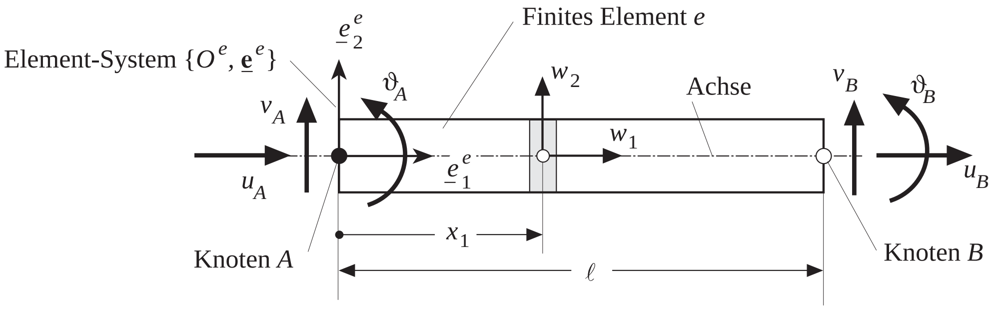
Interpolations- und Verzerrungsmatrix, sowie die Massen- und Steifigkeitsintegrale eines 2D Balken-Elements



Probemstellung

Die Verformungen der Balkenachse eines ebenen Balkenelements im Element-Koordinatensystem sind u(x,t) = {u1, u2}, wo x die Materialkoordinate laengs der Balkenachse ist. Die Knotenkoordinaten sind ze(t).
Gesucht ist die Interpolationsmatrix N(xi), wo xi = x/le, le = Elementlaenge, fuer u(x,t) = Ne(xi) ze(t).
Die linearen Verzerrungsbeziehungen lauten epse = {eps1, kappa3} = {u1' , u2''}. Finde epse = Be * ze ,
also Be = Le Ne.

Annahmen:

1. Das 2D Element hat die Knoten A und B und 2*3 = 6 Freiheitsgrade, also nFe = 6.
2. Knotenkoordinaten sind ze(t) = {uA,vA,thetaA, uB,vB,thetaB}.
3. Das Element-Koordinatensystem liegt im Knoten A des Balkens, somit gilt 0 <= xi <= l.

Aufgaben:

1. Belege die Interpolationsmatrix Ne. Ne ist eine 2x6 Matrix.
2. Stelle die Verzerrungsmatizen Be der Beziehung epse = Be * ze auf. Be ist eine 2x6 Matrix.
3. Zeige, dass sich mit Ne auch Starrkoerperbewegungen darstellen lassen:
   a) Verschiebung in 1, b) Verschiebung in 2, c) Drehung um Mittelpunkt des Elements um 3-Achse.
4. Zeige, dass Starrkoerperbewegungen keine Verzerrungen verursachen.
5. Bestimme die Element-Matrizen der Massenintegrale Cte und Me.
6. Bestimme die lineare Element-Steifigkeitsmatrix Ke

Festlegung der Parameter

```
ElementName = "Balken 2D";   (* Benennung des FE-Elements                    *)
```

Loesung

■ 1. Belegung der Interpolationsmatrix Ne fuer u = Ne(xi) ze

```
nFe = 6 ;      (* Dimension von ze *)
nfk = nFe / 2  (* Dimension von zFk, die FHG eines Knoten *)
```

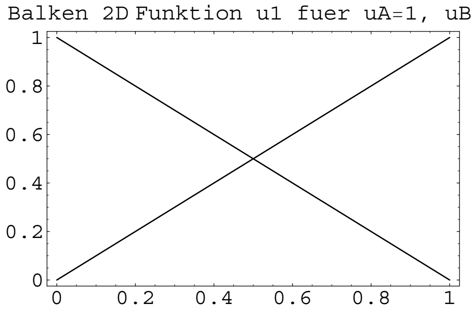
3

```
Ne = {{1 - xi, 0, 0, xi, 0, 0}, {0, 1 - 3 xi^2 + 2 xi^3, le xi - 2 le xi^2 + le xi^3, 0, 3 xi^2 - 2 xi^3, -le xi^2 + le xi^3}};
MatrixForm[Ne]
```

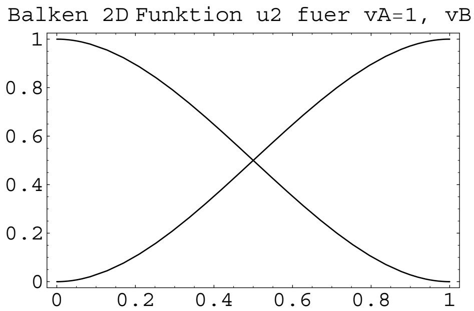
$$\begin{pmatrix} 1-xi & 0 & 0 & xi & 0 & 0 \\ 0 & 1-3\,xi^2+2\,xi^3 & le\,xi-2\,le\,xi^2+le\,xi^3 & 0 & 3\,xi^2-2\,xi^3 & -le\,xi^2+le\,xi^3 \end{pmatrix}$$

Darstellung der Funktionswerte fuer Einheitswerte von ze

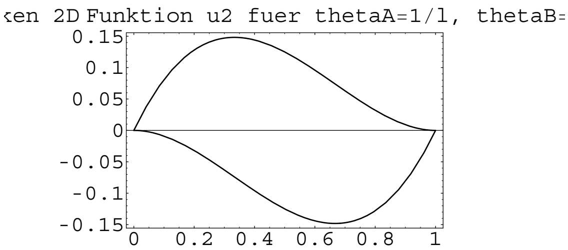
```
Plot[{Ne[[1,1]],Ne[[1,4]]},{xi,0,1},
      PlotLabel-> ElementName"Funktion u1 fuer uA=1, uB=1",
      Frame -> True];
```




```
Plot[{Ne[[2,2]],Ne[[2,5]]},{xi,0,1},
      PlotLabel-> ElementName"Funktion u2 fuer vA=1, vB=1",
      Frame -> True];
```




```
Plot[{Ne[[2,3]]/.le->1,Ne[[2,6]]/.le->1},{xi,0,1},
      PlotLabel-> ElementName"Funktion u2 fuer thetaA=1/l, thetaB=1/l",
      Frame -> True];
```



■ 2. Verzerrungsmatrizen Be = Le Ne der Beziehung epse = Be * ze , wo L = diag {∂ /∂x, ∂ /∂x^2} und ∂ /∂xi / le,

```
Be = Table[0, {2}];
Be[[1]] = 1 / le * D[Ne[[1]], {xi, 1}];
Be[[2]] = 1 / le^2 * D[Ne[[2]], {xi, 2}];
MatrixForm[Be]
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{le} & 0 & 0 & \frac{1}{le} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-6+12\,xi}{le^2} & \frac{-4\,le+6\,le\,xi}{le^2} & 0 & \frac{6-12\,xi}{le^2} & \frac{-2\,le+6\,le\,xi}{le^2} \end{pmatrix}$$

■ 3. Darstellung von Starrkoerperbewegungen durch Ne.

```
zes1  = {1,0,0,1,0,0}*u
zes2  = {0,1,0,0,1,0}*v
zes3  = {0,-le/2*theta,theta,0,le/2*theta,theta}
```

{u, 0, 0, u, 0, 0}

{0, v, 0, 0, v, 0}

$$\left\{0,\ -\frac{le\ theta}{2},\ theta,\ 0,\ \frac{le\ theta}{2},\ theta\right\}$$

```
us1 = Simplify[Ne . zes1]
```

{u, 0}

```
us2 = Simplify[Ne . zes2]
```

{0, v}

```
us3 = Expand[Ne . zes3]
```

$$\left\{0,\ -\frac{le\ theta}{2} + le\ theta\ xi\right\}$$

■ 4. Starrkoerperformen ergeben in linearer Naeherung keine Verzerrungen, also epse = Be zes = 0

```
Simplify[Be.zes1]
```

{0, 0}

```
Simplify[Be.zes2]
```

{0, 0}

```
Simplify[Be.zes3]
```

{0, 0}

■ 5.1 Cte(3, nFe) = Integral [Ne, {xi, 0, 1}] * me

```
Cte = me Integrate[Transpose[Ne], {xi, 0, 1}];
me/12 MatrixForm[Cte/me*12]
```

$$\frac{1}{12}\ me \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \\ 0 & le \\ 6 & 0 \\ 0 & 6 \\ 0 & -le \end{pmatrix}$$

wir fuegen eine Nullspalte dazu, um 3D-Operationen spaeter ausführen zu können.

```
Cte = Transpose[Join[Transpose[Cte], {Table[0, {nFe}]}]];
```

■ 5.2 Me(nFe, nFe) = Integral [Ne^T . Ne, {xi, 0, l}] * me,

```
Me = me*Integrate[Transpose[Ne].Ne, {xi, 0, 1}];
```

```
me/420*MatrixForm[Me/me*420]
```

$$\frac{1}{420}\,\text{me}\begin{pmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22\,\text{le} & 0 & 54 & -13\,\text{le} \\ 0 & 22\,\text{le} & 4\,\text{le}^2 & 0 & 13\,\text{le} & -3\,\text{le}^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13\,\text{le} & 0 & 156 & -22\,\text{le} \\ 0 & -13\,\text{le} & -3\,\text{le}^2 & 0 & -22\,\text{le} & 4\,\text{le}^2 \end{pmatrix}$$

■ 6. Integrale der linearen Element-Steifigkeitsmatrix Ke = Integral [(Be)T . He . Be, {xi, 0, 1}]

```
He = DiagonalMatrix[{Ae Ee, I33e Ee}]; He // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \text{Ae Ee} & 0 \\ 0 & \text{Ee I33e} \end{pmatrix}$$

```
Ke = Transpose[Be] . He . Be;
Ke = le*Integrate[Ke, {xi, 0, 1}];
MatrixForm[Ke/Ee*le^3]*Ee/le^3
```

$$\frac{\text{Ee}\begin{pmatrix} \text{Ae le}^2 & 0 & 0 & -\text{Ae le}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12\,\text{I33e} & 6\,\text{I33e le} & 0 & -12\,\text{I33e} & 6\,\text{I33e le} \\ 0 & 6\,\text{I33e le} & 4\,\text{I33e le}^2 & 0 & -6\,\text{I33e le} & 2\,\text{I33e le}^2 \\ -\text{Ae le}^2 & 0 & 0 & \text{Ae le}^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12\,\text{I33e} & -6\,\text{I33e le} & 0 & 12\,\text{I33e} & -6\,\text{I33e le} \\ 0 & 6\,\text{I33e le} & 2\,\text{I33e le}^2 & 0 & -6\,\text{I33e le} & 4\,\text{I33e le}^2 \end{pmatrix}}{\text{le}^3}$$