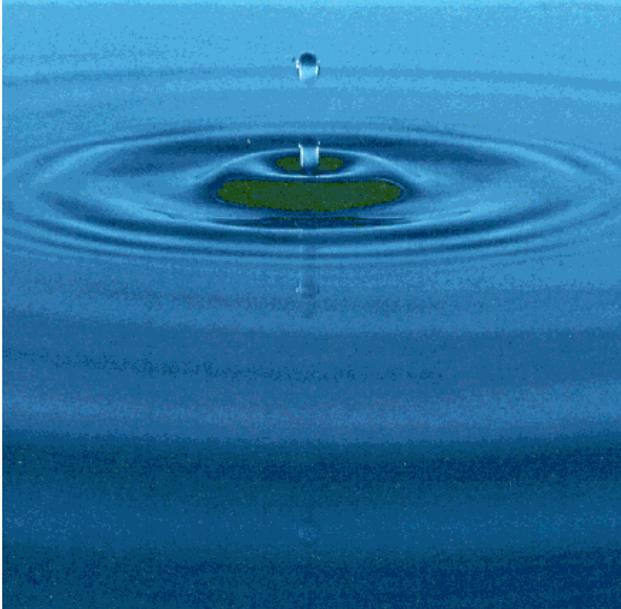


WAVELETS:

Ein neues Werkzeug in der digitalen Signal- und Bildanalyse



I. Motivation

Fourier-Transformation,
Kurzzeit-Fourier-Transformation

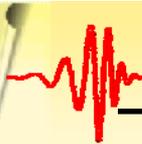
II. Wavelet-Transformation

Kontinuierliche
Wavelet-Transformation

III. Diskrete Wavelet-Transformation

Multiskalen-Analyse
Schnelle Wavelet-Transformation

IV. Beispiele



Wavelets

Anwendungsgebiete

Wavelet Applications

Time aspects

Rupture and edges detection

Study of short-time phenomena as transient processes

- Industrial supervision of gear-wheel
- Checking undue noises in craned or dented wheels, and more generally in non destructive control quality processes
- Detection of short pathological events as epileptic crises or normal ones as evoked potentials in EEG (medicine)
- SAR imagery
- Automatic target recognition

Wavelet Applications

Frequency aspects

- Biology for cell membrane recognition, to distinguish the normal from the pathological membranes
- Metallurgy for the characterization of rough surfaces
- Finance (which is more surprising), for detecting the properties of quick variation of values
- In Internet traffic description, for designing the services size

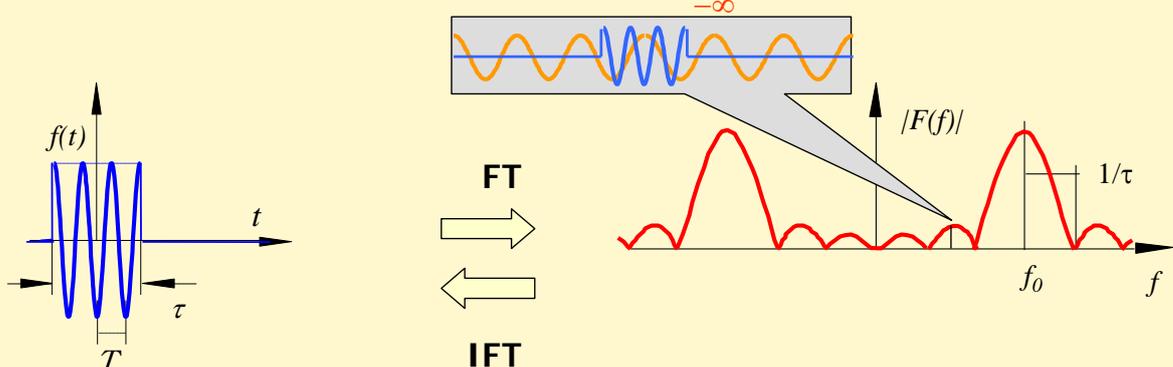
I. Fourier-Transformation FT

Mathematische Form der FT

Fourier-Analyse

Fourier-Transformation: FT: $\hat{F}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad f \in L^2(\mathbb{R})$

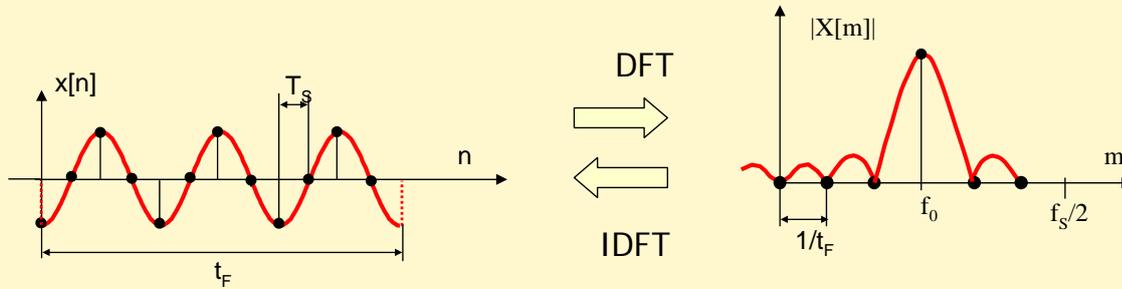
Inverse Fourier-Transformation: IFT: $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}(f)e^{j2\pi ft} df$



Diskrete Fourier-Transformation von zeitbegrenzten Abtastsignalen

$$\text{DFT: } X[m] = T_S \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{nm}{N}}$$

$$\text{IDFT: } x[n] = \sum_{m=0}^{N-1} X[m] e^{j2\pi \frac{nm}{N}}$$



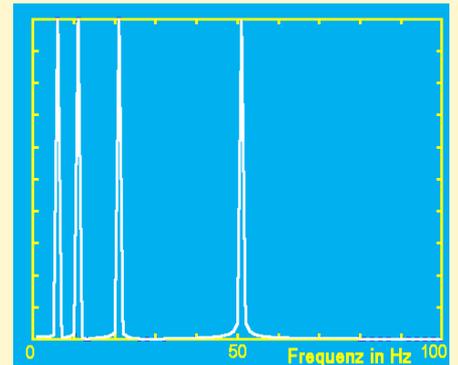
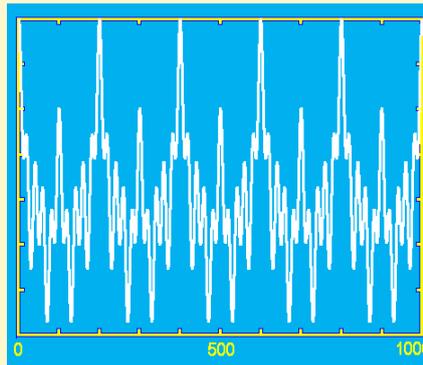
- ▶ Shannontheorem:
Exakte Rekonstruktion für: Bandbreite $< f_s/2$ ($f_s =$ Abtastfrequenz)
- ▶ Spektrum diskret und periodisch fortgesetzt: Periode f_s

Beispiele

stationäres Signal

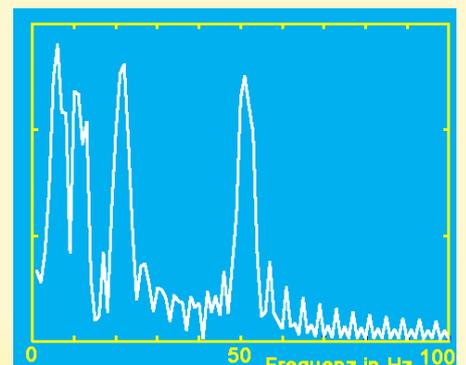
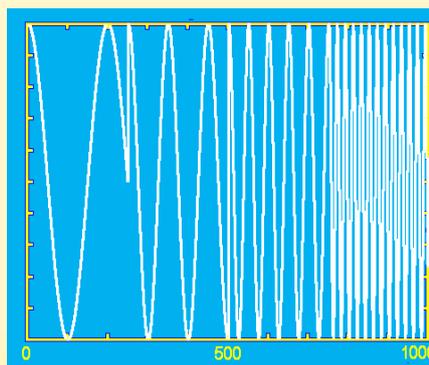
(Frequenzen treten gleichzeitig auf, ändern sich nicht)

$$x(t) = \cos(2\pi 5t) + \cos(2\pi 10t) + \cos(2\pi 20t) + \cos(2\pi 50t)$$



nichtstationäres Signal

(Frequenzen - wie oben - treten zu verschiedenen Zeiten auf)



Eigenschaften / Probleme der FT:

► Globale Analyse

- Basisfunktionen unendlich ausgedehnt

► liefert Informationen, welche Frequenzkomponenten im Signal vorkommen - nicht mehr und nicht weniger

- keine direkte Information über Zeit/Ort der Frequenzen
- wenig geeignet für nichtstationäre Signale (z.B. Chirp)
- schlechte Konvergenz für un stetige Signale (z.B. Sprünge, Nullsegmente)

(nichtstationär: Frequenzinhalt ändert sich mit der Zeit)

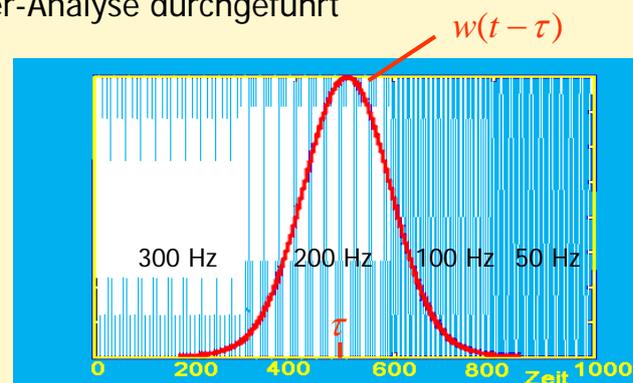
Ausweg: Analysefenster $w(t)$ wird schrittweise über das Signal bewegt
In jedem Fenster wird eine Fourier-Analyse durchgeführt

- gefensterter Signalabschnitt, lokalisiert bei τ

$$x(t, \tau) = x(t)w(t - \tau)$$

$$\hat{X}_{STFT}(f, \tau) = \int x(t)w(t - \tau)e^{-j2\pi ft} dt$$

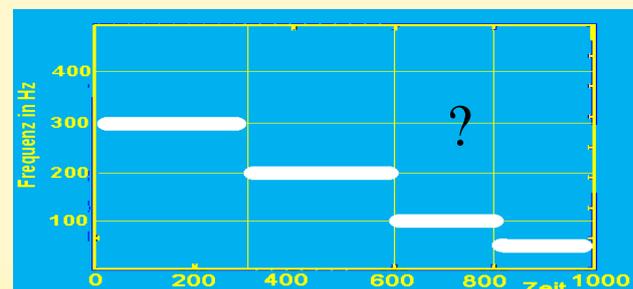
Gabor-Transformation: $w(t) = e^{-\frac{t^2}{(\Delta t)^2}}$



Darstellung: **Spektrogramm**

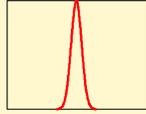
- es existiert Umkehrtransformation

$$x(t) = \int \hat{X}_{STFT}(f, \tau)w(t - \tau)e^{j2\pi ft} df d\tau$$

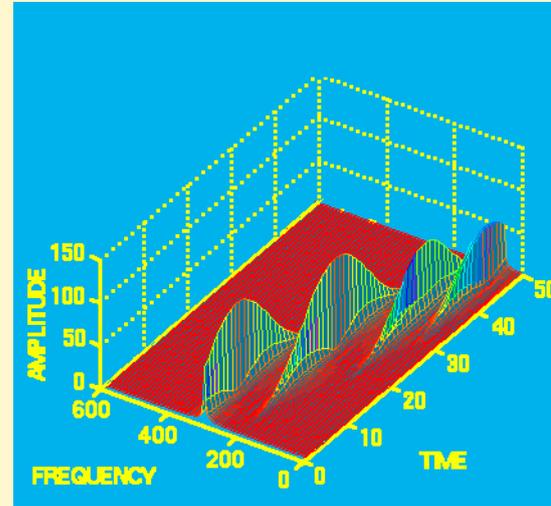
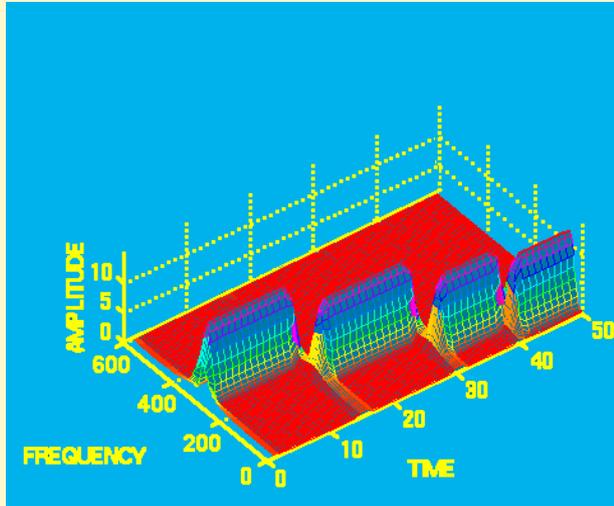
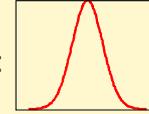


Bedeutung der Fensterbreite $\Delta\tau$

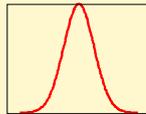
schmales Fenster:



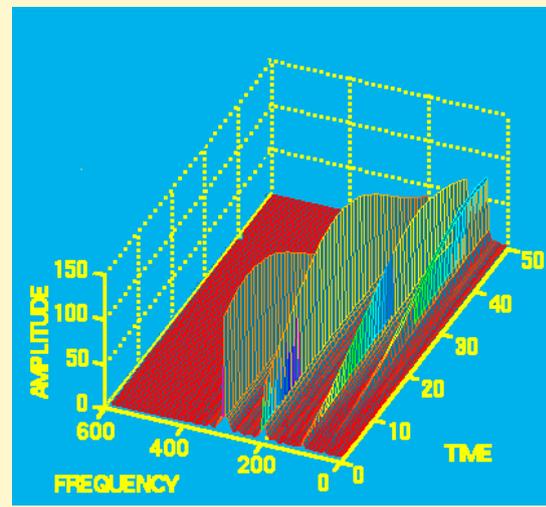
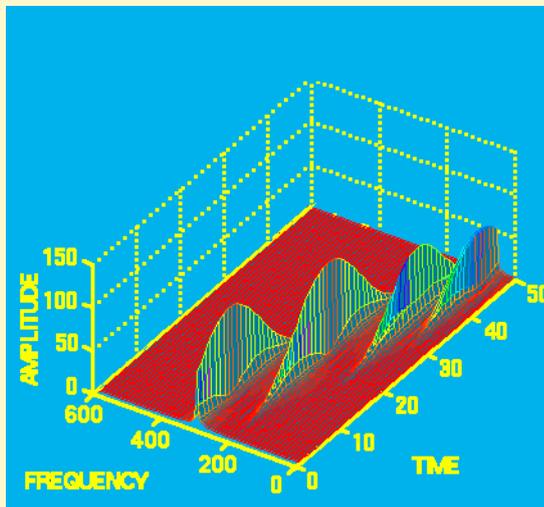
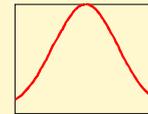
breites Fenster:

**Bedeutung der Fensterbreite $\Delta\tau$**

breites Fenster:



sehr breites Fenster:

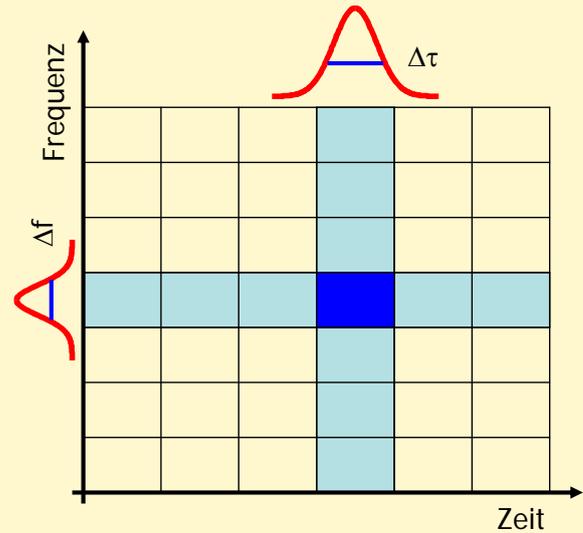


Probleme:

- ▶ schmales Fenster: gute Zeitauflösung
schlechte Frequenzauflösung
- ▶ breites Fenster: gute Frequenzauflösung
schlechte Zeitauflösung

Ursache: **Unschärferelation** $\Delta\tau \cdot \Delta f \approx 1$

- ▶ Breite $\Delta\tau$ der Fensterfunktion legt Rastergröße und damit Δf fest.
- ▶ Jede Frequenzkomponente wird mit der gleichen Auflösung bestimmt.



STFT: Zeit- Frequenzebene gleichmäßig gerastert

STFT: Lokale Analyse mit fester Frequenzauflösung

Ziel: Lokale Analyse mit variabler Frequenzauflösung

Lösung: Wavelet-Analyse

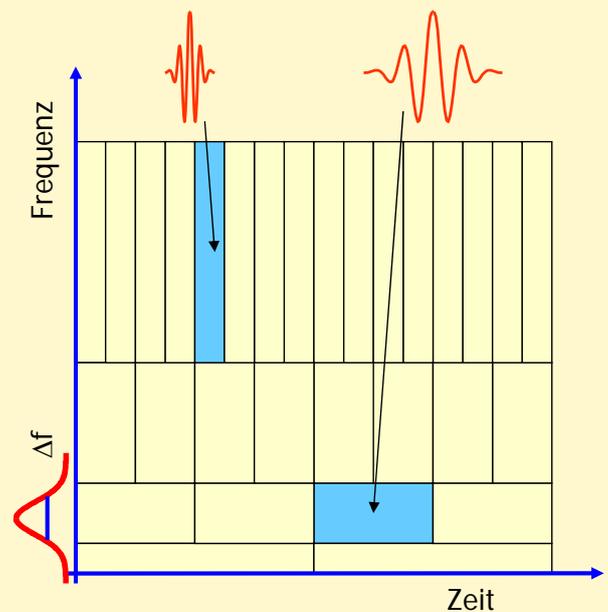
- ▶ die Fensterfunktion enthält die Frequenzinformation
- ▶ **modulierte Fensterfunktion = Wavelet**
- ▶ es ist keine FT auf dem Fenster durchzuführen
- ▶ Anpassung des Zeitfensters während der Analyse

hohe Frequenzen:

 schmales Fenster
niedrige Frequenzauflösung

niedrige Frequenzen:

 breites Fenster
hohe Frequenzauflösung



Zeit-Frequenzebene mit konstanter relativer Frequenzauflösung

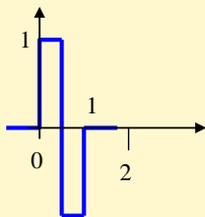
Eigenschaften von Wavelets - wie sehen Wavelets aus ?

- ▶ Ein Wavelet lässt sich dehnen oder stauchen (**Skalierung**)
Damit können verschiedene Frequenzen erfasst werden
 - ▶ Ein Wavelet lässt sich zeitlich verschieben (**Translation**)
Liefert damit Aufschluss, wann die jeweilige Frequenz auftritt
- } Grundbausteine der Wavelet-Zerlegung (Basisfunktionen)

Beispiel: Haar-Wavelet (Haar 1910)

Haar-Motherwavelet

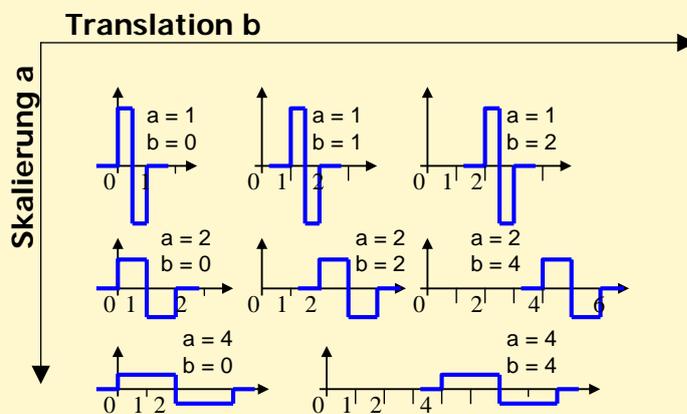
$$\Psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq t < 0,5 \\ -1 & \text{falls } 0,5 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Haar-Waveletfamilie (Analyse-Wavelets)

$$\Psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

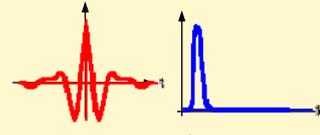
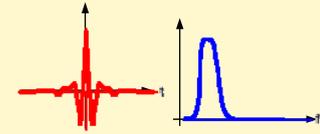
$$a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}$$



b verschiebt das Wavelet auf der t -Achse
 $a > 1$ dehnt es und verkleinert dessen Amplitude

Weitere Eigenschaften:

- ▶ $\Psi(\omega = 0) = 0 \Rightarrow$ kein Gleichanteil
- ▶ $\Psi(t)$ ist eine oszillierende Funktion
- ▶ $\int \Psi(t) dt = 0$ (\Rightarrow nulltes Moment gleich Null)
- ▶ $\Psi(t)$ ist auf ein begrenztes Intervall lokalisiert und fällt nach außen stark ab (kompakter Träger - engl. support)
- ▶ $\Psi(\omega)$ ist ebenfalls lokalisiert (kompakter Frequenzsupport)



Zeit-/Ortsraum Frequenzraum

Zulässigkeitsbedingung

$$C_\Psi = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$$

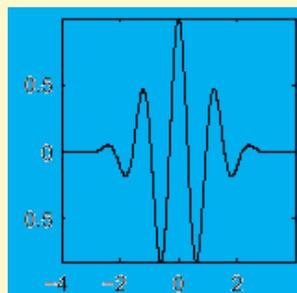
$\hat{\Psi}(\omega)$ = Fouriertransformierte von $\Psi(t)$

Liegt die Zulässigkeitsbedingung vor, bilden die $\Psi_{a,b}$ eine Wavelet-Basis

$$\Psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}^+; b \in \mathbb{R}$$

Morlet Wavelet (modulierte Gaußfunktion)

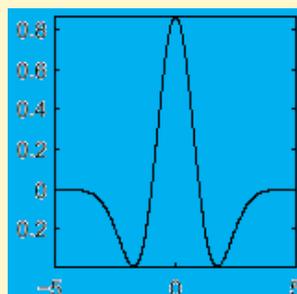
$$\Psi(t) = e^{j2\pi ft} \cdot e^{-\frac{t^2}{T}}$$



Realteil

Mexican Hat Wavelet

$$\Psi(t) = (1-t^2) \cdot e^{-\frac{t^2}{T}}$$



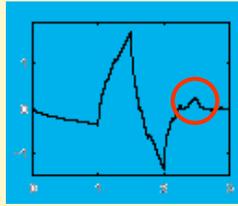
II. Wavelet-Transformation

Gebräuchliche Waveletfamilien (orthogonal)

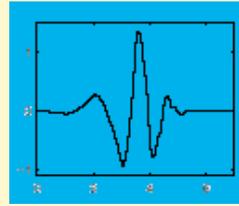
Daubeschies $daub(p)$

nach Ingrid Daubeschies
(belg. Mathematikerin)

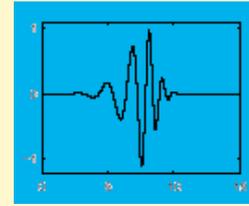
$2p$ Filterlänge
 $(p-1)$ Momente = 0



daub2



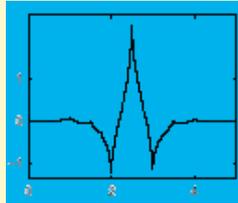
daub4



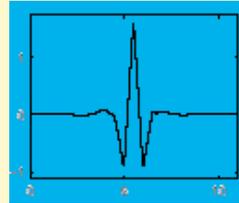
daub8

Coiflets $coif(p)$

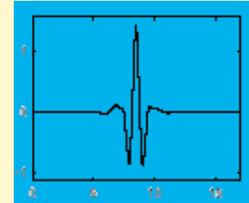
$2p$ Supportlänge
 $(p-1)$ Momente = 0



coif1



coif2



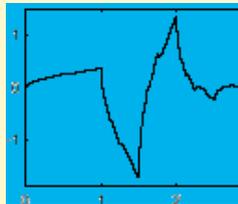
coif3

Symmlets $Sym(p)$

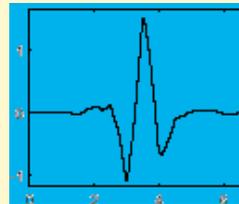
annähernd symmetrisch
 $2p$ Supportlänge

$(p-1)$ Momente = 0

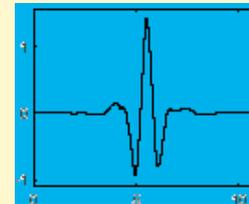
$(p = \text{Approximationsordnung})$



sym2



sym4



sym6

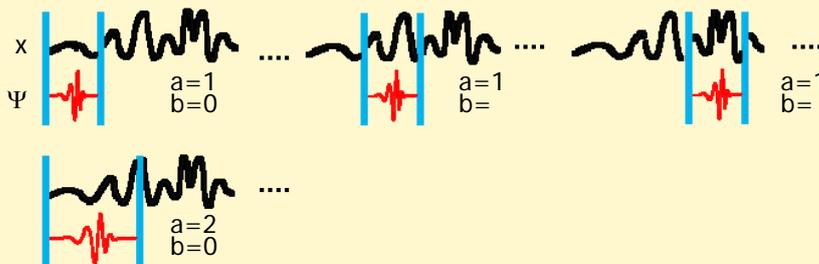
II. Wavelet-Transformation

Kontinuierliche Wavelet-Transformation CWT

Berechnung der CWT:
$$L_{\Psi}x = W_{\Psi}(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt$$

Bedeutung:

- ▶ $e^{-j2\pi ft}$ fällt weg; Frequenzinformation steckt in $\Psi(t)$
- ▶ $x(t)$ wird mit verschobenen (b) und skalierten (a) Versionen von $\Psi(t)$ abgetastet; ($x(t)$ wird auf $\Psi_{a,b}(t)$ projiziert = math. Skalarprodukt)



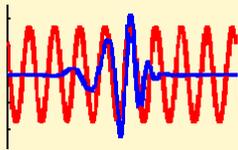
Signal x und darüber gelegtes Wavelet Ψ

- ▶ Der Wavelet-Koeffizient $W_{\Psi}(a,b)$ gibt an, wie stark $x(t)$ mit $\Psi_{a,b}(t)$ übereinstimmt

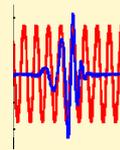
Skale und Frequenz

- dem Wavelet $\Psi_{a,b}(t)$ mit der Skale a läßt sich die lokale Frequenz $f = f_0/a$ zuordnen; f_0 ist die (Schwerpunkt)-Frequenz des Motherwavelets ($a = 1$)

Skale: große Skalierung - a groß
bedeutet geringe Frequenz



kleine Skalierung - a klein
bedeutet hohe Frequenz

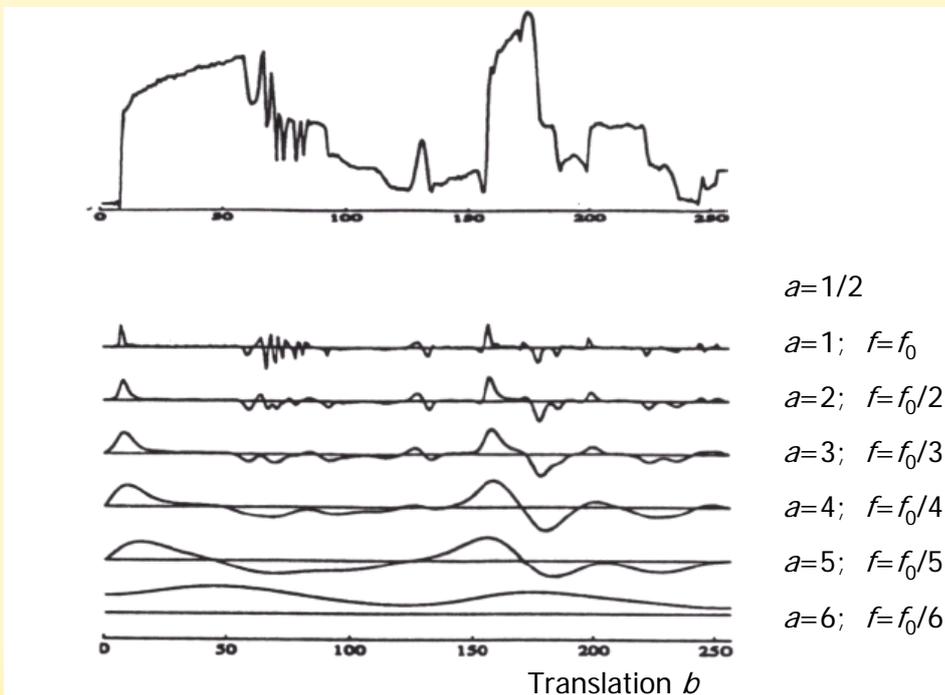


Skale entspricht etwa dem Begriff Maßstab auf Landkarten

- der Faktor $1/\sqrt{a}$ dient zur Normierung - jedes Wavelet $\Psi_{a,b}(t)$ besitzt gleiche Energie; $|W_\psi(a,b)|^2$ liefert damit ein Energiedichtespektrum

Beispiel für eine CWT

(Zeit-Frequenz-Analyse)



Signal

$$a=1/2$$

$$a=1; f=f_0$$

$$a=2; f=f_0/2$$

$$a=3; f=f_0/3$$

$$a=4; f=f_0/4$$

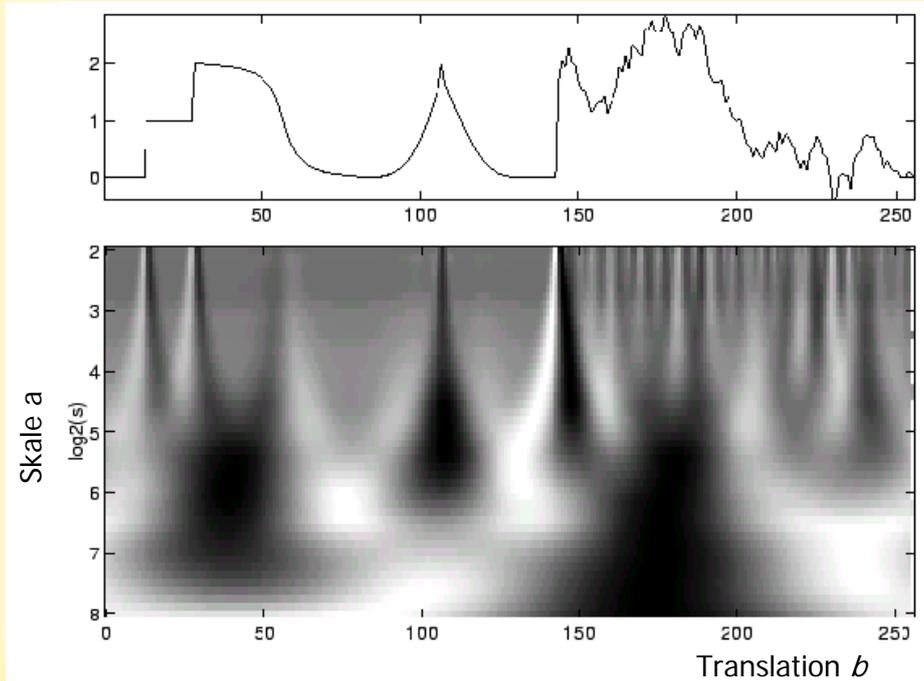
$$a=5; f=f_0/5$$

$$a=6; f=f_0/6$$

Wavelet-Koeffizienten
 $W_\psi(a,b)$

Beispiel für eine CWT

(Zeit-Frequenz-Analyse)



Signal

Wavelet-Koeffizienten
 $W_\Psi(a,b)$

schwarz = negative Koeff.
weiß = positive Koeff.

Umkehrung der Wavelet-Transformation

Inverse CWT:
$$x(t) = C_\Psi \int_{-\infty}^{+\infty} W_\Psi(a,b) \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) da db$$

Bedeutung:

- ▶ $W(a,b)$ stellt den Beitrag von $\Psi_{a,b}(t)$ an der "Stelle" (a,b) dar. Über alle Beiträge wird aufsummiert
- ▶ Für den kontinuierlichen Fall ist die Umkehrung exakt.

Nachteile der CWT bzw. ICWT

- ▶ sehr rechenintensiv
- ▶ hohes Maß an Redundanz, da Wavelets überlappen
- ▶ in der Praxis Diskretisierung notwendig (Abtastsignale)

Frage: Wie müssen Wavelets aussehen, die eine diskrete, redundanzfreie (und orthogonale) WT mit perfekter Rekonstruktion möglich machen?

Überblick - Grundidee (1):

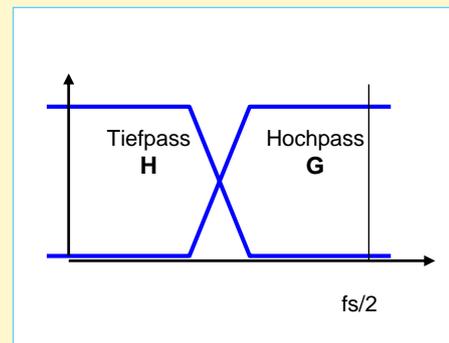
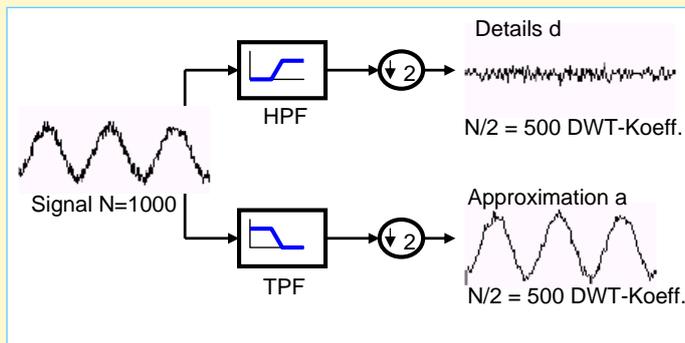
Stephane Mallat und **Yves Meyer** entwickeln 1988 einen Algorithmus zur Berechnung, auf der Basis eines digitalen Hoch- und Tiefpassfilterpaares. In der Folgezeit erfährt die Wavelet-Analyse eine rasante Entwicklung.

- ▶ Das Verfahren entspricht dem in der digitalen Signalverarbeitung bekannten "Subband Coding" mit "Quadratur Mirror Filters". (Croiser, Esteban 1976)

- ▶ Grundidee:

Das Signal wird in eine **grobe ungenaue Darstellung (Tiefpass)** und in eine Darstellung mit den **genauen Details (Hochpass)** zerlegt. Geeignete Hoch- und Tiefpassfilter halbieren dazu den Frequenzbereich, ohne Information zu verlieren.

Berechnungsschema: Subband Coding



Downsampling ($\downarrow 2$):
Bandbreite halbiert \Rightarrow jeder 2. Wert gestrichen

Quadratur-Mirror Filter
(Halbbandfilter)

Vergleich: Frequenzweiche für Hoch- und Tieftöner
in einer HiFi-Lautsprecherbox

Tiefpassanteil enthält die wesentliche Information!

Überblick - Grundidee (2):

Mallat und **Meyer** zeigen dabei folgenden Zusammenhang:

- Die fortgesetzte (rekursive) digitale Filterung des Tiefpass-Anteils erzeugt Koeffizientensätze, die einer Waveletzerlegung entsprechen.
(Wavelet-Transformation ohne Wavelets)

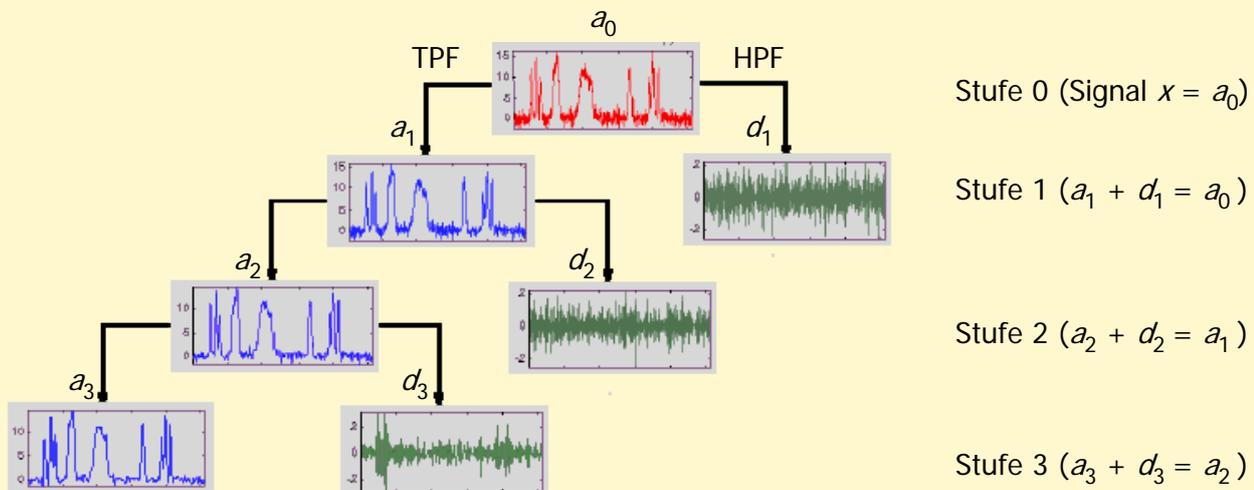
genauer:

- Die "Koeffizienten" des hochpassgefilterten Signals (Details d) sind identisch mit den Koeffizienten einer Wavelet-Zerlegung.
(Das **Wavelet** ψ selbst ist dabei die Zeitfunktion (=Impulsantwort) des Hochpassfilters.)
- Die "Koeffizienten" des tiefpassgefilterten Signals (Approximation a) sind identisch mit den Koeffizienten einer Zerlegung nach verschobenen Versionen der sog. Skalierungsfunktionen ϕ .
Die **Skalierungsfunktion** ϕ ist dabei die Zeitfunktion (=Impulsantwort) des Tiefpassfilters.
- Rechenaufwand: $O[N]$ zum Vergleich: DFT $O[N^2]$; FFT $O[N \log N]$

Waveletzerlegung - Multiskalen-Analyse

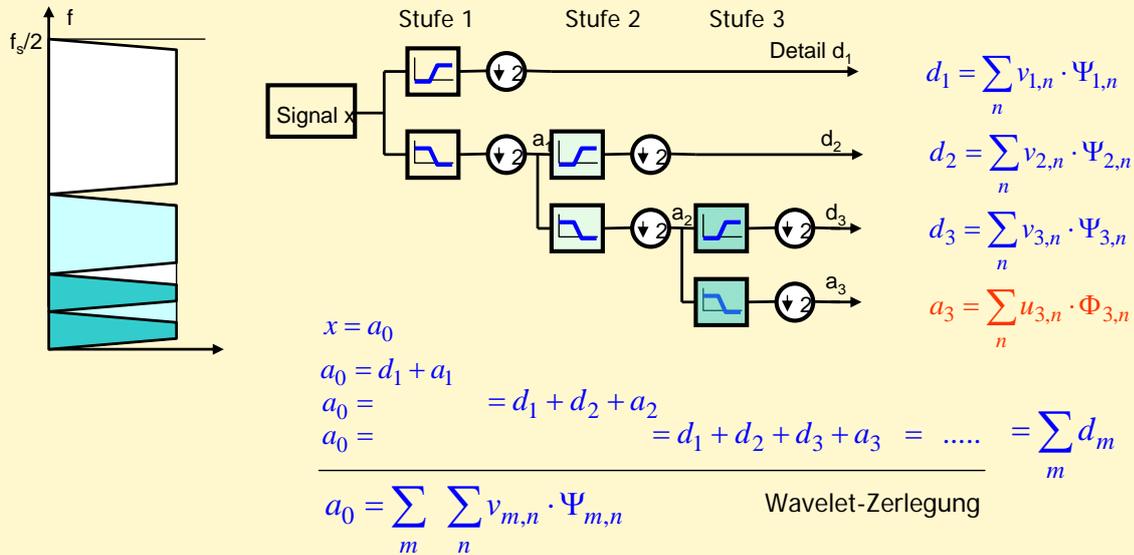
MatLab: noisebump.mat

Hierarchische Zerlegung in Approximationen a_m und Details d_m



Wavelet-Zerlegung = rekursive Anwendung der Filterbank

Iterative Hoch- und Tiefpassfilterung mit immer weiter abnehmender Auflösung bis die Signallänge gleich der Filterlänge ist



Letztlich zerlegt die DWT das Signal in eine gewisse Anzahl immer kleiner werdender Hochpassanteile (Oktavbänder) und einen einzigen Tiefpassanteil.

Darstellung der Zerlegung mit diskreten, orthogonalen Wavelets (1)

Dyadische Wavelets $\Psi_{m,n}(t)$

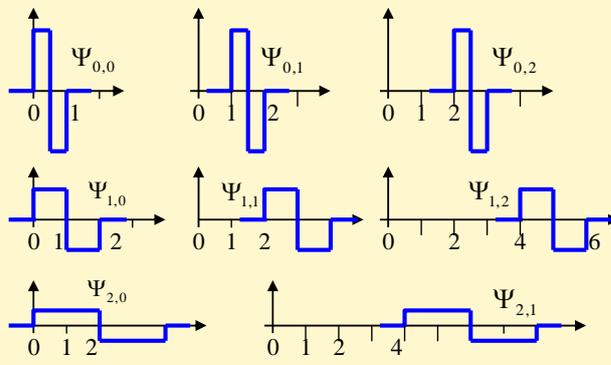
Beispiel: die dyadischen Haar-Funktionen $\Psi_{m,n}(t)$; $\Phi_{m,n}(t)$

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$$a = 2^m \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$b = n2^m \quad n \in \mathbb{Z}$$

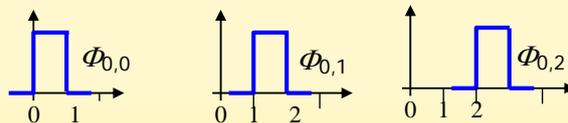
$$\Psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \Psi(2^{-m}t - n)$$



$$d_1 = \sum_n v_{1,n} \cdot \Psi_{1,n}$$

$$d_2 = \sum_n v_{2,n} \cdot \Psi_{2,n}$$

Skalierungsfunktion $\Phi_{m,n}(t)$



Ein Wavelet der Skale 1 lässt sich offenbar mit Skalierungsfunktionen der Skale 0 darstellen.

Darstellung der Zerlegung mit diskreten, orthogonalen Wavelets (2)

Doppelintegral \Rightarrow Doppelsumme $\Psi_{m,n}(t)$

$$x(t) = \sum_m \sum_n v_{m,n} \cdot \Psi_{m,n}$$

mit den Koeffizienten

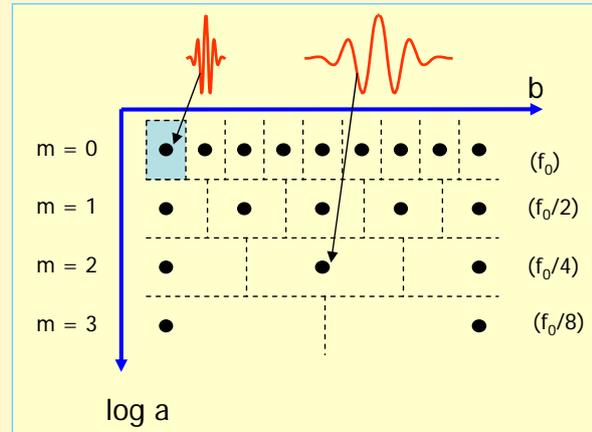
$$v_{m,n} = \langle \Psi_{m,n} | x \rangle$$

$$v_{m,n} = \int (\Psi_{m,n} \cdot x) dt$$

Orthonormale Wavelet-Basis $\Psi_{m,n}(t)$
von $L^2(\mathbb{R})$ ohne Redundanz

$$\int \Psi_{m,n}(t) \cdot \Psi_{m',n'}^*(t) dt = \delta_{mm',nn'}$$

$$\langle \Psi_{m,n} | \Psi_{m',n'} \rangle = \delta_{mm',nn'}$$



dyadisches Abtastmuster in der a,b - Ebene

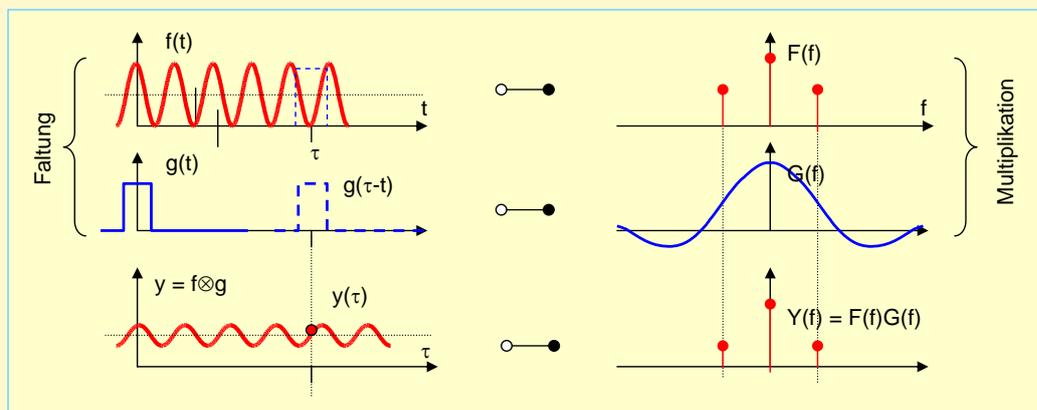
- ▶ jeder Punkt (Block) repräsentiert ein einzelnes, (translatiertes + dilatiertes) Wavelet
- ▶ der Wert des Punktes gibt an, wie stark das Wavelet das Signal beeinflusst = Wavelet-Koeffizient

Berechnung der Waveletkoeffizienten $v_{m,n}$ und $u_{m,n}$

1. Wie funktioniert ein Filter im Zeit- und Frequenzbereich

Faltung: $y(\tau) = f(\tau) \otimes g(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(\tau-t) dt$

Faltungssatz: $\hat{Y}(f) = \hat{F}(f) \cdot \hat{G}(f)$



Filterung = Faltung mit der Zeitfunktion (=Impulsantwort) des Filters

2. Digitale Filter als lokale Operatoren (FIR-Filter)

- ▶ Ein digitales Filter transformiert einen Signalwert $f_0[n]$ und Umgebungswerte $f_0[n-1], f_0[n-2] \dots$ in einen neuen gefilterten Signalwert $f_1[n]$.
- ▶ Das Berechnungsschema ist eine diskrete Faltung mit einer Filtermaske $H = [h_0, h_1, h_2, \dots]$

$$f_1[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] \cdot f_0[n-k]$$

Beispiel: Haar-Tiefpassfilter

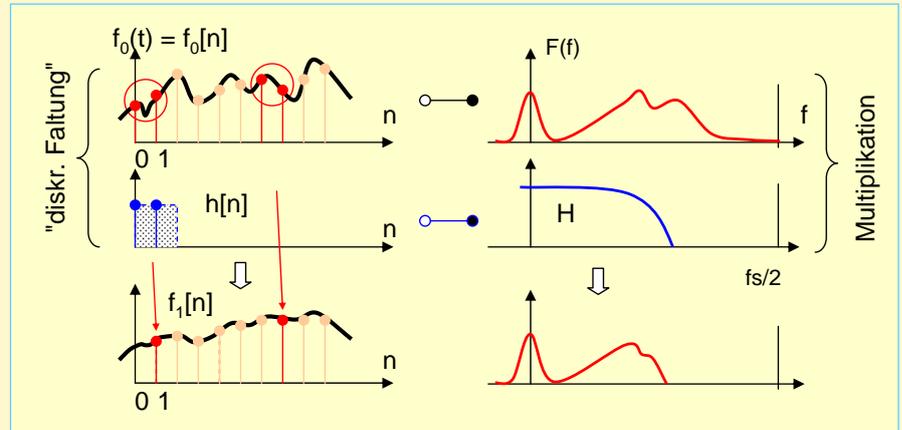
$$H = [h_0, h_1] = [0,707; 0,707]$$

$$f_1[1] = 0,707 \cdot f_0[1] + 0,707 \cdot f_0[0]$$

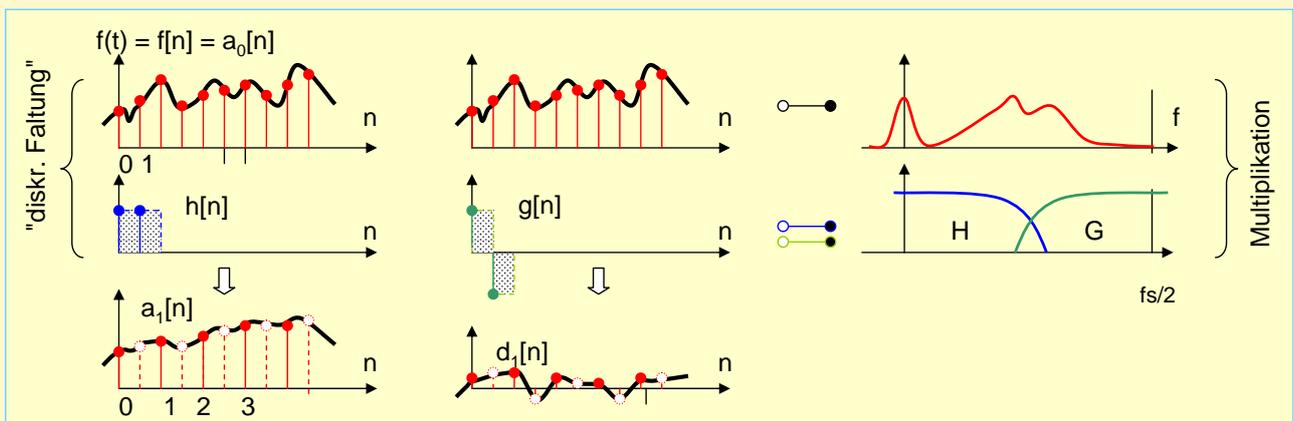
$$f_1[2] = \dots$$

$h[n] = h_n$: Filterkoeffizienten
 N : Ordnung des Filters

(H bedeutet hier eine Mittelwertbildung von je zwei benachbarten Signalwerten)



3. Filteralgorithmus der schnellen Wavelet-Transformation



Faltung mit Tiefpass H
 plus Downsampling

$$a_m \rightarrow \left[\text{Filter } H \right] \rightarrow \left[\downarrow 2 \right] \rightarrow a_{m+1}$$

$$a_1[n] = \sum_k a_0[k] \cdot h[k-2n]$$

$$u_{1,n} = a_1[n]$$

Faltung mit Hochpass G
 plus Downsampling

$$a_m \rightarrow \left[\text{Filter } G \right] \rightarrow \left[\downarrow 2 \right] \rightarrow d_{m+1}$$

$$d_1[n] = \sum_k a_0[k] \cdot g[k-2n]$$

$$v_{1,n} = d_1[n]$$

Beispiel: Haarfilterpaar

$$H = [h_0, h_1] = [0,707; 0,707]$$

$$G = [g_0, g_1] = [h_1, -h_0]$$

(H = gleitendes Mittel,
 G = Differenz
 zweier benachbarter Datenwerte)

Ergebnisse der Theorie:

- Die tiefpass-gefilterten Signalwerte $a_m[n]$ der Stufe m entsprechen den Entwicklungskoeffizienten $u_{m,n}$ der Approximation a_m .
- Die hochpass-gefilterten Signalwerte $d_m[n]$ der Stufe m entsprechen den Entwicklungskoeffizienten $v_{m,n}$ der Details d_m in der Waveletdarstellung

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{m+1}[n] = \sum_k a_m[k] \cdot h[k-2n] \\ d_{m+1}[n] = \sum_k a_m[k] \cdot g[k-2n] \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{"Digitale Filterung" der Stufe } m+1 \\ \text{mit Filterpaar } H \text{ und } G \\ \text{(Schnelle Wavelet-Transformation)} \end{array}$$

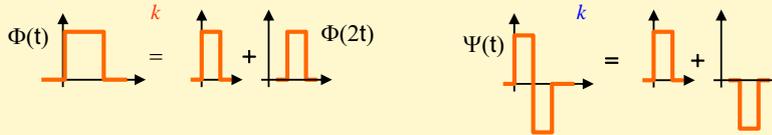
$$\Rightarrow \begin{array}{l} a_{m+1} = \sum_n u_{m+1,n} \cdot \Phi_{m+1,n} \\ d_{m+1} = \sum_n v_{m+1,n} \cdot \Psi_{m+1,n} \end{array} \quad \text{Wavelet-Entwicklung der Stufe } m+1$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} u_{m,n} = a_m[n] \\ v_{m,n} = d_m[n] \end{array}$$

- Die Integrale $v_{m,n} = \langle \Psi_{m,n} | x \rangle$ und $u_{m,n} = \langle \Phi_{m,n} | x \rangle$ brauchen nicht berechnet werden. Sie werden rekursiv mit den obigen Gleichungen bestimmt.
- Die sog. **Skalierungsfunktion** Φ wird rekursiv aus dem Tiefpassfilter berechnet
Die **Waveletfunktion** Ψ wird aus dem Hochpassfilter und der Skalierungsfunktion berechnet

$$\Phi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0} h(k) \cdot \Phi(2t-k) \quad \Psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0} g(k) \cdot \Phi(2t-k) \quad \text{(2-Skalenrelation)}$$

Theoretische Begründung: 2-Skalenrelation

$$\Phi(t) = \sqrt{2} \sum_k h(k) \Phi(2t-k) \quad \Psi(t) = \sqrt{2} \sum_k g(k) \Phi(2t-k)$$


(Beispiel: Haarbasis)

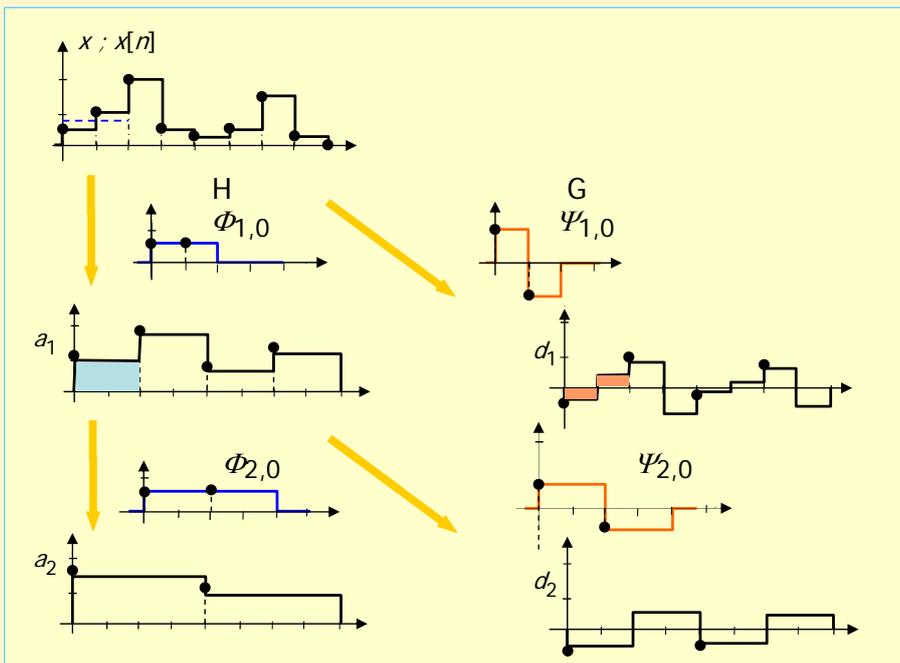
- Umschreiben in dyadische Indizierung

$$\begin{array}{l} \Phi_{m,n} = \sum_k h_k \Phi_{m-1,k+2n} \\ \Psi_{m,n} = \sum_k g_k \Phi_{m-1,k+2n} \\ \Phi_{m+1,n} = \sum_k h_{k-2n} \Phi_{m,k} \\ \Psi_{m+1,n} = \sum_k g_{k-2n} \Phi_{m,k} \end{array} \quad \text{Umschreibung der Indizes}$$

$$\begin{array}{l} \langle \Phi_{m+1,n} | x \rangle = \sum_k h_{k-2n} \cdot \langle \Phi_{m,k} | x \rangle \\ u_{m+1,n} = \sum_k h_{k-2n} u_{m,k} \\ \langle \Psi_{m+1,n} | x \rangle = \sum_k g_{k-2n} \cdot \langle \Phi_{m,k} | x \rangle \\ v_{m+1,n} = \sum_k g_{k-2n} u_{m,k} \end{array} \quad \text{Skalarprodukt mit } x \text{ bilden}$$

- Entwicklungskoeffizienten $u_{m,n}$ der Approximation a_m und die Wavelet-Koeffizienten $v_{m,n}$ für die Detaildarstellung d_m werden rekursiv berechnet
- Anfangswertproblem: mit welcher Skale $m = m_0$ beginnt man? $u_{m_0,n} = a_{m_0}[n] = x[n]$
"wavelet crime"

Beispiel: Haarzerlegung



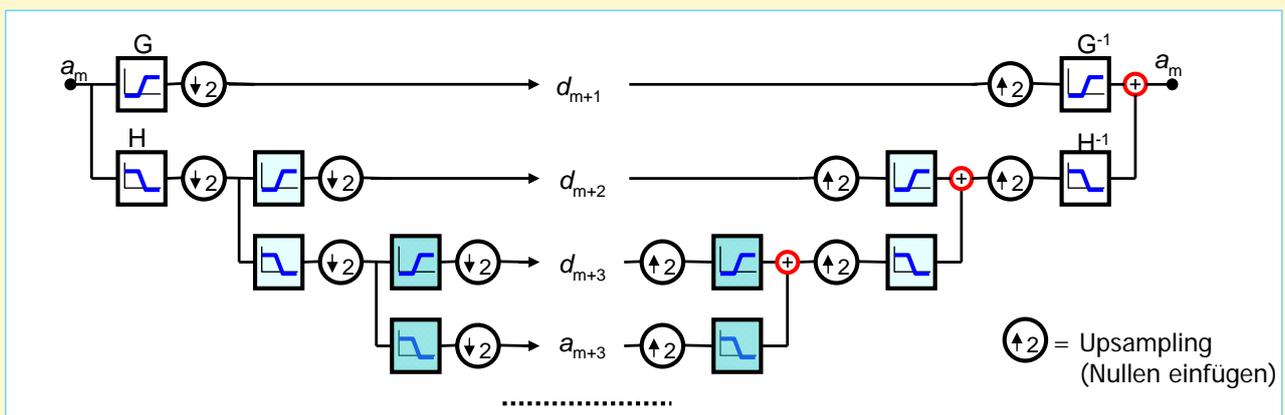
Signal x ;
 Abtastwerte $x[n] = a_0[n]$
 (= Approximationsstufe 0)

1. Stufe
 Approximation a_1
 Detail d_1

2. Stufe
 Approximation a_2
 Detail d_2

Anmerkung: In diesem Fall bedeutet die Zerlegung (= Faltung) mit den Haarfunktionen eine Berechnung der Mittelwerte und der Differenz zwischen zwei benachbarten Signalwerten.

Rekonstruktion (Umkehrung der FWT: IFWT)



$$a_{m+1}[n] = \sum_k h[k-2n] \cdot a_m[k]$$

$$d_{m+1}[n] = \sum_k g[k-2n] \cdot a_m[k]$$

$$a_m[n] = \sum_k h[n-2k] \cdot a_{m+1}[k]$$

$$+ \sum_k g[n-2k] \cdot d_{m+1}[k]$$

Zerlegung: FWT

Rekursive Berechnung der Approximation a_{m+1} (grobe Skala) aus den Approximations- und Detailkoeffizienten von a_m und d_m (feine Skala)

Rekonstruktion: IFWT

Rekursive Berechnung der Approximation a_m (feine Skala) aus den Approximations- und Detailkoeffizienten von a_{m+1} und d_{m+1} (grobe Skala)

Eigenschaften der Filter H und G , bzw. H^{-1} und G^{-1} (Filterbank)

- Mit der Definition des Tiefpassfilters H sind die Filter G , H^{-1} und G^{-1} bestimmt

$H = [\dots h_0, h_1, h_2, h_3, \dots]$	$\xrightarrow{\text{order Flip}}$	$H^{-1} = [\dots h_3, h_2, h_1, h_0, \dots]$
\downarrow alternating Flip		
$G = [\dots h_3, -h_2, h_1, -h_0, \dots]$	$\xrightarrow{\text{order Flip}}$	$G^{-1} = [\dots -h_0, h_1, -h_2, h_3, \dots]$

- Definierende Eigenschaften

$\sum_k h_k = \sqrt{2}$	Normierungsbedingung	
$\sum_k h_k \cdot h_{k-2n} = \delta_{0,n}$	Orthogonalitätsbedingung I	oder: $ \hat{H}(f) ^2 + \hat{H}(f + \frac{f_S}{2}) ^2 = 2$
$\sum_k (-1)^k h_{1-k} \cdot h_{k-2n} = 0$	Orthogonalitätsbedingung II	
$g_k = (-1)^k h_{1-k}$	Definition des Hochpassfilters G	

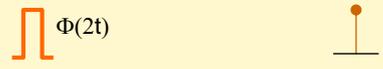
Berechnung der Skalierungsfunktion und der Wavelets

- Durch rekursive Faltung (2-Skalenrelation)

$$\Phi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0} h(k) \Phi(2t - k)$$

$$\Psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0} g(k) \Phi(2t - k)$$

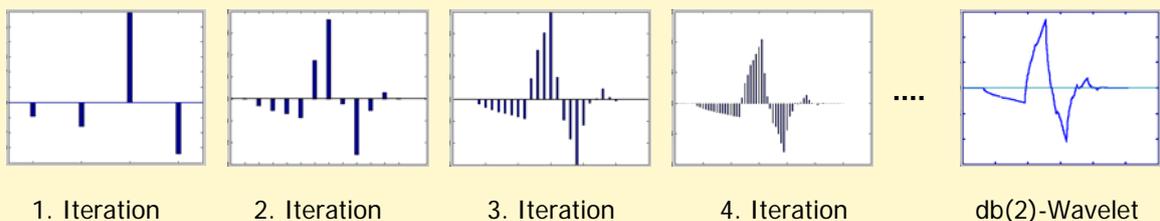
Beginn z.B. mit Haar Impuls bzw. einz. Abtastwert



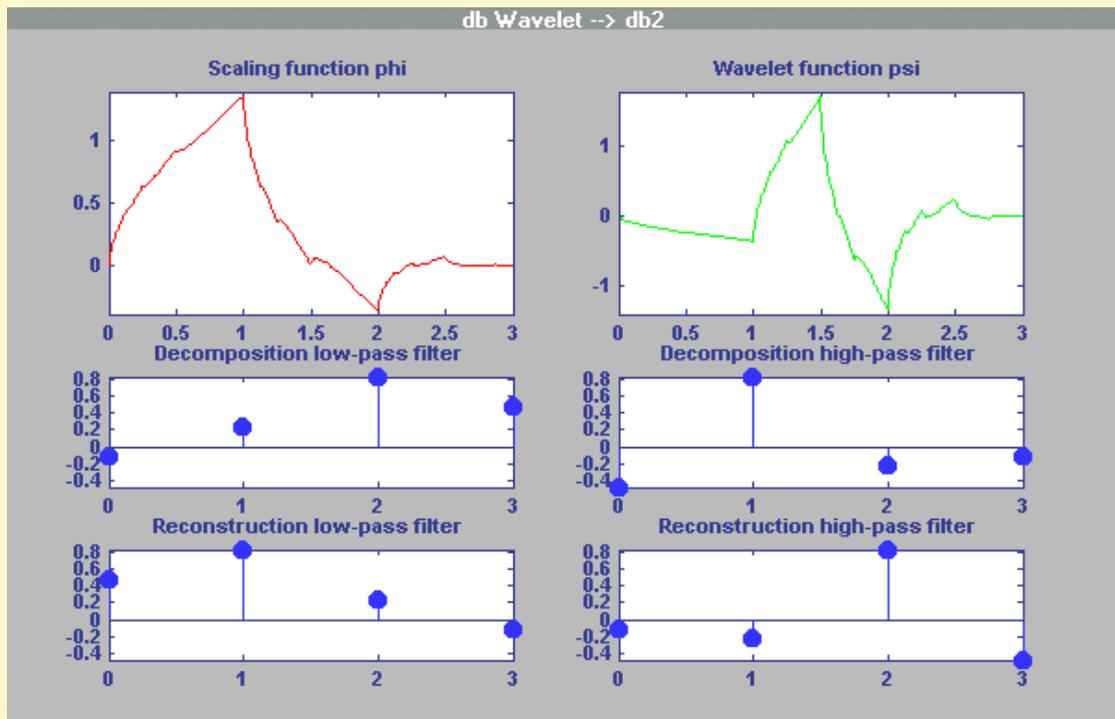
Beispiel: Daubechies(2)

$$H = [0,3415, 0,5915, 0,1585, -0,0915]$$

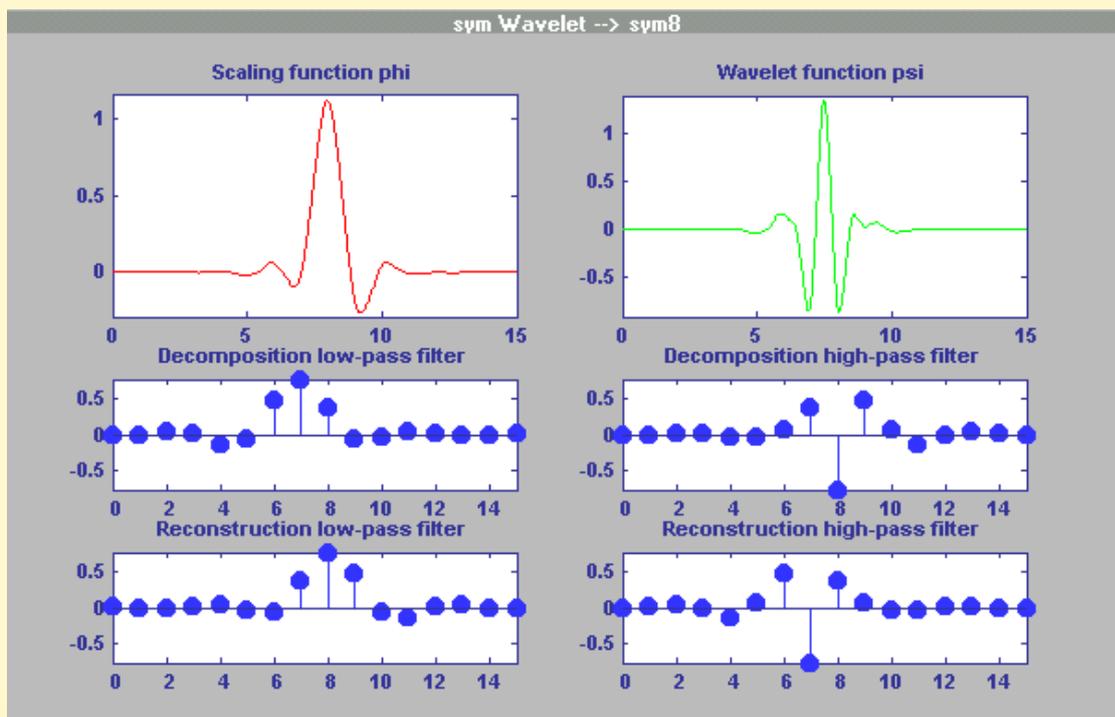
$$G = [-0,0915, -0,1585, 0,5915, -0,3415]$$



Daubechies(2)

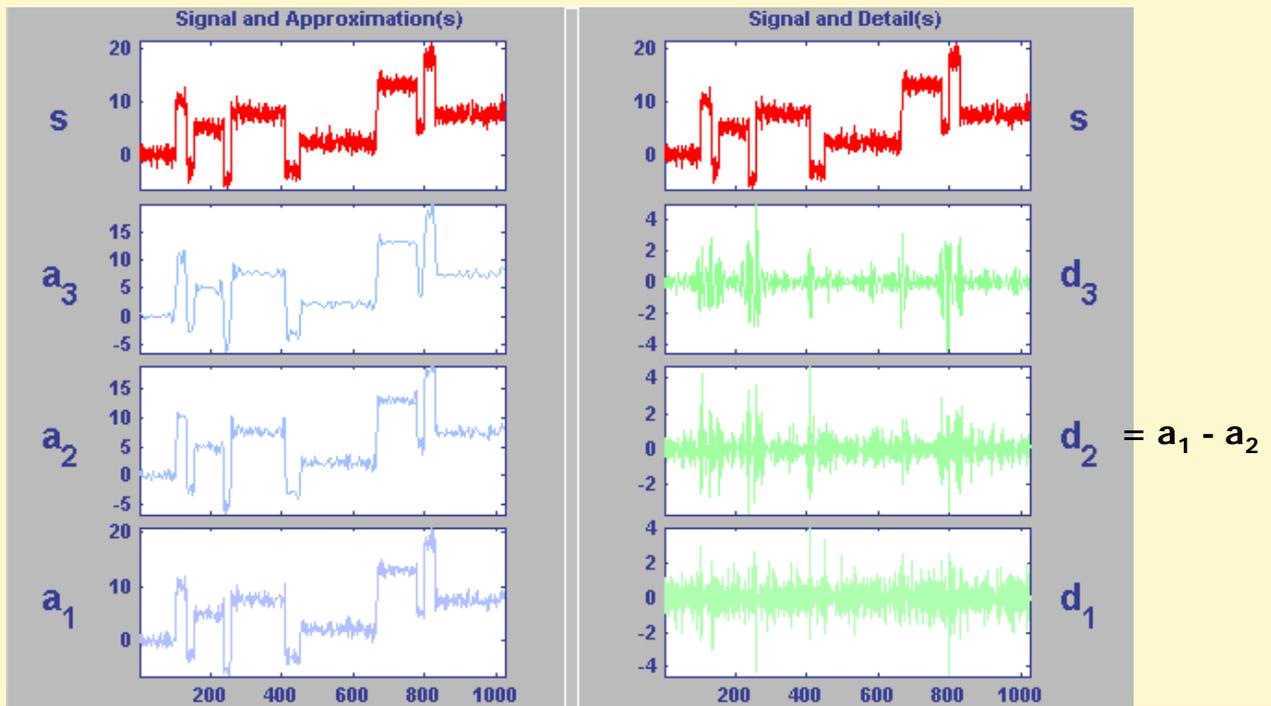


Symmlet(8)



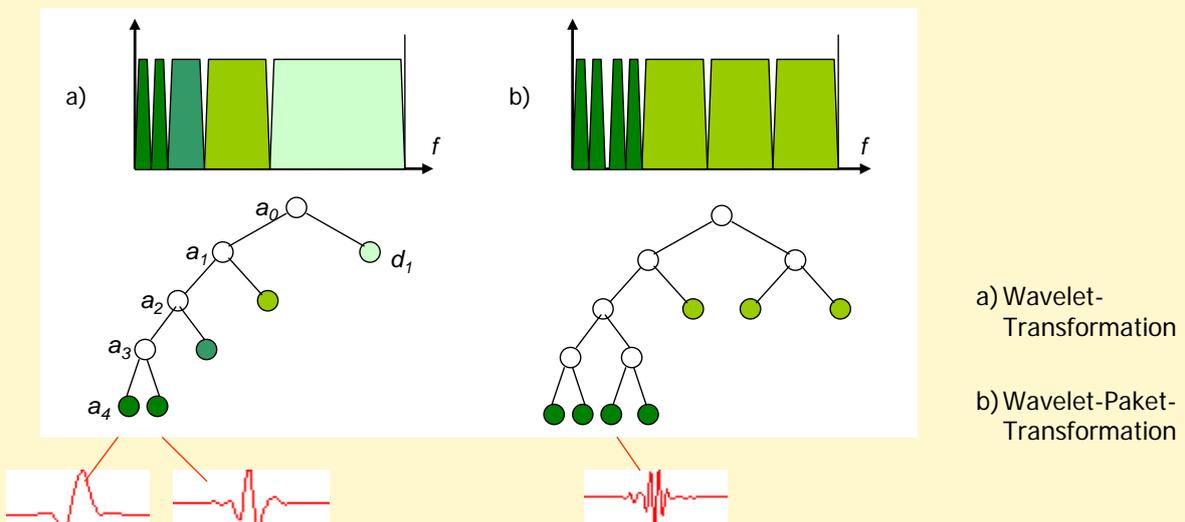
Beispiel einer Waveletzerlegung

Signal: noisebloc; $N = 1024$; sym(8)



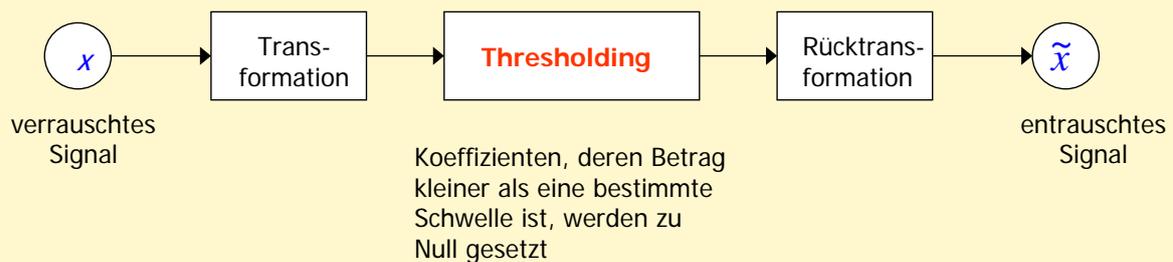
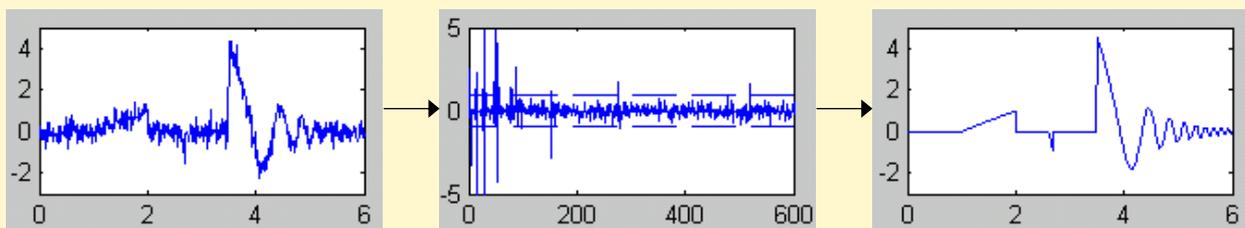
Wavelet-Paket-Transformation (Coifman)

- ▶ Anwendung des Halbbandfilter-Algorithmus auf den Hochpasskanal (Details)
- ▶ Selektive Wavelet-Transformation binärer "Wavelet Decomposition Tree" } Suche nach der besten Basis



- ▶ **Denoising**
- ▶ **Datenkompression, Bildkompression**
JPEG2000;
Archivierung; FBI-Fingerabdrücke
- ▶ **Kantenerkennung**
- ▶ **Bildverarbeitung in der Medizin**
Erkennung von typischen Signalformen, z.B. In EEGs;
Archivierung
- ▶ **Breitbandkommunikation**
ADSL - Vorschlag

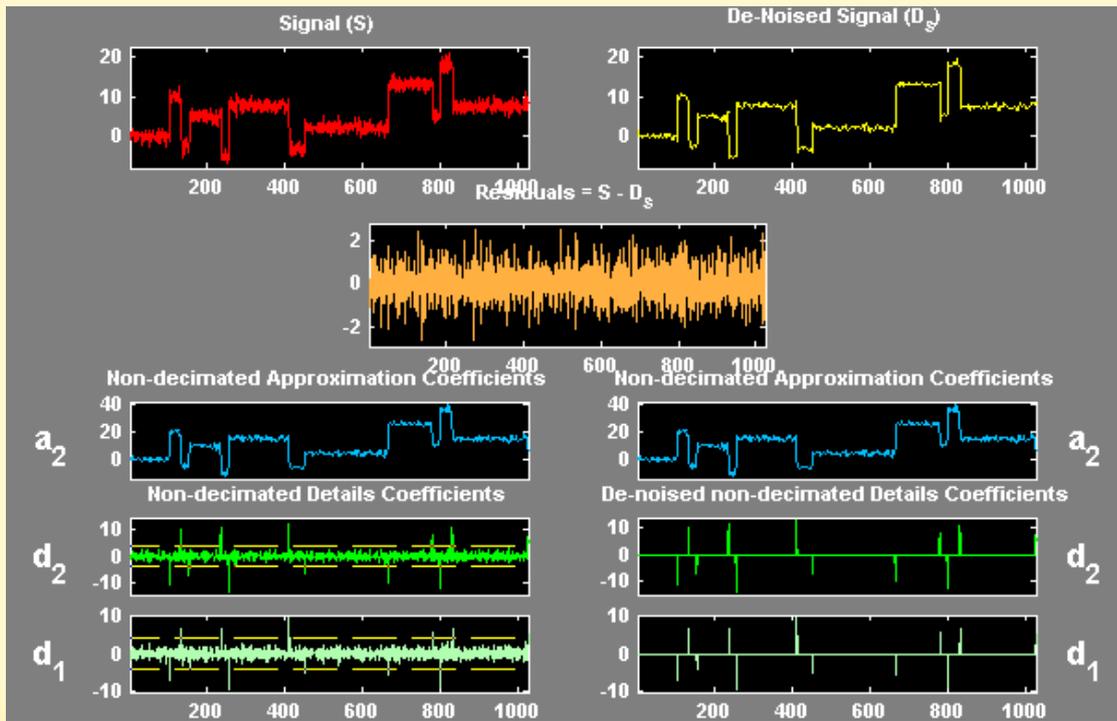
Denoising: Schema



$$SNR = 10 \log \frac{\text{Energie der Signalkomp.}}{\text{Energie der Fehlersignale}} = 10 \log \frac{\sum x_k^2}{\sum |x_k - \tilde{x}_k|^2}$$

Beispiel: Denoising (Haarbasis)

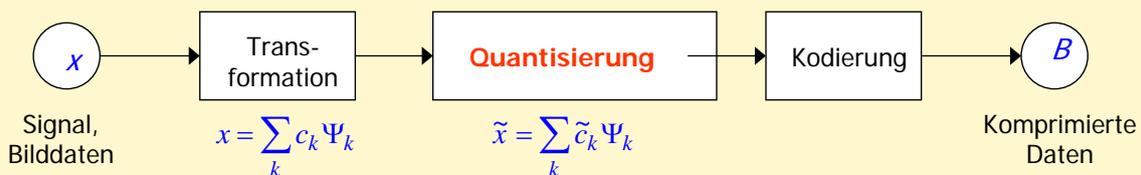
Signal: noisebloc; $N = 1024$; sym(8)



Datenkompression: Schema

Zerlegung: Durch geeignete Wahl der Waveletbasis werden viele vernachlässigbar kleine Koeffizienten erzeugt, die bei der Quantisierung zu Null gesetzt werden \Rightarrow Informationsverlust

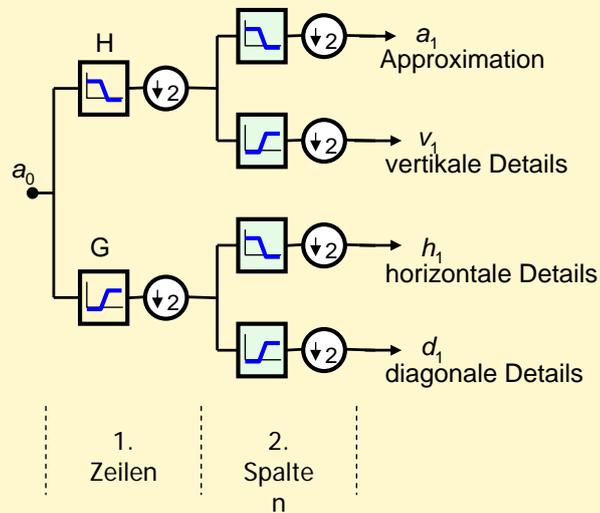
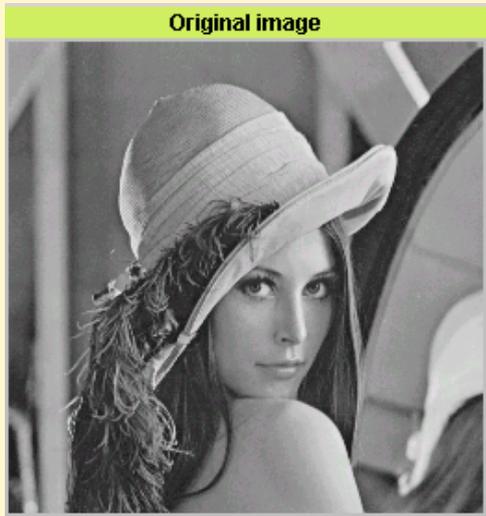
Rekonstruktion: mit komprimiertem und geeignet kodierten Datensatz



Kodierung: Die Folge der quantisierten Koeffizienten \tilde{c}_k werden auf möglichst effiziente Art binär codiert (Laufängencodierung, Huffman-Code)

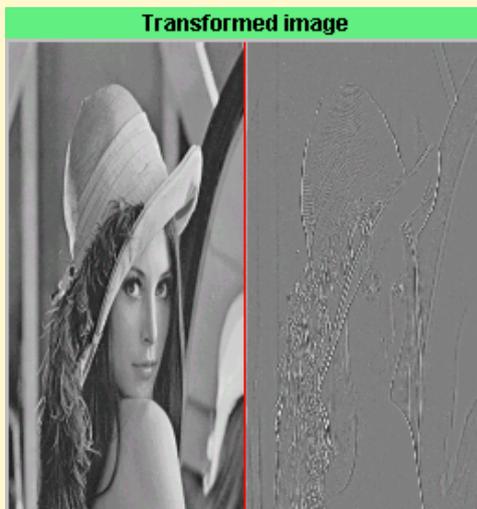
Beispiel: Bildkompression (Lena)

Schema : Halbbandfilter zeilenweise und spaltenweise anwenden
Quantisierung und Thresholding erzeugt viele Null-Koeffizienten



Beispiel: Bildkompression (Lena)

Schema : Halbbandfilter zeilenweise und spaltenweise anwenden



1. Stufe: zeilenweise Zerlegung



2. Stufe: spaltenweise Zerlegung

a_1 = Approximation h_1 = horizontale Details
 v_1 = vertikale Details d_1 = diagonale Details

Eigenschaften

JPEG (Joint Photographic Expert Group - 1985) - der Original Standard

- ▶ Technik: DCT ; 8x8 Pixelblöcke ; 8 (12) bit / Pixel bzw. Farbkanal
- ▶ Entwickelt für natürliche Bilder (weiche Übergänge)
ungeeignet für harte Kanten, Graphiken, Text (Verbund)
- ▶ Kompressionsverhältnis K bis ca. 32 (0,25 bpp - bit per pixel)

JPEG 2000

- ▶ Technik: DWT ; Wavelet bior9-7 ; 8 (16) bit / Pixel bzw. Farbkanal
- ▶ Verlustfreie ($K = 2$) bis verlustbehaftete Kompression: typ. $K = 64$ (0,125 bpp)
- ▶ Wahlfreier Zugriff auf Datenstrom (Flusssteuerung):
Extrahieren von Ausschnitten
Selektion von Bereichen mit hoher/niedriger Auflösung \Rightarrow Medizin

JPEG / JPEG 2000 Vergleich

JPEG; 0,125 bpp ($K = 64$)JPEG 2000; 0,125 bpp ($K = 64$)

Regions of Interest (ROI):

Frei definierbare Bildbereiche, die zuerst oder mit höherer Auflösung übertragen und angezeigt werden.

0,125 bpp



0,5 bpp



1 bpp



4 bpp



JPEG / JPEG 2000 Vergleich

JPEG-1 at 0.27 bpp



Original



JPEG-2000 at 0.27 bpp

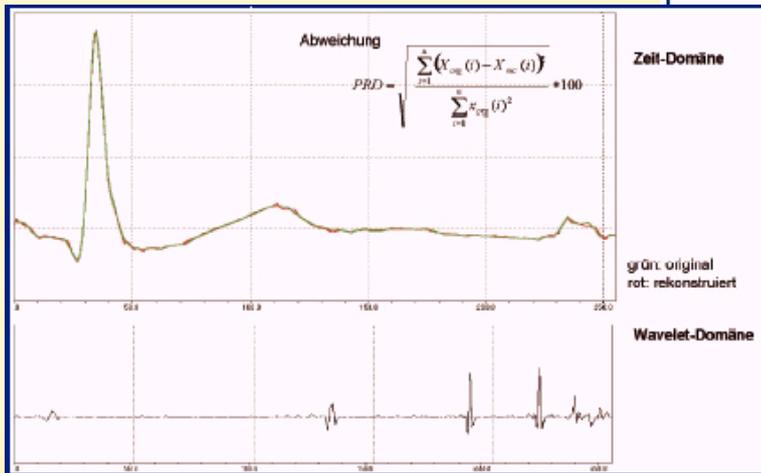
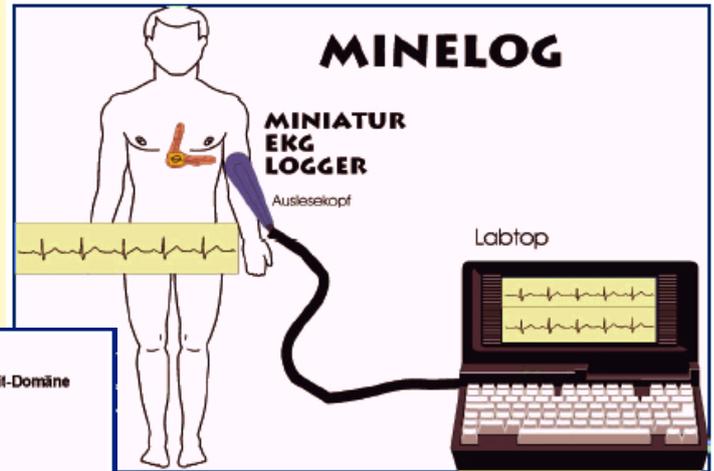


MINELOG

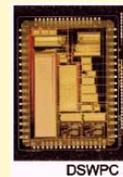
(miniaturisierter EKG Datenlogger)

Entwicklung: FH Ulm; FH Offenburg

- ▶ Dual Signal **Waveletprocessor** Chip
- ▶ 24 h Aufzeichnungsdauer 2 Kanäle
- ▶ Abtastrate 150 Hz; 10 MB Flash ROM
- ▶ Kompression $K \approx 7$



Pflaster mit Elektroden



Wavelet Signalprocessor

Kante in einem Bild:

Der Gradient grad $f(x,y)$ weist lokales Maximum auf

- ▶ Kanten enthalten viel relevante Information
- ▶ Berechnung mit Hilfe der WT
- ▶ Nur Kanten, die über mehrere Skalen vorliegen, sind echte Kanten (robustes Verfahren)
- ▶ Anwendung bei Radarbildern



$m = 1$



$m = 2$



$m = 3$



$m = 4$

Skale $a = 2^m$