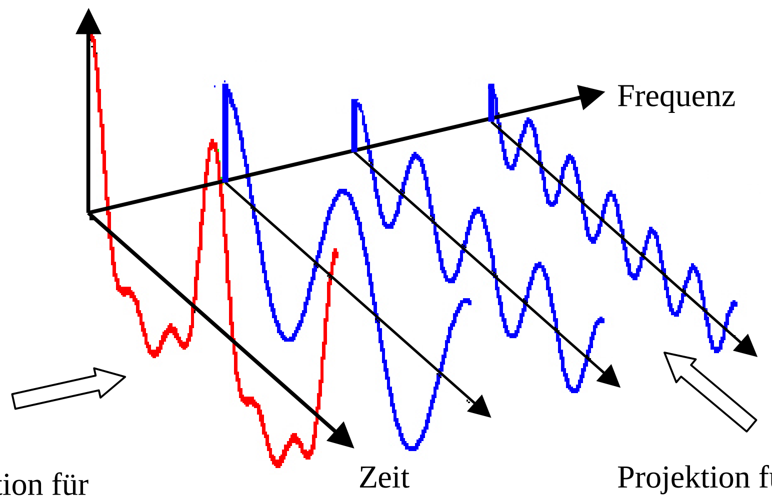
Anhang 4: Spektrale Darstellung, Spektrum, Fouriertransformation

Kombinierte Zeit- und Frequenzdarstellung eines aus harmonischen Signalen (Sinus, Kosinus) zusammengesetzten Signals.



Projektion für Zeitdarstellung

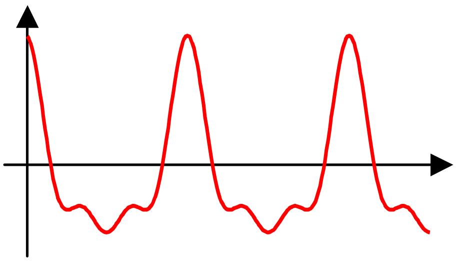
Projektion für Frequenzdarstellung

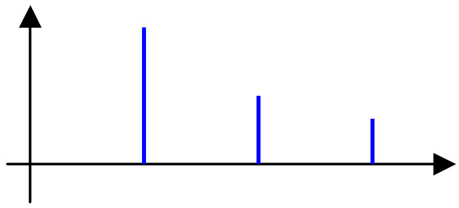
Zeitbereich

Frequenzbereich

Auftragung der Amplituden der einzelnen harmonischen Signalen über der Frequenz

⇒ **Amplitudenspektrum** $A(\omega)$

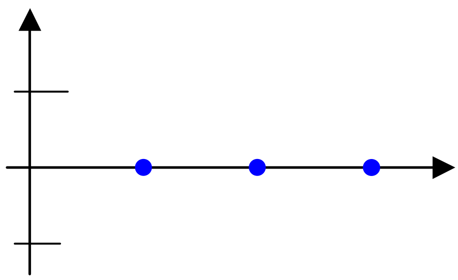




Das Amplitudenspektrum enthält keine Information über die Phasenlage der einzelnen Harmonischen. Deshalb zusätzlich

⇒ **Phasenspektrum** $\varphi(\omega)$

Achtung: Das Phasenspektrum wird oft einfach weggelassen



Die Darstellungen im Zeitbereich- bzw. Frequenzbereich sind äquivalent, sie enthalten die vollständige Information über das Signal.

1 Fourierreihen

Fourierreihen treten bei der Analyse von periodischen Signalen auf.
Im folgenden betrachten wir fast ausschließlich nur eindimensionale Signale (1 Freiheitsgrad).

Fourieranalyse

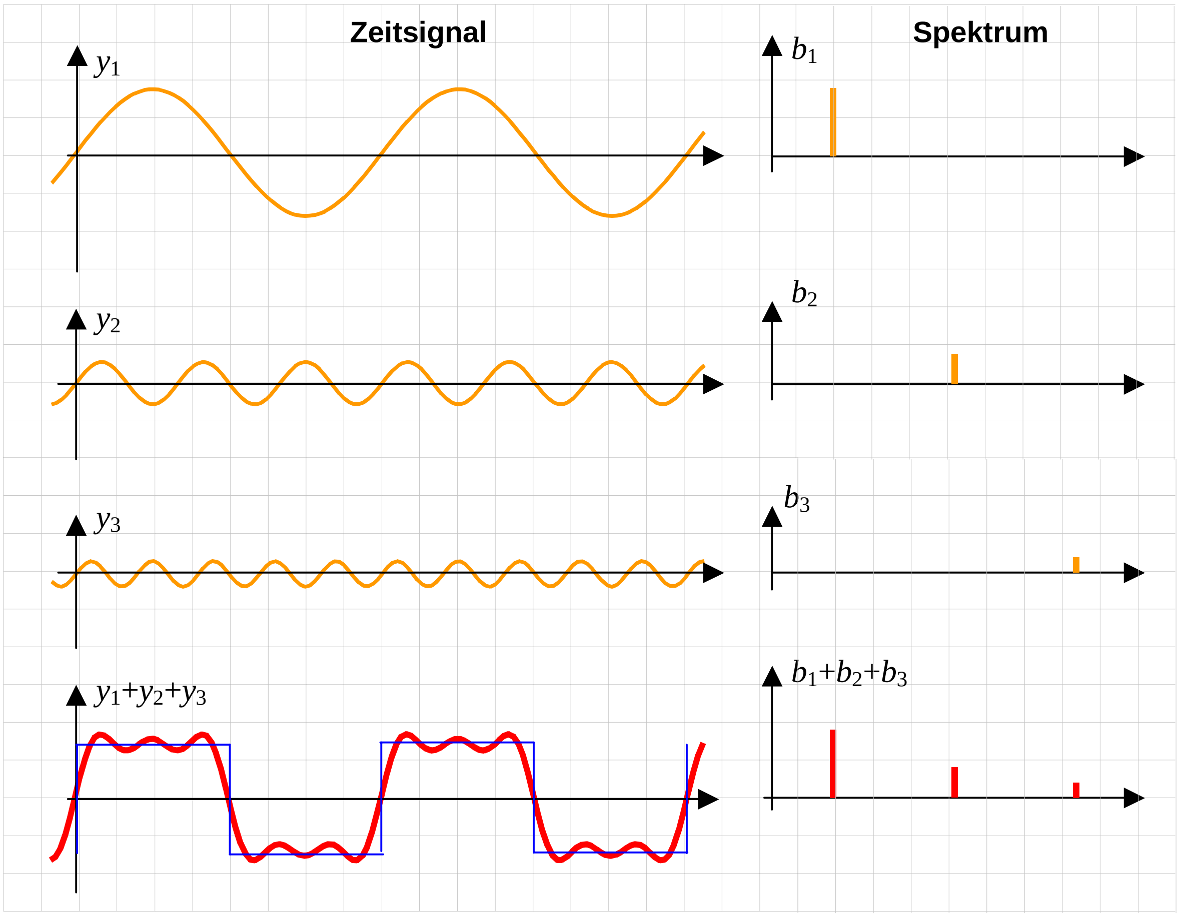
Jede periodische Funktion lässt sich eindeutig als Summe von harmonischen Funktionen darstellen (Fourier 1768 - 1830)

Fouriersynthese (Umkehrung)

Durch Überlagerung von harmonischen Schwingungen mit geeignet gewählten Amplituden und Phasen, kann stets in eindeutiger Weise jede gewünschte periodische Funktion generiert werden.

Beispiel: Fouriersynthese bzw. Fourieranalyse einer periodischen Rechteckschwingung der Periode T_0 . Je mehr Schwingungen mit den Frequenzen ω_0 , $3\omega_0$, $5\omega_0$ usw. addiert werden, um so besser wird die Rechteckschwingung angenähert.

$$y(t) = \sum y_n(t) = b_1 \sin(\omega t) + (b_1/3)\sin(3\omega t) + (b_1/5)\sin(5\omega t) + ..$$



Darstellung der Fourierzerlegung (Frequenzspektrum)

Im sog. "Frequenzspektrum" oder einfach Spektrum benutzt man vertikale Linien, um die Frequenzkomponenten anzugeben. Die horizontale Position (*x*-Achse) gibt die Frequenz der Frequenzkomponente an, die Länge der Linie (*y*-Achse) gibt die Amplitude der Frequenzkomponente an. Da die Frequenz reziprok zur Zeit ist, nennt man die Spektraldarstellung oder den Spektralbereich auch den reziproken Raum.

Berechnung der Fourierkoeffizienten

Mathematisch berechnet man die Fourierkoeffizienten a_n, b_n mit Hilfe folgender Formeln.

$$y(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi n f_0 t)\,; \qquad f_0 = \frac{1}{T_0}\;;\; f_n = n f_0$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} y(t)\,dt \qquad a_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} y(t)\cos(2\pi f_n t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} y(t)\sin(2\pi f_n t)\,dt$$

Mit Hilfe der trigonometrischen Additionstheoreme lässt sich eine weitere Darstellung dieser sog. reellen Fourierreihe angeben.

$$y(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)$$

$$d_0 = a_0 \qquad \tan\varphi_n = \frac{-b_n}{a_n}$$

$$d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Man erkennt daraus auch, dass zur vollständigen Darstellung nicht nur die Amplituden-koeffizienten d_n, sondern auch die jeweiligen Phasen φ_n wichtig sind.

Schließlich erhält man mit Hilfe der Eulergleichungen die **komplexe Darstellung der Fourierreihe**. Die Frequenzachse muss hier auf den negativen Bereich erweitert werden, da nach Euler zwei Exponentialschwingungen mit einer negativen $-f_0$ und positiven $+f_0$ Frequenz einen reellen Kosinus (Sinus) ergibt.

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{2\pi n f_0 t}$$

$$c_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} y(t) e^{-j2\pi n f_0 t}\,dt$$

$$c_n = (a_n - jb_n)/2 \qquad \text{für } n = 1, 2, 3,..$$

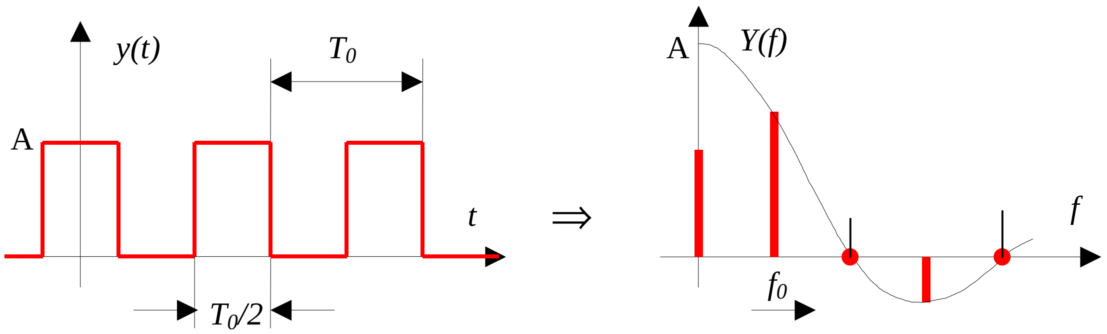
$$c_{-n} = c_n{}^* = (a_n + jb_n)/2$$

$$c_0 = a_0$$

Merke: Steile Signalflanken bedeuten Spektralkomponenten mit hohen Frequenzen:
z.B. bei Funken, Blitz, Impulsspektroskopie

Beispiel für eine Fourierreihe

Periodische Rechteckwelle (einseitiges Spektrum der geraden Funktion)



$$y(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi n f_0 t) \qquad f_0 = 1/T_0$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\left[\int_{-T_0/4}^{T_0/4} A\,dt + \int_{T_0/4}^{3T_0/4} 0\,dt\right] = \frac{A}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0}\left[\int_{-T_0/4}^{T_0/4} A\cos(n2\pi f_0)\,dt + \int_{T_0/4}^{3T_0/4} 0\cos(n2\pi f_0)\,dt\right] = \frac{2A}{T_0}\cdot\left.\frac{\sin 2\pi n f_0 t}{2\pi n f_0}\right|_{-T_0/4}^{T_0/4}$$

$$a_n = \frac{A}{\pi n}\cdot[\sin(n\pi/2) - \sin(-n\pi/2)] =$$

(+1 +1) für n = 1, 5, 9 .....
(-1 -1) für n = 3, 7, 11 .....
(0 0) für n = gerade

$$a_n = \pm\frac{2A}{n\pi}$$

$b_n = 0$ wegen der Symmetrie (gerade Funktion) enthält $y(t)$ nur Kosinuskomponenten

Die Fourier-Reihendarstellung der Rechteckimpulsfolge lautet damit:

$$\boxed{y(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)t - \frac{2A}{3\pi}\cos\left(3\frac{2\pi}{T_0}\right)t + \frac{2A}{5\pi}\cos\left(5\frac{2\pi}{T_0}\right)t +}$$

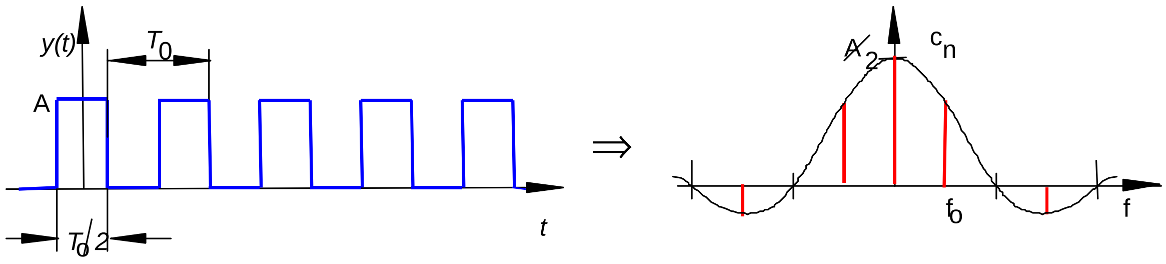
Bemerkungen: Steile Signalflanken bedeuten Spektralkomponenten mit hohen Frequenzen:
z.B. bei Funken, Blitz, Impulsspektroskopie

2 Fourierintegral

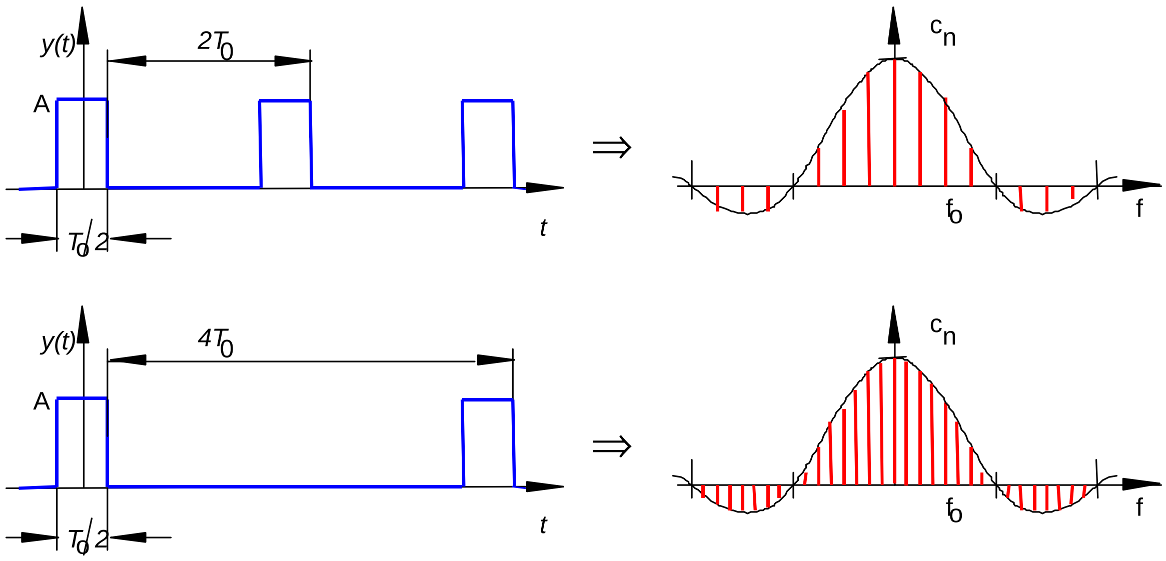
Auch unperiodische Vorgänge kann man in harmonische Schwingungen zerlegen.
Beispiel: Rechteckimpulsfolge wird schrittweise zu einem Einzelimpuls

$$y(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\cos(\frac{2\pi}{T_0})t - \frac{2A}{3\pi}\cos(3\frac{2\pi}{T_0})t + \frac{2A}{5\pi}\cos(5\frac{2\pi}{T_0})t + ...$$ bzw. komplex:

$$y(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi}\exp\{-j2\pi f_0 t\} + \frac{A}{\pi}\exp\{+j2\pi f_0 t\} - \frac{A}{3\pi}\exp\{-j2\pi(3f_0)t\} - \frac{A}{3\pi}\exp\{+j2\pi(3f_0)t\} + ...$$



Nun soll die Impulspause verdoppelt bzw. vervierfacht werden.
Die Berechnung der Fourierkoeffizienten ergibt:



Setzt man diesen Vorgang fort, geht die Periodendauer gegen Unendlich und der Frequenzabstand der diskreten Frequenzen geht gegen Null: das Spektrum wird eine kontinuierliche Funktion.

Die Fourierreihe mit den diskreten Koeffizienten c_n geht über in ein Integral mit einer kontinuierlichen Amplitudenfunktion $C(f)$ bzw. $Y(f)$.

Fourier-Reihe (komplex)

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(j2\pi n f_0 t)$$

$$c_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} y(t)\exp(-j2\pi n f_0 t)dt$$

Fourier-Integral (komplex)

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f)\exp(j2\pi f t)df \qquad Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\exp(-j2\pi f t)dt}$$

Eigenschaften der Spektralfunktion *Y(f)*

$Y(f)$ ist i.a. komplex $Y(f) = \mathrm{Re}\{Y(f)\} + \mathrm{j}\,\mathrm{Im}\{Y(f)\} = A(f) + \mathrm{j}B(f)$

$Y(f) = |Y(f)|\cdot\exp\{\mathrm{j}\,\Psi(f)\}$

Bezeichnungen:

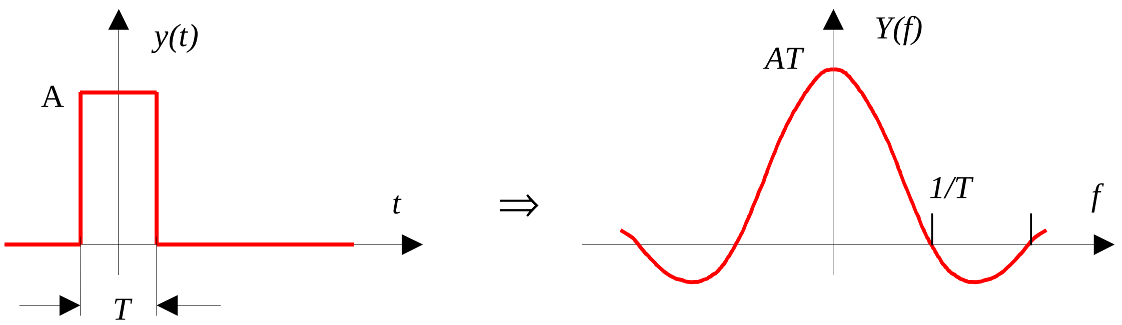
- $\boldsymbol{Y(f)}$ Spektrum von $y(t)$
- $\boldsymbol{|Y(f)|}$ Amplitudenspektrum oder Betragsspektrum von $y(t)$
- $\Psi(f)$ Phasenspektrum: $\tan \Psi(f) = \mathrm{Im}Y(f)/\mathrm{Re}(Y(f) = B(f)/A(f)$

Für **symmetrische Signale** (gerade Funktion) besitzt das **Spektrum nur einen Realteil**.
Für **antisymmetrische Signale** (ungerade Funktion) besitzt das **Spektrum nur einen Imaginärteil**.

Der Realteil $A(f)$ der Spektralfunktion $Y(f)$ stellt die kontinuierliche Amplitudenfunktion der Kosinusbeiträge dar und der Imaginärteil $B(f)$ ergibt die Amplitudenfunktion der Sinusbeiträge. Da $y(t)$ eine rein reelle Funktion ist, muss $A(f)$ eine gerade und $B(f)$ eine ungerade Funktion sein.

Beispiel für ein Fourierintegral

Rechteckimpuls (nichtperiodisch, transient)



$$y(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t < |T/2| \\ A \text{ für } -T/2 \le T \le T/2 \end{cases}$$

$$Y(f) = A \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-j2\pi ft}dt = AT\cdot\frac{\sin\left(\frac{1}{2}T(2\pi f)\right)}{\left(\frac{1}{2}T(2\pi f)\right)} \quad \text{(zweiseitiges Spektrum)}$$

Diese Funktion heißt **Spaltfunktion** und spielt in der Optik eine große Rolle

Der Wert der Spektralfunktion bei $f = 0$ ist gleich der sog. Impulsfläche: $Y(0) = AT$

Unschärferelation

Ein Vergleich der Zeitsignale und der zugehörigen Spektren zeigt folgenden Zusammenhang. Ist die typische Dauer des Zeitsignals Δt groß, so wird die Breite der Spektralfunktion Δf schmal. Das Produkt aus zeitlicher Dauer Δt und spektraler Breite Δf ist annähernd 1 und damit konstant.

$$\boxed{\Delta f \cdot \Delta t \approx 1}$$

Zusammenfassung:

Fourier-Reihen:

Die Fouriertransformation von periodischen Funktionen im Zeitbereich ergibt diskrete Linien im Frequenzbereich (und umgekehrt).
Die Grundfrequenz ist durch die Periodendauer bestimmt $f_0 = 1/T_0$.
Der Anteil der Harmonischen mit Frequenzen $f_n = nf_0$ hängt von der Signalform ab.
Steile Signalflanken bedeuten immer einen signifikanten Anteil von hohen Frequenzen.

Fourier-Integral:

Die Fouriertransformation von nichtperiodischen Funktionen im Zeitbereich ergibt kontinuierliche Spektren im Frequenzbereich (und umgekehrt).
Die typische Dauer des Zeitsignals Δt ist mit der typischen Breite des Spektrums Δf über die Unschärferelation verknüpft $\Delta f \Delta t \approx 1$.
Im Anhang befindet sich ein Überblick über wichtige Fouriertransformationspaare.

Diskrete Fouriertransformation (DFT)

Bei der Digitalisierung wird ein Analogsignal mit einer festen Frequenz (Abtastfrequenz) “abgetastet“. In festen Zeitabständen (Abtastzeit) wird dabei der Signalwert gemessen und anschließend digitalisiert und abgespeichert. Vom ursprünglich zeitkontinuierlichen Analogsignal liegen dann nur noch zeitdiskrete Abtastwerte in digitalisierter Form vor. Damit geht immer auch Information verloren.

Werden innerhalb der Messdauer (T_M) N diskrete Signalwerte erfasst, gilt $T_M = N \cdot T$.
T ist der zeitliche Abstand zwischen den Abtastimpulsen, die Abtastzeit.
Die Abtastfrequenz ist dann $f_S = 1/T$.

Das Spektrum von Abtastsignalen ist immer ein diskretes, d.h. ein abgetastetes Spektrum. (Der Grund ist die sog periodische Fortsetzung des Signals mit der Messdauer T_M)
Für die Frequenzauflösung (Abstand der Frequenzkomponenten) gilt.

$$\boxed{\Delta f = 1/T_M}$$

Die höchste Frequenz im Spektrum entspricht der halben Abtastfrequenz.

$$\boxed{f_{max} = f_S/2 = N\Delta f/2}$$

Dies ist eine Konsequenz des sog. **Abtasttheorems**. Es besagt, dass die Abtastfrequenz f_S , mit der ein Signal diskretisiert und digitalisiert wird, mindestens doppelt so groß sein muss, wie die höchste im Signal auftretende Frequenzkomponente. Wird das Theorem verletzt, treten Artefakte auf, die man als **Aliasing** bezeichnet und im Spektrum falsche Frequenzkomponenten wiedergeben.

Spektren von Abtastsignalen zeigen oft einen Fehler, den sog. **Leckeffekt**. Der Leckeffekt tritt immer dann auf, wenn die periodische Fortsetzung des Messsignals eine Unstetigkeit an den Anschlussstellen erzeugt. Bei periodischen Signalen tritt er auf, wenn die Messdauer nicht ein ganzzahliges Vielfaches der Periodendauer des zu messenden Signals ist. Der Leckeffekt zeigt sich dann in einer Verbreiterung der Spektrallinien. In vielen kommerziellen Geräten sind zur Abminderung des Leckeffektes sog. Fensterfunktionen eingebaut, mit denen der aufgenommene Signalausschnitt der Messdauer T_M multipliziert wird. An den Fenstergrenzen wird das Signal dann auf Null gezwungen, so dass sich eine stetige periodische Fortsetzung ergibt.

Die **diskrete Fouriertransformation** wird meist mit einem speziellen Algorithmus berechnet, der sog. **FFT (=Fast Fourier Transformation)**. Die Zahl der Abtastwerte N innerhalb der Messdauer ist dabei immer eine Potenz von 2 (256, 512, 1024, usw.).

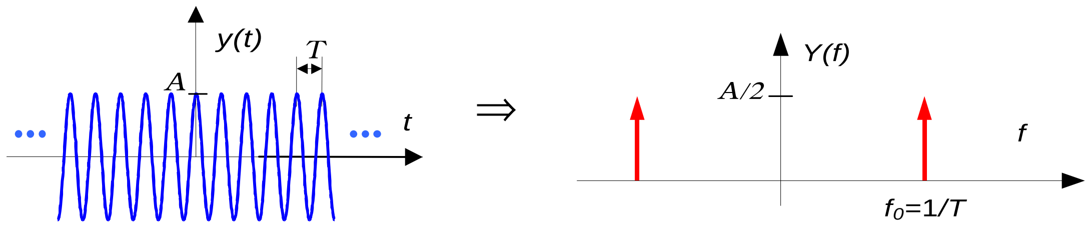
Wichtige FT-Paare

F-Reihe: $$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(j2\pi n f_0 t) \Rightarrow c_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} y(t)\exp(-j2\pi n f_0 t)dt$$

F-Integral: $$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f)\exp(j2\pi f t)df \Rightarrow Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\exp(-j2\pi f t)dt$$

Zeitbereich	**Frequenzbereich**
(Zeitsignal)	(zweiseitiges Spektrum)[1]

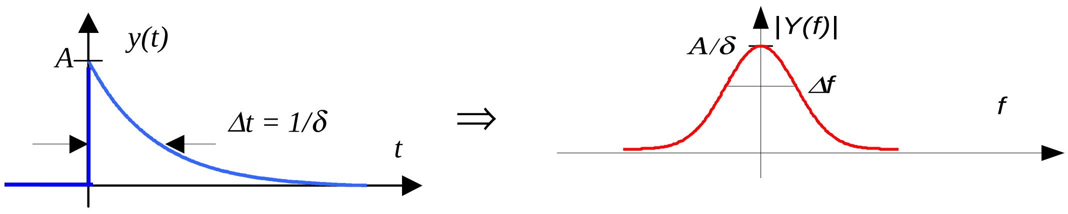
1) Kosinus/Sinus (periodisch)



$$y(t) = A\cos 2\pi f_0 t \Rightarrow Y(f) = \frac{A}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

2) Kausaler Exponentialimpuls

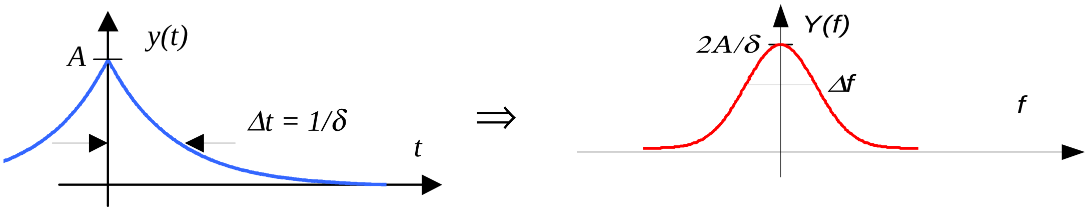
Bedeutung: Spektrum heißt Debey-Funktion oder Lorentzkurve



$$y(t) = \begin{cases} Ae^{-\delta t} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$Y(f) = \frac{A}{\delta}\frac{\delta}{\delta + j2\pi f}; \quad |Y(f)| = \frac{A}{\delta}\frac{\delta^2}{\delta^2 + 4\pi^2 f^2}$$

3) Doppel-Exponentialimpuls



$$y(t) = Ae^{-\delta|t|}$$

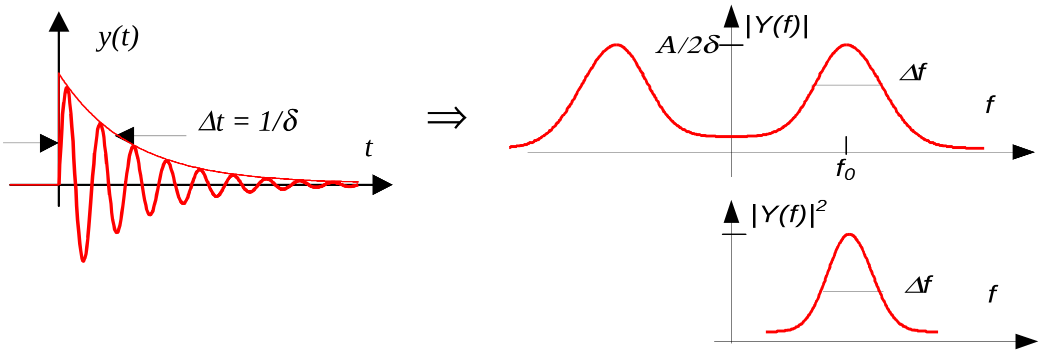
$$Y(f) = \frac{2A}{\delta}\frac{\delta^2}{\delta^2 + 4\pi^2 f^2}$$

---

[1] Werden die (Betrags)Spektren nur einseitig dargestellt, muss die Amplitude für $f > 0$ mit dem Faktor 2 multipliziert werden

4) Exponentiell gedämpfte Schwingung

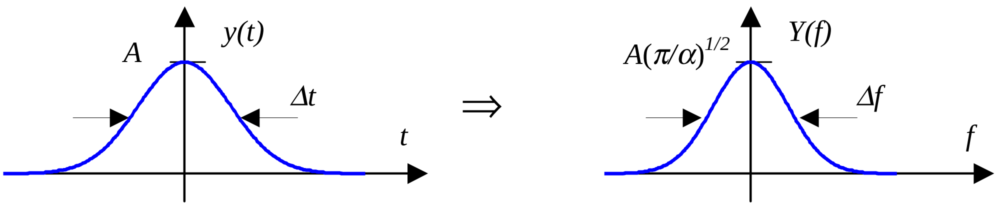
Bedeutung: $|Y(f)|^2 \rightarrow$ natürliche Linienbreite von Atom-Spektrallinien



$$y(t) = \begin{cases} Ae^{-\delta t} \sin 2\pi f_0 t & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$Y(f) = \frac{A}{2\delta}\left(\frac{-j\delta}{\delta + j2\pi(f - f_0)} + \frac{j\delta}{\delta + j2\pi(f + f_0)} \right)$$

5) Gauß-Impuls (Gaußglocke)

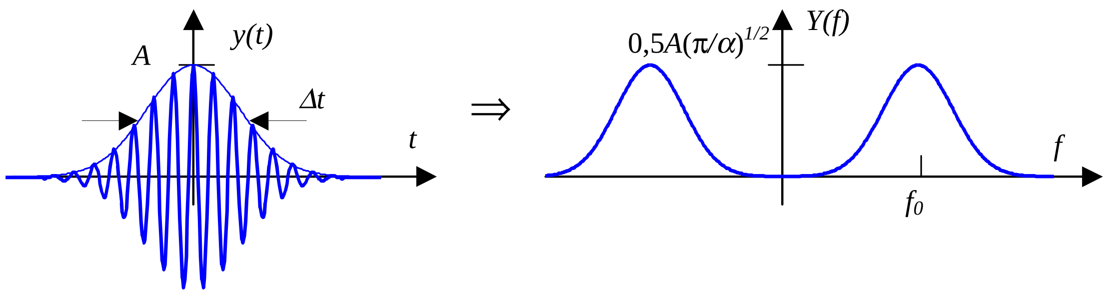


$$y(t) = Ae^{-\alpha t^2}$$

$$Y(f) = A\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} e^{-\frac{\pi^2 f^2}{\alpha}}$$

6) Gauß-Wellenpacket

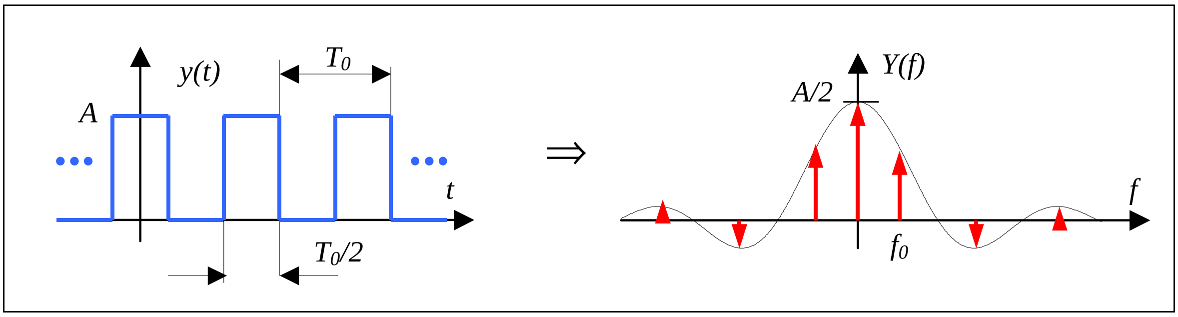
Bedeutung: Dopplerverbreiterung von Spektrallinien,



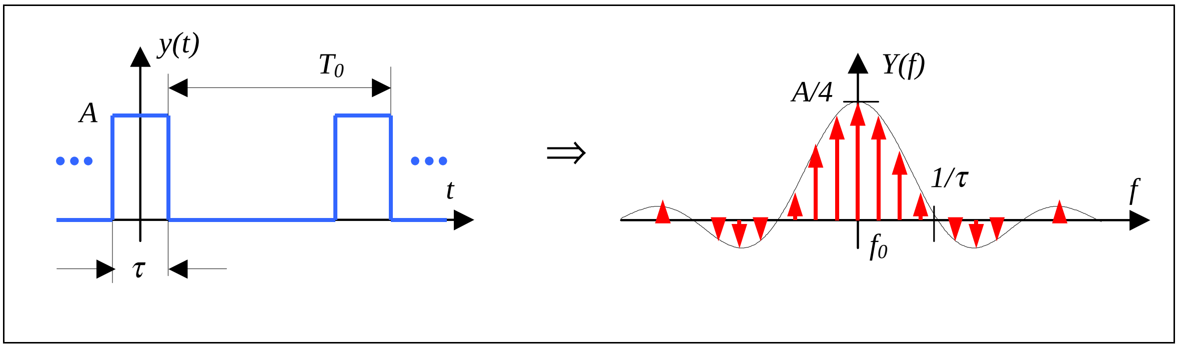
$$y(t) = Ae^{-\alpha t^2} \cos(2\pi f_0 t)$$

$$Y(f) = \frac{A}{2}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} \left(e^{-\frac{\pi^2 (f - f_0)^2}{\alpha}} + e^{-\frac{\pi^2 (f + f_0)^2}{\alpha}}\right)$$

7) Rechteckschwingung (periodisch)

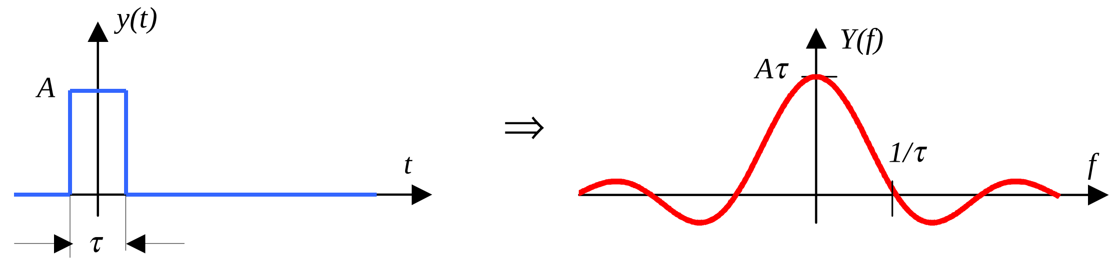


8) Rechteck-Impulszug (periodisch)



9) Rechteck-Impuls (transient)

Bedeutung: Spaltfunktion in der Optik

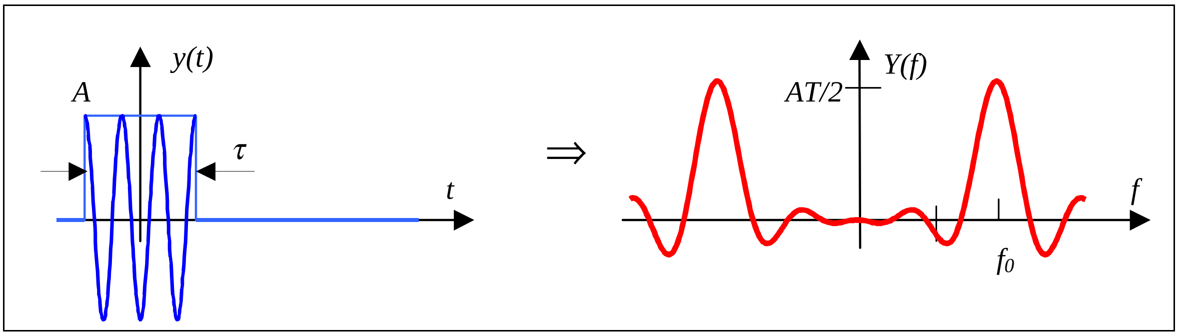


$$y(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t < |T/2| \\ A \text{ für } -T/2 \leq T \leq T/2 \end{cases}$$

$$Y(f) = A\tau \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\tau(2\pi f)\right)}{\left(\frac{1}{2}\tau(2\pi f)\right)}$$

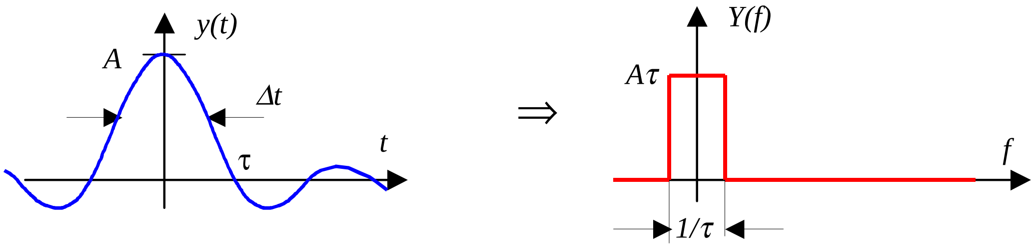
10) Zeitbegrenzter Sinus/Kosinus (transient)

Bedeutung: Fensterfunktion in der digitalen Messtechnik



11) Umkehrung - Spaltfunktion als Zeitfunktion

Bedeutung: Idealer Tiefpass (Impulsantwort als Zeitfunktion ist nichtkausal !)

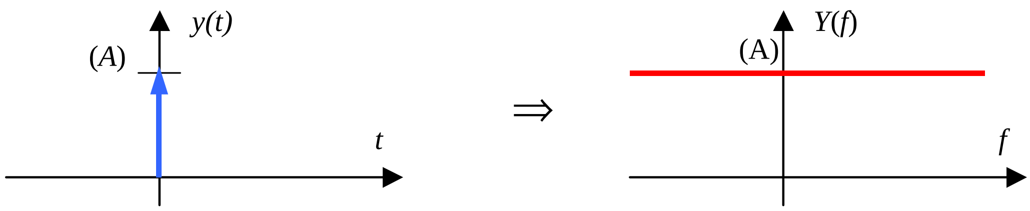


$$y(t) = A\frac{\sin\left(\frac{1}{2\tau}(2\pi t)\right)}{\left(\frac{1}{2\tau}(2\pi t)\right)}$$

$$Y(f) = \begin{cases} 0 \text{ für } f < |1/2\tau| \\ A\tau \text{ für } -1/2\tau \leq f \leq 1/2\tau \end{cases}$$

12) Dirac-Impuls (transient)

Bedeutung: Impulsantwort-Messungen zur Bestimmung der Übertragungsfunktion

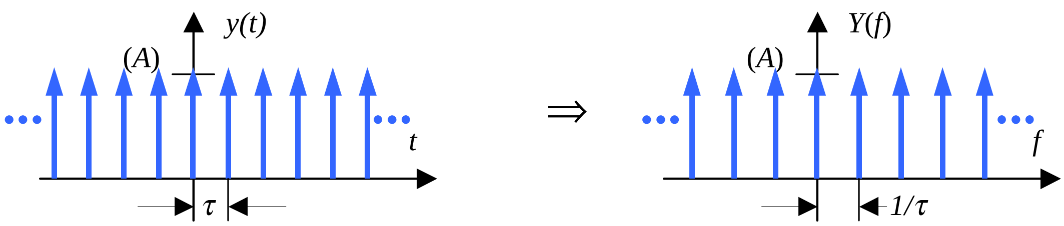


$$y(t) = A\delta(t)$$

$$Y(f) = A$$

13) Dirac-Impulszug, δ-Kamm (periodisch)

Bedeutung: Modenkopplung zur Erzeugung ultrakurzer Laserimpulse



$$y(t) = A\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau)$$

$$Y(f) = A\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n\frac{1}{\tau})$$