Wählen Sie für die Schwerpunktswellenlänge  $\lambda_0$  des sichtbaren Glühlampenlichts einen geeigneten Wert!  
Hinweise: Verwenden Sie zur Beobachtung unbedingt die SW-USB-Kamera. Eine Abschätzung des Kontrastes mit dem Auge ist kritisch, da der Sinneseindruck "Helligkeit" des Auges nicht linear, sondern logarithmisch mit der Intensität ansteigt. Außerdem täuscht die Farbwahrnehmung mehr Streifen vor, als tatsächlich (intensitätsmäßig) vorhanden sind.

- Messung der **Bandbreite und der Kohärenzlänge für gefiltertes Glühlampenlicht:**

Setzen Sie vor die Glühlampe

a) ein grünes Farbfilter ( $\lambda_0 \cong 540$  nm)

b) ein grünes Interferenzfilter ( $\lambda_0 = 546$  nm)

Die spektrale Breite und die Kohärenzlänge sind aus der jeweiligen Breite des Streifenkontrasts (Interferogramm) zu ermitteln.

Bei a) zählt man dazu die Streifen auf dem Monitorbild ab.

Bei b) ist die Zahl der vorbeiwandernden Streifen sehr groß. Man benutzt daher besser die Mikrometerverschiebung  $\Delta s$  für die Bestimmung der Breite des Kontrasts.

Nehmen Sie für die Rechnungen gaußförmige Filtertransmissionskurven an.

- Messung der **Wellenlängendifferenz des Hg-Duplets:**

Die gelbe Hg-Linie bei  $\lambda = 578$  nm besteht aus zwei eng benachbarten Linien.

Den beiden Wellenlängen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sind nach 1.4.3 zwei Streifensysteme zugeordnet, die sich überlagern. Verschiebt man den Spiegel von einer ausgezeichneten Stellung, bei der das Interferenzbild verschwindet (Maximum des einen fällt auf Minimum des anderen Streifensystem), zur nächsten ausgezeichneten Stellung, bei der das Interferenzbild verschwindet, so sind  $m$  Streifen vom  $\lambda_1$ -System und  $(m + 1)$  Streifen vom  $\lambda_2$ -System vorbeigelaufen. Nach Abb. 6 gilt:

$$m\lambda_1 = (m+1)\lambda_2 \quad \text{und} \quad u\Delta s = m \frac{\lambda_1}{2} \quad (\Delta s \text{ ist die Mikrometerverschiebung})$$

Eliminiert man die (nur schwer zählbare) Streifenzahl  $m$  ergibt sich für die Wellenlängendifferenz:

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{\lambda_2}{m} = \frac{\lambda_2 \lambda_1}{u\Delta s \cdot 2} \cong \frac{\lambda^2}{2 \cdot u\Delta s}$$

Setzen Sie zur Messung das gelbe Interferenzfilter vor die Hg-Lampe und berechnen Sie aus der Mikrometerverschiebung  $\Delta s$  die Wellenlängendifferenz  $\Delta\lambda$ .


## Durchführung und Auswertung (mit Rechnerunterstützung)

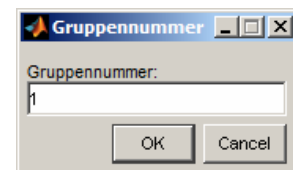
Die Interferogramme zur Bestimmung von Bandbreite und Kohärenzlänge können auch mit Hilfe des MatLab-Programms **MIFAnalyse** ausgewertet werden.

Hinweis: Das Streifensystem ist bei Beobachtung mit einer Color-USB-Kamera sehr eindrucksvoll. **Für Messzwecke sollte aber die SW-Kamera verwendet werden**, da die Kamerasoftware die Umrechnung der Farbwerte in SW-Werte (Intensitätswerte) nicht exakt durchführt. Weiter müsste für genaue Messungen das gemessene Spektrum mit der spektralen Empfindlichkeit des Kamerachips geeicht werden.

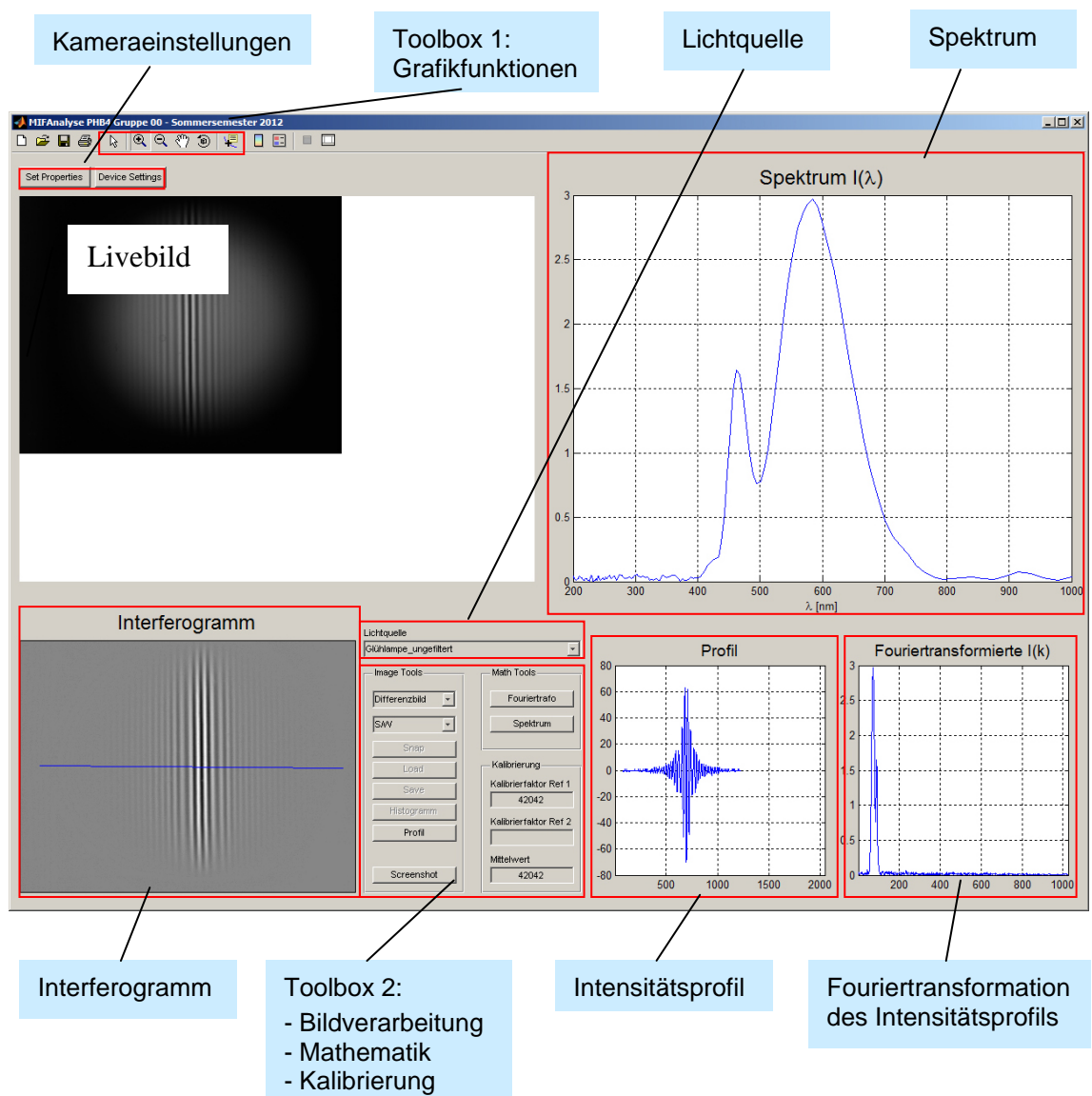
## Programmbedienung

(Kurzform - eine ausführliche Beschreibung liegt am Praktikumsplatz aus)

- Starten Sie das Programm durch Doppelklick auf das Desktop-Symbol  "MIFAnalyse". ("IC Capture 2.2" muss vorher geschlossen werden.)
- Geben Sie dann im Start-Dialog die Nummer ihrer Praktikumsgruppe ein.  
Aus dieser Nummer wird später das Ablageverzeichnis für ihre Messungen generiert.

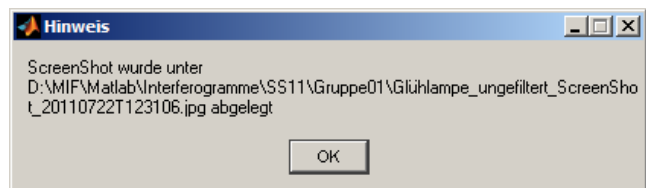


## Übersicht über die Grundfunktionen

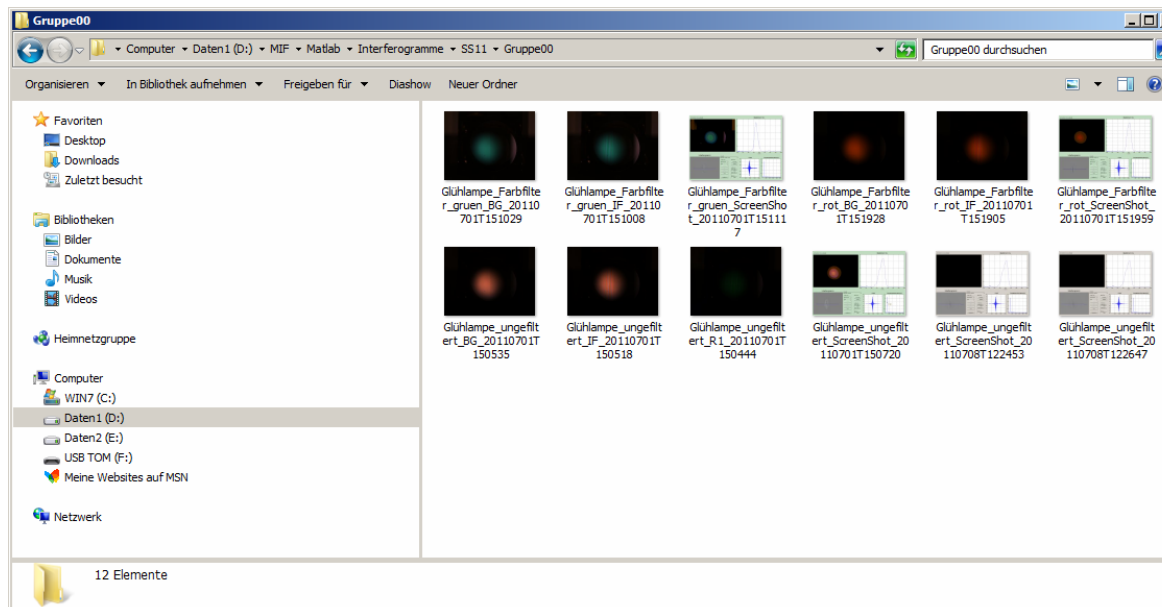


## Typische Vorgehensweise zur Aufnahme des Interferogramms und Bestimmung des Spektrums einer Lichtquelle

- (1) Livebild einstellen, Kamera justieren (Scharfstellen auf Hilfsobjekt vor dem Spiegel)
- (2) evtl. Kameraeinstellungen optimieren (Gain und Belichtungszeit)
- (3) Lichtquelle auswählen
- (4) Interferogramm von Livebild übernehmen („Snap“ in Image Tools, Toolbox 2)
- (5) S/W-Darstellung auswählen (Image Tools, Toolbox 2)
- (6) Intensitäts-Histogramm erstellen („Profil“ in Image Tools, Toolbox 2)
- (7) Interferometer von Weißlichtposition weg justieren, auf "Untergrund" wechseln (Image Tools, Toolbox 2) und Interferogramm aufnehmen
- (8) Auf "Differenzbild" (Image Tools, Toolbox 2) wechseln und Profil erstellen
- (9) Hg-Lampe mit grünem Interferenzfilter aufnehmen
- (10) Fouriertransformierte berechnen (Math Tools, Toolbox 2)
- (11) Fouriertransformierte vergrößern und Peaklage ermitteln (dazu Grafiktools aus Toolbox 1 benutzen)
- (12) Peaklage bei Kalibrierung Ref 1 eintragen (Kalibrierung, Toolbox 2 - Peaklage \*  $\lambda$ )
- (13) Differenzbild einstellen (Image Tools, Toolbox 2)
- (14) Fouriertransformierte berechnen (Math Tools, Toolbox 2)
- (15) Spektrum berechnen (Math Tools, Toolbox 2)
- (16) Screenshot erstellen (Image Tools, Toolbox 2)



- (17) Ablage Interferogramme und Screenshots über Dateidialog durchführen



Schritt 7 (Untergrundbestimmung) sowie die Schritte 9-12 (Kalibrierung für die Umrechnung von Pixel in Wellenlänge) müssen wiederholt werden, sobald die Spiegeljustierung in irgendeiner Weise verändert wurde.



### 3 Testfragen

- 1) Was versteht man unter dem Begriff *Kohärenz* und *Kohärenzlänge*?
- 2) In welchen Größenordnungen liegen die Kohärenzlängen von verschiedenen Lichtquellen (z.B. Weißlicht, Licht von Gasentladungslampen, Laserlicht)?
- 3) Welcher Zusammenhang besteht zwischen *Kohärenzlänge* und *spektraler Bandbreite*?
- 4) Skizzieren Sie den Aufbau des Michelson-Interferometers.
- 5) Wieso darf beim Michelson-Interferometer eine ausgedehnte Lichtquelle verwendet werden?
- 6) Wann ist der Streifen nullter Ordnung (optischer Wegunterschied = Null) dunkel (destruktive Interferenz) und wann hell (konstruktive Interferenz)?
- 7) Welcher mathematische Zusammenhang besteht zwischen dem Interferogramm und der spektralen Intensität ?
- 8) Mit welcher Methode lassen sich mit weißem Licht Interferenzversuche machen? Welche Aufgabe hat dabei die Kompensatorplatte?
- 9) Erklären sie den Zusammenhang der Bewegungsrichtung des beweglichen Spiegels beim Michelson-Interferometer mit dem Quellen bzw. Verschwinden der Interferenzringe im Zentrum des Interferenzmusters.
- 10) Was geschieht, wenn sich die optische Weglänge in einem Interferometerarm ändert?
- 11) Erklären Sie die Methode der interferometrischen Brechzahlbestimmung eines Gases.