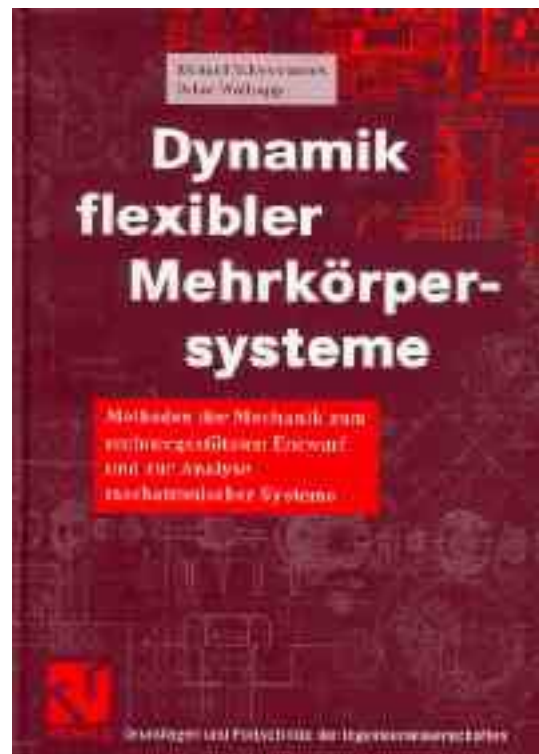


Richard Schwertassek • Oskar Wallrapp

# Dynamik flexibler Mehrkörpersysteme

Methoden der Mechanik zum  
rechnergestützten Entwurf und  
zur  
Analyse mechatronischer  
Systeme



Friedr. Vieweg & Sohn

Braunschweig/Wiesbaden

## Vorwort

Bei der Entwicklung technischer Produkte, wie z. B. Luft- und Raumfahrzeuge, Schienen- und Straßenfahrzeuge, Maschinen, Roboter oder Prothesen, zeigt sich ein wachsender Trend zur Einsparung von Material und Energie und, damit verbunden, zu leichter Bauweise. Beispiele hierzu finden sich in Kapitel 1. Aus der Leichtbauweise resultierende Probleme im Bewegungsverhalten und in der Aufnahme der zu den Bewegungen gehörenden Kräfte lassen sich durch Einsatz von zunehmend kostengünstigen Sensoren, Aktuatoren und Elektronik, also von Regelungstechnik, beherrschen. In diesem Zusammenhang spricht man auch oft von "intelligenten" Systemen und Mechatronik. Viele Probleme bei der Analyse und beim Entwurf mechatronischer Systeme erfordern deren Modellierung als Mehrkörpersysteme, wobei wegen der leichten Bauweise auch elastische Verformungen der Körper berücksichtigt werden müssen. Die Entwicklung der Methode der Mehrkörpersysteme gilt für Systeme starrer Körper seit Mitte der achtziger Jahre, mit Verfügbarkeit der sog.  $O(n)$ -Formalismen, als weitgehend abgeschlossen. Für Mehrkörpersysteme mit verformbaren Körpern trifft dies aber nicht zu, im Gegenteil: in der Literatur zur Mehrkörperdynamik findet sich bis in die jüngste Zeit eine wachsende Zahl von Publikationen zum Thema des vorliegenden Buchs.

Eines der Ziele der Mehrkörperdynamik ist die Angabe effizienter Formalismen zur rechnergestützten Erstellung der Bewegungsgleichungen. Die Entwicklung der auf diesen Gleichungen aufbauenden Simulationsprogramme erfordert neben den Formalismen auch noch die Lösung einer ganzen Palette anderer Aufgaben, z. B. die numerische Lösung der Systemgleichungen und den Entwurf eines benutzerfreundlichen und "offenen" Simulationsprogramms, d. h. von Software, die mit der Vielzahl der zum Entwurf mechatronischer Systeme benötigten Rechenprogramme kommunizieren kann. Solche Probleme werden in diesem Buch nicht behandelt. Die Darstellung konzentriert sich auf die Erläuterung der Methoden der Mechanik zur Entwicklung der Rechenprogramme. Die Beherrschung dieser Methoden wird auch zur kritischen Beurteilung von Simulationsergebnissen benötigt, ein Gesichtspunkt, der wegen zunehmender Verbreitung kommerziell verfügbarer Programme an Bedeutung gewinnt. An den eben genannten Zielen orientiert sich die Auswahl des Stoffs. In Kapitel 2 findet sich eine Darstellung der Grundlagen zur Modellierung flexibler Körper in Mehrkörpersystemen, der Kontinuumsmechanik und Elastizitätstheorie. Ausgehend von diesen Modellvorstellungen lassen sich Modelle der technischen Mechanik, wie der starre Körper, Kontinua mit inneren Bindungen, Finite-Elemente-Strukturen und Mehrkörpersysteme, durch Angabe entsprechender Zwangsgleichungen für die Bewegungen der Punkte eines dreidimensionalen Kontinuums gewinnen. Die Herleitung der Bewegungsgleichungen erfordert dann die Prinzipie der Mechanik, die in Kapitel 3 erläutert sind. Die Prinzipie werden in den Kapiteln 4 und 5 genutzt zur Angabe der Bewegungsgleichungen zweier Modelle flexibler Körper, von Balken als Beispiel eines Kontinuums mit inneren Bindungen und von Finite-Elemente-Strukturen. Kapitel 6 enthält Methoden der Mehrkörperdynamik.

Die Verformungen der Körper in Mehrkörpersystemen sind bei vielen Anwendungen klein. Dies kann man zur Linearisierung der Bewegungsgleichungen in den Variablen zur Beschreibung der Verformungen nutzen. Die Angabe der linearisierten Bewegungsgleichungen führt zu einem speziellen Linearisierungsproblem, der Berücksichtigung geometrischer Steifigkeiten. Das Problem läßt sich am Beispiel der Bewegungsgleichungen von Balken – im Vergleich zu Finite-Elemente-Strukturen einfach – erläutern. Eine Linearisierung der Bewegungsgleichungen für kleine Verformungen erfordert die Abspaltung dieser Bewegungen der Körper von möglicherweise großen Referenzbewegungen mit großen Beschleunigungen. Infolge solcher Bewegungen ergeben sich große Trägheitskräfte. Die Verformungen bleiben nur klein, wenn die Körper gegenüber diesen Belastungen einen hohen Verformungswiderstand besitzen. Damit wird aber, wie z. B. aus der Elastostabilität bekannt, eine Berücksichtigung geometrischer Steifigkeiten in den linearisierten Gleichungen für die Teilbewegungen mit geringem Verformungswiderstand erforderlich.

Die Finite-Elemente-Methode kann man als rechnerorientierte Form des Ritzschen Verfahrens ansehen, wobei einfache Ansätze für die Bewegungen von Teilen eines Körpers, den finiten Elementen, zu einem Ansatz zur Darstellung der Verformungen eines komplex geformten Körpers zusammengesetzt werden. Nach einer Erläuterung des Ritzschen Verfahrens sind in Kapitel 5 die wichtigsten Ergebnisse der Methode der finiten Elemente zusammengetragen, die zur Berücksichtigung solcher Modelle in Mehrkörpersystemen benötigt werden. Die Zusammenstellung umfaßt insbesondere auch Angaben zur Berechnung der Trägheitskräfte, die infolge von Referenzbewegungen auf Finite-Elemente-Strukturen wirken und Angaben zur Ermittlung geometrischer Steifigkeiten für diese Modelle.

Zur Berücksichtigung der Verformungen von Körpern in Mehrkörpersystemen gibt es eine ganze Reihe von Vorschlägen. Die vorliegende Darstellung beschränkt sich auf das bei kleinen Verformungen günstigste Verfahren, die Methode des bewegten Bezugssystems. Bei dieser Vorgehensweise wird die Bewegung der Körper dargestellt als Überlagerung von Referenzbewegung und Verformung. Das zu den Verformungen gehörende Verschiebungsfeld der Punkte eines Körpers wird nach dem Ritzschen Verfahren approximiert. Ausgehend von den Modellvorstellungen und Methoden der Mechanik aus den Kapiteln 2 bis 5 enthält Kapitel 6 die der Methode des bewegten Bezugssystems angepaßte Beschreibung von Kinematik und Kinetik. Die kinematischen und kinetischen Bewegungsgleichungen eines repräsentativen Körpers des Systems werden zunächst unter Verwendung der Modellvorstellungen der Kontinuumsmechanik formuliert. Durch Angabe entsprechender Bindungsgleichungen erhält man dann die in Anwendungen benötigten, speziellen Modelle. Die Allgemeinheit der Ausgangsgleichungen ermöglicht die Definition einer allgemeinen Datenschnittstelle zur Beschreibung flexibler Körper in Mehrkörpersystemen. Sie erlaubt die Entwicklung von Preprozessoren zur Ermittlung der Daten aus beliebigen Modellen, insbesondere auch unter Verwendung beliebiger Finite-Elemente-Programme, und sie vereinfacht den Austausch von Modellen und den Vergleich von Simulationsergebnissen – vgl. Hauptabschnitt 6.4. Der letzte Hauptabschnitt 6.5 des Kapitels ist der Angabe von Formalismen zur Ermittlung der Deskriptor- und der Zustandsform der Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen mit flexiblen Körpern gewidmet. Die Effizienz von Rechenprogrammen zur Simulation solcher Systeme kann durch die sog. modale Beschreibung der Bewegungen der Körper – im Vergleich zur Berücksichtigung kompletter Finite-Elemente-Modelle – erheblich gesteigert werden. Dieser Vorteil wird aber mit dem Problem der Angabe geeigneter Ansatzfunktionen erkaufte. Gesichtspunkte zur Wahl dieser Funktionen sind im Schlußabschnitt zusammengetragen.

Die hier vorgestellten Methoden werden an Beispielen erläutert, die bei den Modellen aus Kapitel 5 und 6 vergleichsweise komplex sind. Zu ihrer Behandlung stehen glücklicherweise symbolische und numerische Computer Algebra Systeme wie Mathematica, Maple und Matlab zur Verfügung. Die Benutzung solcher Programme befreit von lästigen Rechnungen, erlaubt aber die Kontrolle eines jeden Rechenschritts. Das Nachrechnen der Beispiele soll mit Möglichkeiten zur kritischen Beurteilung der Tragfähigkeit von Aussagen vertraut machen, die mit komplexen Modellen und Simulationsprogrammen gewonnen wurden: Geeignete, einfache Modelle zum Systemverhalten liefern ja oft Hinweise zur Verbesserung der komplexen Modelle technischer Systeme. Die in den Kapiteln 5 und 6 dokumentierten Beispiele wurden mit Mathematica, Version 2.2, bearbeitet. Die zugehörigen Notebook-Files sind unter der Internet-Adresse

<http://www.vieweg.de/downloads/>

zu finden.

Abschließend noch ein paar Angaben zur äußeren Form der Darstellung. Die Bezeichnungsweise ist im Anhang erläutert. Gleichungen, Bilder, Tabellen und Beispiele sind in jedem Kapitel, mit 1 beginnend, numeriert, wobei die Kapitelnummer der Gleichungs-, Bild-, Tabellen- und Beispielnummer vorangestellt ist. Verzeichnisse der Seiten, auf denen sich die Bilder, Tabellen und Beispiele befinden, sind im Anschluß an das Inhaltsverzeichnis angegeben, um ihr Auffinden zu erleichtern. Literaturzitate sind am Schluß des Buchs und für jedes Kapitel separat zusammengestellt.

Wie eingangs gesagt, kann die Entwicklung der Methode der Mehrkörpersysteme für Systeme mit flexiblen Körpern keineswegs als abgeschlossen angesehen werden. Neben der Methode des bewegten Bezugssystems werden eine Reihe anderer Verfahren entwickelt, die u. a. auch eine Analyse großer Verformungen erlauben. Die Verfahren haben ihre Wurzeln in den derzeit noch konkurrierenden Methoden der Mehrkörpersysteme und der finiten Elemente. Ihre weitere Entwicklung sollte aber eine Synthese der beiden Modellvorstellungen und die Entwicklung entsprechender Rechenprogramme erlauben. Das Erreichen des Ziels erfordert nicht zuletzt ein vertieftes Verständnis der beiden Modellvorstellungen, zu dem das vorliegende Buch einen Beitrag leisten soll.

Einige der hier dokumentierten Ergebnisse wurden in Forschungsvorhaben der Deutschen Forschungsgemeinschaft erarbeitet. Wir bedanken uns für die Unterstützung. Die Alexander-von-Humboldt-Stiftung ermöglichte u. a. einen Forschungsaufenthalt von Herrn Prof. A. A. Shabana, University of Illinois at Chicago am Institut für Robotik und Systemdynamik des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt (DLR) in Oberpfaffenhofen. Seminare während dieses Aufenthalts und die damit initiierte Zusammenarbeit mit Herrn Shabana trugen zur Klärung der hier verwendeten Modellvorstellungen bei. Beiden, der Alexander-von-Humboldt-Stiftung und Herrn Shabana gebührt unser Dank. Außerdem bedanken wir uns bei Herrn Prof. P. Hagedorn, Darmstadt, der den Anstoß zu dieser Dokumentation gab und last not least bei unseren Familien für die Geduld, mit der sie den zu ihren Lasten gehenden Zeitbedarf zur Fertigstellung des Buchs verkraftet haben.

Oberpfaffenhofen/Weßling, im November 1998

*Richard Schwertassek*

*Oskar Wallrapp*

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b> .....	VI
<b>Bilderverzeichnis</b> .....	XV
<b>Tabellenverzeichnis</b> .....	XVI
<b>Verzeichnis der Beispiele</b> .....	XVI
<b>1 Einleitung</b> .....	1
1.1 Computermechanik.....	1
1.2 Neuere Entwicklungen in der Mehrkörperdynamik.....	4
1.3 Zielsetzung.....	10
<b>2 Elastizitätstheorie</b> .....	17
2.1 Beschreibung der Bewegung.....	17
2.2 Verzerrungszustand.....	21
2.2.1 Allgemeine Koordinaten .....	21
2.2.2 Deformationsgradient .....	23
2.2.3 Bewegung von Linien-, Flächen- und Volumenelementen .....	23
Linienelemente .....	25
Volumina .....	26
Flächenelemente .....	26
2.2.4 Verschiebungsgradient.....	27
2.2.5 Verzerrungstensoren .....	29
2.2.6 Geometrische Linearisierung.....	33
2.3 Spannungszustand.....	40
2.3.1 Volumen- und Oberflächenkräfte.....	41
2.3.2 Cauchyscher Spannungstensor .....	44
2.3.3 Piolasche Spannungstensoren.....	50
2.3.4 Transformationsgleichungen .....	56
2.4 Materialgesetz .....	57
2.4.1 Anforderungen an Materialgleichungen.....	57
2.4.2 Physikalische Linearisierung und Hookesches Gesetz.....	61
2.4.3 Verzerrungsenergie elastischer Körper.....	64
2.5 Bewegungsgleichungen.....	66
2.5.1 Grundbegriffe.....	67
2.5.2 Cauchysche Bewegungsgleichungen.....	68

2.5.3	Randbedingungen .....	70
2.5.4	Impuls- und Drehimpulssatz .....	72
2.6	Zusammenfassung .....	74
2.6.1	Nichtlineare Elastizitätstheorie .....	75
	Verschiebungskoordinaten .....	75
	Verzerrungen und Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen.....	75
	Spannungen und Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen .....	76
	Bewegungsgleichungen.....	77
	Rand- und Anfangsbedingungen .....	77
2.6.2	Linearisierte Elastizitätstheorie .....	78
	Physikalische Linearisierung .....	78
	Geometrische Linearisierung .....	79
<b>3</b>	<b>Prinzipie der Mechanik</b> .....	<b>81</b>
3.1	Grundbegriffe .....	81
3.1.1	Zwangsbedingungen bei Modellen der technischen Dynamik.....	81
	Bindungen und Zwangsgleichungen .....	82
	Kontinua mit inneren Bindungen .....	83
	Der starre Körper .....	84
	Finite-Elemente-Strukturen.....	85
	Mehrkörpersysteme .....	86
3.1.2	Klassifikation der Zwangsgleichungen .....	88
	Rheonome und skleronome Zwangsgleichungen.....	88
	Implizite und explizite Zwangsgleichungen .....	88
	Zwangsgleichungen für die Geschwindigkeiten .....	89
3.1.3	Virtuelle Verschiebungen und virtuelle Geschwindigkeiten .....	91
3.1.4	Variation eines Funktionals.....	94
3.2	Die Prinzipie von d'Alembert, Jourdain und Hamilton .....	97
3.2.1	Aussagen der Prinzipie .....	98
3.2.2	Virtuelle Arbeit der durch Spannungen repräsentierten Kräfte .....	99
3.2.3	Das d'Alembertsche Prinzip.....	100
3.2.4	Das Jourdainsche Prinzip.....	105
3.2.5	Das Hamiltonsche Prinzip .....	106
<b>4</b>	<b>Modellierung von Balken</b> .....	<b>111</b>
4.1	Modellvorstellung und Beschreibung der Bewegung .....	111
4.1.1	Balkenmodelle und Verschiebungsgrößen.....	111
	Modellvorstellung .....	111
	Kinematik schubweicher Balken.....	112
	Verschiebungsgrößen bei Bernoulli-Balken.....	115

---

4.1.2	Differentialgeometrie von Raumkurven.....	116
4.1.3	Verformungsgrößen bei Bernoulli-Balken.....	122
4.1.4	Energieausdrücke in Verschiebungs- und Verformungsgrößen.....	126
4.2	Bewegungsgleichungen bei kleinen Belastungen.....	130
4.2.1	In den linearisierten Gleichungen benötigte Näherungen.....	130
	Explizite Zwangsgleichungen.....	130
	Transformationsgleichungen.....	133
	Verzerrungen und elastisches Potential.....	134
4.2.2	Bewegungsgleichungen und Randbedingungen.....	137
	Modellannahmen.....	137
	Variation der kinetischen Energie.....	138
	Variation der potentiellen Energie.....	139
	Virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte.....	140
	Hamiltonsches Prinzip.....	141
	Bewegungsgleichungen und Randbedingungen.....	142
	Zusammenfassung.....	145
4.3	Bewegungsgleichungen bei großen Belastungen.....	145
4.3.1	Modellannahmen.....	145
4.3.2	Linearisierte Bewegungsgleichungen in Verschiebungsgrößen.....	146
	Variation der kinetischen Energie.....	146
	Variation der potentiellen Energie.....	148
	Bewegungsgleichungen und Randbedingungen.....	149
	Linearisierung.....	150
	Geometrische Steifigkeiten.....	154
4.3.3	Linearisierte Bewegungsgleichungen in Verformungsgrößen.....	155
4.3.4	Ermittlung geometrischer Steifigkeiten.....	159
4.3.5	Gleichgewichtsbedingungen am verformten Balkenelement.....	165
<b>5</b>	<b>Finite Elemente Modelle.....</b>	<b>167</b>
5.1	Die Verfahren von Ritz und Galerkin.....	167
5.1.1	Eigenfunktionen.....	167
5.1.2	Die Verfahren von Ritz und Galerkin für diskrete Systeme.....	171
	Grundgedanke des Ritzschen Verfahrens.....	171
	Spezielle Formen des Verfahrens.....	172
	Deutungen der Näherungslösung nach Ritz.....	173
	Das Galerkinsche Verfahren.....	174
5.1.3	Modifikation der Verfahren für kontinuierliche Systeme.....	175
	Ein paar Ergebnisse aus der Variationsrechnung.....	176
	Das Ritzsche Verfahren für kontinuierliche Systeme.....	177

	Randbedingungen bei den Verfahren von Ritz und Galerkin.....	178
5.2	Kinematik von Finite-Elemente-Strukturen.....	185
5.2.1	Die Finite-Elemente-Methode .....	186
5.2.2	Bewegung eines Elements.....	188
	Bewegung der Punkte eines Elements .....	188
	Interpolationsmatrix .....	190
5.2.3	Bewegung der Finite-Elemente-Struktur.....	198
5.3	Kinetik von Finite-Elemente-Strukturen .....	203
5.3.1	Bewegungsgleichungen.....	203
5.3.2	Lösung statischer und dynamischer Probleme .....	216
	Lineare Analyse.....	217
	Nichtlineare Analyse .....	220
	Geometrische Steifigkeiten .....	226
5.4	Finite-Elemente-Strukturen mit bewegtem Bezugssystem .....	228
5.4.1	Bewegung des Bezugssystems .....	228
5.4.2	Verallgemeinerte Trägheitskräfte.....	230
	Verformungsbeschleunigung.....	230
	Translationsbeschleunigung.....	230
	Rotationsbeschleunigung .....	231
	Coriolisbeschleunigung.....	235
	Zentrifugalbeschleunigung .....	235
	Zusammenfassung.....	238
5.4.3	Bewegungsgleichungen.....	238
<b>6</b>	<b>Mehrkörpersysteme.....</b>	<b>243</b>
6.1	Modellvorstellung.....	244
6.2	Kinematik.....	249
6.2.1	Absolutbewegung der Körper.....	249
	Bewegungen der Bezugssysteme der Körper .....	250
	Bewegungen der Punkte der Körper .....	250
	Starre Körper.....	251
	Flexible Körper .....	252
	Balken und Finite-Elemente-Strukturen.....	253
	Verformungsansatz.....	255
	Wahl des Körper-Koordinatensystems .....	257
	Lage- und Geschwindigkeitsvariable.....	259
	Bewegung der Knoten .....	261
6.2.2	Relativbewegung der Knoten .....	267
	Relativbewegung von Knoten benachbarter Körper.....	267



---

	Absolut- und Relativbewegung .....	269
6.2.3	Bindung der Relativbewegung durch Gelenke.....	273
	Implizite Bindungsgleichungen .....	273
	Explizite Bindungsgleichungen .....	274
	Absolut- und Relativbewegung .....	277
6.3	Kinetik eines repräsentativen Körpers.....	291
6.3.1	Kräfte am Körper $i$ und kinetische Grundgleichungen.....	291
6.3.2	Generalisierte Massen.....	294
6.3.3	Generalisierte Kräfte .....	296
	Volumenkräfte .....	296
	Innere Kräfte .....	300
	Oberflächenkräfte.....	303
6.3.4	Kraftsysteme in Krafterelementen und Gelenken .....	304
6.3.5	Linearisierung und geometrische Steifigkeiten.....	307
	Linearisierung.....	309
	Geometrische Steifigkeiten .....	312
	Berücksichtigung geometrischer Steifigkeiten in Mehrkörpersystemen.....	317
6.3.6	Wahl des Körperbezugssystems.....	322
	Impuls und Drehimpuls.....	322
	Hauptachsensystem .....	324
	Tisserand-System.....	325
	Buckens-System.....	326
	Durch Starrkörperformen festgelegte Koordinatensysteme.....	327
6.4	Daten von Mehrkörpersystemen .....	334
6.4.1	Daten der Körper .....	334
	Bewegung der Knotenkoordinatensysteme.....	335
	Generalisierte Massen.....	336
	Generalisierte Trägheitskräfte .....	339
	Innere Kräfte .....	341
	Geometrische Steifigkeiten .....	342
6.4.2	Ein objektorientierter Datensatz zur Beschreibung der Körper.....	343
	Standarddaten von Balkenmodellen .....	347
	Standarddaten von Finite-Elemente-Modellen.....	349
6.4.3	Standarddaten von Balkenmodellen .....	351
6.4.4	Standarddaten von FE-Modellen – Knotenkoordinaten .....	360
	Bewegung der Knotenkoordinatensysteme.....	362
	Generalisierte Massen und Trägheitskräfte .....	363
	Innere Kräfte .....	369

Geometrische Steifigkeiten .....	370
Spannungen an den Knoten .....	371
Zusammenfassung .....	371
6.4.5 Standarddaten von FE-Modellen – modale Koordinaten.....	377
6.4.6 Restliche Daten eines Mehrkörpersystems.....	380
Umgebung .....	380
Gelenke .....	380
Kraftelemente .....	381
Topologie .....	381
6.5 Formalismen.....	382
6.5.1 Deskriptorform der Bewegungsgleichungen .....	382
6.5.2 Zustandsform der Bewegungsgleichungen.....	393
Explizite Bindungsgleichungen .....	393
Generalisierte Kräfte .....	395
Zustandsgleichungen und Zwangskräfte.....	396
Deutung der Gleichungen im linearen Vektorraum .....	398
Reibung und geometrische Steifigkeiten.....	400
6.5.3 Bewegungsgleichungen in Relativkoordinaten.....	403
6.5.4 $O(n)$ -Formalismen .....	410
Modell und Notation .....	410
Kinematische Gleichungen .....	413
Kinetische Gleichungen.....	415
Einfluß der Bindungen.....	416
Rekursiv lösbare Blöcke von Systemgleichungen.....	417
Verbesserung der Effizienz des Rechenverfahrens .....	422
Modifikationen für beliebige Systeme.....	425
6.5.5 Hinweise zur Wahl der Ansatzfunktionen .....	428
<b>7 Anhang: Symbole und Bezeichnungen .....</b>	<b>453</b>
7.1 Grundlagen .....	453
7.2 Zusammenfassung von Bezeichnungsregeln .....	458
<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>461</b>
<b>Sachwortverzeichnis .....</b>	<b>473</b>

## Bilderverzeichnis

1-1 Computermech.....3	3-3 FE-Struktur .....85	5-21 Rot. Struktur.....239
1-2 Mehrkörpersyst.....5	3-4 MKS (starre K.)...87	5-22 Verf. Struktur....242
1-3 Große Verform. ....9	3-5 virt. Versch. ....92	6-1 MKS .....245
1-4 SIMPACK ..... 11	3-6 Variation.....95	6-2 Kinematik, MKS . 249
1-5 Gittermast ..... 13	4-1 Balkenmodell.... 112	6-3 Körper-System....259
1-6 Windturbine..... 13	4-2 Raumkurve..... 117	6-4 Tangentensyst.....266
1-7 Flex. Flugzeug.... 14	4-3 Bogenelement.... 121	6-5 Sehnensyst. ....266
1-8 Hubschrauber .... 14	4-4 Nat. Dreibein .... 122	6-6 Gelenk $s$ .....268
1-9 Getriebe..... 15	4-5 Rot. Balken ..... 146	6-7 Balkenstruktur ....279
2-1 Kontinuum ..... 17	4-6 Zentrifugalkraft.. 153	6-8 MKS-Modell .....279
2-2 Lagrange/Euler.... 20	4-7 Längskraft..... 154	6-9 Körper $i = 1$ .....281
2-3 Allg. Koord..... 22	4-8 Kippen..... 163	6-10 Körper $i = 2$ .....281
2-4 Deformation..... 24	4-9 Balkenelement ... 166	6-11 Drehgelenk.....286
2-5 Linienelemente... 28	5-1 Lösg. char. Gl... 170	6-12 Kinetik, MKS ...292
2-6 polare Zerlegung.. 30	5-2 Eigenformen ..... 170	6-13 Schnittkräfte .....305
2-7 Zuordg. $d\mathbf{R}$ , $d\mathbf{r}$ .. 36	5-3 Anfahrmanöver.. 180	6-14 Preprozessoren ..347
2-8 Tensorelemente ... 37	5-4 Ansatzfunkt. .... 183	6-15 FE-Modell.....372
2-9 Dehnung ..... 38	5-5 Querbew. 1 - 3 .. 184	6-16 Gleichgew. a)....390
2-10 Scherung..... 39	5-6 Querbew. 2 ..... 184	6-17 Schnittkräfte .....391
2-11 Scherung + Rot. . 40	5-7 Längsbew..... 185	6-18 Gleichgew. b) ...392
2-12 Spannungsvekt.. 42	5-8 FE-Modell..... 187	6-19 Ergebnisse .....393
2-13 Vorz. Spannung. 44	5-9 Bwg. FE-Mod... 189	6-20 Einfache Kette ...411
2-14 Kräfte an $dV$ .... 44	5-10 Balkenel..... 192	6-21 Erg. S1 – S8.....436
2-15 Spannungskoord.45	5-11 Interpol. Fktn .. 194	6-22 Erg. T1 – T8.....438
2-16 Tetr. $dV$ ..... 48	5-12 Starrk. Formen. 195	6-23 Erg. B2 – B10...439
2-17 Kräfte an $dV$ .... 51	5-13 FE-Struktur..... 199	6-24 Schubkurbel .....440
2-18 Tetr. $dV$ , $dV_0$ .... 55	5-14 Balkenstruktur . 201	6-25 MKS-Modell.....441
2-19 Materialgesetz ... 59	5-15 Materialgesetze. 206	6-26 Schubgelenk .....444
2-20 Isotropie..... 60	5-16 Kräfte ..... 213	6-27 Gleichgew. a,b) . 449
2-21 Blattfeder..... 63	5-17 Systemmatrix... 215	6-28 Konfigurationen. 450
2-22 Randbed..... 71	5-18 Eigenformen.... 220	6-29 Reibkraft, etc. ...450
3-1 Balken ..... 83	5-19 El.-Orient. .... 225	6-30 Gleichgewichtsl. 451
3-2 Starrer Körper .... 84	5-20 Bwg. FE-Mod. 228	

## Tabellenverzeichnis

5.1 Biegefrequenzen.....	185	6.6 Kopplung Teilbewegungen.....	333
5.2 Parameter Balkenstruktur.....	213	6.7 SID, Klasse <i>modal</i> .....	344
5.3 Problemklassen.....	217	6.8 Klassen <i>node</i> , <i>refmod</i> , <i>taylor</i> .....	345
5.4 Ergebnisse Statikanalyse .....	219	6.9 Objekte in <i>taylor</i> .....	346
5.5 Eigenfrequenzen.....	220	6.10 SID, Balken & FE-Modelle... ..	349
5.6 Statikanalyse im Schwerfeld. ....	225	6.11 FE-Ergebnisse für SID .....	362
5.7 Eigenfrequenzen rot. Strukt... ..	242	6.12 Ansatzfunkt. Sehnensyst.....	433
6.1 Eigenfunktionen bei Balken... ..	264	6.13 dto. Tangentensystem .....	434
6.2 Parameter der Körper .....	280	6.14 dto. Buckens-System.....	434
6.3 Eigenformen, -frequenzen.....	282	6.15 Parameter Schubkurbelgetr. . .	440
6.4 Knoten auf Körpern.....	283	6.16 Gelenk-, Topologiedaten.....	441
6.5 Topologiedaten .....	285	6.17 Modelle Kurbel und Koppel . .	451
		6.18 Ergebnisse Gleichgewichtsl... ..	452

## Verzeichnis der Beispiele

2.1 Verzerrung .....	36	5.6 Lineare Analyse.....	217
2.2 Dehnung, Scherung.....	37	5.7 Nichtlineare Analyse .....	223
2.3 Blattfeder .....	63	5.8 Knicklast.....	227
3.1 Starrer Körper (d'Alembert) ..	103	5.9 Lin. Bgl. der rot. Struktur ...	239
3.2 Starrer Körper (Jourdain) .....	106	6.1 Ansatzfunktionen .....	262
4.1 Rotierender Balken.....	158	6.2 Kinematik Balkenstruktur .....	278
4.2 Kippen von Balken.....	162	6.3 Kopplung Teilbewegungen.....	331
4.3 Linearisierte Gleichungen .....	165	6.4 Standarddaten .....	352
5.1 Eigenfunktionen .....	168	6.5 Standarddaten Knotenkoord....	372
5.2 Bewegung rot. Balken.....	180	6.6 Standarddaten modale Koord. .	378
5.3 Form-, Verzerrungsmatrix ....	192	6.7 Deskriptorform.....	386
5.4 Sammelmatrizen .....	201	6.8 Zustandsform .....	401
5.5 Lin. Bewegungsgln.....	213	6.9 Verschiedene Ansatzfunktn....	431
		6.10 Schubkurbel .....	439