

Anhang A Herleitung der Bewegungsgleichungen	1
A.1 Bewegungsgleichungen des starrer Körpers	1
A.2 Herleitung der Bewegungsgleichungen über Impuls- und Drallsatz	3
A.3 Herleitung der Bewegungsgleichungen über virtuelle Leistungen	8
A.4 Gelenke.....	9
A.5 Herleitung der Zwangsbedingungen	10

Zusammenfassend kann man schreiben:

Ein freier starrer Körper hat 6 FHG im Raume, deshalb sind 6 Koordinaten der Lage und 6 Koordinaten der Geschwindigkeit erforderlich:

Position und Orientierung des Körpersystems $\{O_i, \vec{e}_i\}$ bezüglich dem Inertialsystem $\{O_I, \vec{e}_I\}$ sei gegeben durch die Koordinaten des Ortsvektors $\mathbf{p}_i = (\rho_{ix} \ \rho_{iy} \ \rho_{iz})^T$ und Drehmatrix $\mathbf{A}^{li}(\boldsymbol{\vartheta}_i)$ mit den Winkeln $\boldsymbol{\vartheta}_i$ (vgl. Rechenregel 5) und die Geschwindigkeiten seien \mathbf{v}_i und $\boldsymbol{\omega}_i$ so lauten die

Koordinaten der Lage $\mathbf{p}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_i \\ \boldsymbol{\vartheta}_i \end{pmatrix}$ und der **Geschwindigkeit** $\mathbf{z}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i \\ \boldsymbol{\omega}_i \end{pmatrix}$

Zwischen ihnen gilt Glg. $\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{Z}_i \mathbf{z}_i$ wobei $\mathbf{Z}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \tilde{\mathbf{p}}_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_i^{-1} \end{pmatrix}$ (DGL der Kinematik) (2.1)

Matrix \mathbf{E} ist eine 3x3 Einheitsmatrix und \mathbf{H}_i ist die Matrix der Drehkinematik, siehe (2.6)

Die dynamischen Glg. lauten (kompakt)

$$\boxed{\mathbf{M}_i \dot{\mathbf{z}}_i + \mathbf{Q}_i = \mathbf{h}_i} \quad (2.2)$$

(Masse mal Geschwindigkeitsänderung ist Summe aller Kräfte)

mit \mathbf{M}_i als symmetrische Massenmatrix und \mathbf{Q}_i als Matrix der gyroskopischen Kräfte. In \mathbf{h}_i sind alle äußeren Kräfte und Momente zusammengefaßt.

Verwendung des Punktes O_i , der identisch Schwerpunkt S_i ist, dann gilt:

Es gelten die Aussagen $\mathbf{r}_{Si} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{Si}$

$$\mathbf{M}_i = \begin{pmatrix} m_i \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{Si} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} m_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{v}_i \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{I}_{Si} \boldsymbol{\omega}_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{M}_{Si} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Hier sei m_i die Masse, und \mathbf{I}_{Si} die Massenträgheitsmatrix bez. S_i des Körpers i sowie \mathbf{F}_i die Summe aller Kräfte und \mathbf{M}_{Si} die Summe aller Momente um S_i .

Verwendung eines beliebigen Punktes $O_i \neq$ Schwerpunkt S_i , dann gilt:

$$\mathbf{M}_i = \begin{pmatrix} m_i \mathbf{E} & -m_i \tilde{\mathbf{r}}_{Si} \\ m_i \tilde{\mathbf{r}}_{Si} & \mathbf{I}_{Oi} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} m_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{v}_i + m_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_{Si} \\ m_i \tilde{\mathbf{r}}_{Si} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{v}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{I}_{Oi} \boldsymbol{\omega}_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{M}_{Oi} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Hier sei m_i die Masse, \mathbf{r}_{Si} die Position des Schwerpunktes und \mathbf{I}_{Oi} die Massenträgheitsmatrix bez. O_i des Körpers i sowie \mathbf{F}_i die Summe aller Kräfte und \mathbf{M}_{Oi} die Summe aller Momente um O_i .

Hinweis: Die 6 DEs der Kinematik und die der Kinetik sind in sich gekoppelt.

A.2 Herleitung der Bewegungsgleichungen über Impuls- und Drallsatz

Für den freigeschnittenen Körper i sind die kinematischen und kinetischen Größen aufzustellen.

Orientierung, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung

Das Körpersystem $\{O_i, \vec{e}_i\}$, das fest mit dem Körper verbunden ist, (d.h. der gesamte Körper in Bild 2.5) dreht sich gegenüber dem Inertialsystem $\{O_I, \vec{e}_I\}$.

Es gilt mit Drehmatrix A^{li} (α, β, γ), wo α, β, γ die Kardanwinkel der Drehmatrix, vgl.

Rechenregel 5:

$$\vec{e}_I = A^{li} \vec{e}_i \quad \text{und} \quad \dot{A}^{li} = A^{li} {}^i\tilde{\omega}_i \quad \text{oder} \quad {}^i\tilde{\omega}_i = A^{liT} \dot{A}^{li} \quad (2.4)$$

Dabei sind $\omega_i = {}^i\omega_i$ die Koordinaten des Winkelgeschwindigkeitsvektors $\vec{\omega}_i$ des Körpers i bez. Inertialsystem, dargestellt in der Basis \vec{e}_i .

$$\text{Umrechnung} \quad {}^I\omega_i = A^{li} \omega_i \quad (2.5)$$

Für die Winkel-Drehfolge x - y - z gilt außerdem:

$$\begin{pmatrix} \omega_{ix} \\ \omega_{iy} \\ \omega_{iz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta_i \cos\gamma_i & \sin\gamma_i & 0 \\ -\cos\beta_i \sin\gamma_i & \cos\gamma_i & 0 \\ \sin\beta_i & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_i \\ \dot{\beta}_i \\ \dot{\gamma}_i \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_i = \begin{pmatrix} \frac{\cos\gamma}{\cos\beta} & -\frac{\sin\gamma}{\cos\beta} & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ -\tan\beta \cos\gamma & \tan\beta \sin\gamma & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_i \quad (2.6)$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{H}_i \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_i \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_i = \mathbf{H}_i^{-1} \boldsymbol{\omega}_i$$

$$\text{Für kleine Drehungen} \rightarrow \text{Linearisierung: } \mathbf{H} \approx \mathbf{E} \rightarrow {}^i\omega_i \approx {}^I\omega_i \approx \dot{\boldsymbol{\vartheta}} \quad (2.7)$$

$$\text{Für Drehungen in der x-y-Ebene gilt} \quad {}^I\omega_{iz} \equiv {}^i\omega_{iz} \equiv \omega_{iz} = \dot{\gamma} \quad (2.8)$$

${}^I\dot{\omega}_i$ sind die Koordinaten des Winkelbeschleunigungsvektors $\dot{\vec{\omega}}_i$ des Körpers i bez. Inertialsystem, dargestellt in der Inertialbasis. Es gilt mit (2.5)

$${}^I\dot{\omega}_i = \frac{d}{dt} (A^{li} \omega_i) = \dot{A}^{li} \omega_i + A^{li} \dot{\omega}_i \stackrel{(2.4)}{=} A^{li} {}^i\tilde{\omega}_i \omega_i + A^{li} \dot{\omega}_i. \text{ Wegen } \tilde{\omega}_i \omega_i = \mathbf{0} \text{ folgt}$$

$${}^I\dot{\omega}_i = A^{li} \dot{\omega}_i \quad (2.9)$$

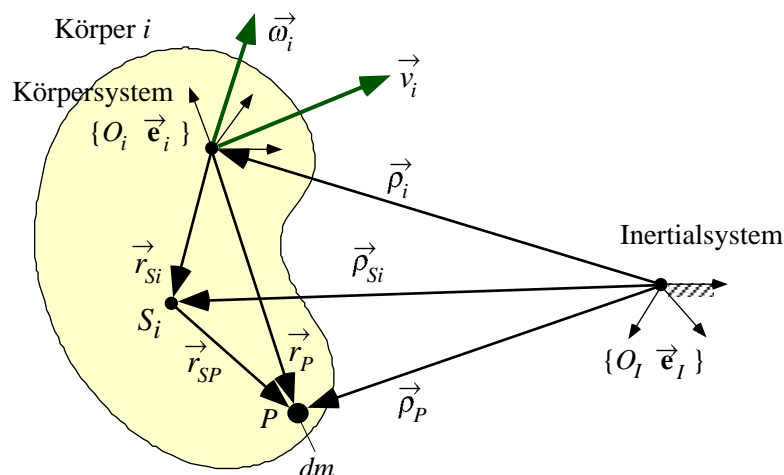


Bild 2.5: Zur Kinematik des starren Körpers

Position von P, siehe Bild 2.5

Ein starrer Körper K_i besteht aus unendlich vielen Partikeln P mit Masse dm am Ort $\vec{\rho}_P$.
Ist $\vec{\rho}_i$ der Ortsvektor zum Ursprung O_i der körperfesten Basis B_i , so gilt

$$\vec{\rho}_P = \vec{\rho}_i + \vec{r}_P = \vec{\rho}_i + \vec{r}_{Si} + \vec{r}_{SP} = \vec{\rho}_{Si} + \vec{r}_{SP} \quad \text{wo} \quad \vec{r}_P = \vec{r}_{Si} + \vec{r}_{SP} \quad (2.10)$$

Dabei ist $\vec{\rho}_{Si}$ der Ortsvektor zum Schwerpunkt S_i des Körpers i .

Für Koordinaten in Inertialbasis gilt

$${}^I \mathbf{p}_P = {}^I \mathbf{p}_i + \mathbf{A}^{Li} \mathbf{r}_P = {}^I \mathbf{p}_{Si} + \mathbf{A}^{Li} \mathbf{r}_{SP} \quad (2.11)$$

$$\text{wo } \mathbf{r}_P = \mathbf{r}_{Si} + \mathbf{r}_{SP} \text{ die Koordinaten von } P \text{ in Basis } \vec{\mathbf{e}}_i \quad (2.12)$$

Für Koordinaten in Körperbasis gilt

$${}^i \mathbf{p}_P = \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_P = \mathbf{p}_{Si} + \mathbf{r}_{SP} = (\mathbf{A}^{Li})^T {}^I \mathbf{p}_P \quad (2.13)$$

\mathbf{p}_i und \mathbf{p}_{Si} sind die Koordinaten von $\vec{\rho}_i$ und $\vec{\rho}_{Si}$ in der Basis $\vec{\mathbf{e}}_i$.

Translationsgeschwindigkeit von P

Mit $\vec{v}_i = \dot{\vec{\rho}}_i$ als Geschwindigkeit von O_i , der Drehung $\vec{\omega}_i$ des Körpers i sowie

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{\text{in Körperbasis}} \vec{r}_P = 0, \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{\text{in Körperbasis}} \vec{r}_{SP} = 0 \quad \text{oder} \quad \dot{\mathbf{r}}_P = \ddot{\mathbf{r}}_P = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{r}}_{SP} = \ddot{\mathbf{r}}_{SP} = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

gilt für den Punkt P

$$\vec{v}_P = \vec{v}_i + \vec{\omega}_i \times \vec{r}_P = \vec{v}_i + \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{Si} + \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{SP} = \dot{\vec{\rho}}_{Si} + \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{SP} \quad (2.15)$$

Dabei ist $\dot{\vec{\rho}}_{Si}$ der Geschwindigkeitsvektor des Schwerpunkts S_i

Für Koordinaten in Inertialbasis gilt

$${}^I \mathbf{v}_P = {}^I \mathbf{v}_i + \mathbf{A}^{Li} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_P = {}^I \dot{\mathbf{p}}_{Si} + \mathbf{A}^{Li} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_{SP} \quad (2.16)$$

Für Koordinaten in Körperbasis gilt

$${}^i \mathbf{v}_P = \mathbf{v}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_P = \dot{\mathbf{p}}_{Si} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{p}_{Si} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_{SP} \quad (2.17)$$

\mathbf{v}_i und $\mathbf{v}_{Si} = \dot{\mathbf{p}}_{Si} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{p}_{Si}$ sind die Koordinaten von $\vec{v}_i = \dot{\vec{\rho}}_i$ und $\dot{\vec{\rho}}_{Si}$ in der Basis $\vec{\mathbf{e}}_i$.

Translationsbeschleunigung von P

Die zeitliche Ableitung von (2.15) liefert mit (2.14)

$$\vec{a}_P = \dot{\vec{v}}_P = \dot{\vec{v}}_i + \dot{\vec{\omega}}_i \times \vec{r}_P + \vec{\omega}_i \times \vec{\omega}_i \times \vec{r}_P = \ddot{\vec{\rho}}_i + \dot{\vec{\omega}}_i \times \vec{r}_{SP} + \vec{\omega}_i \times \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{SP} \quad (2.18)$$

Für die Geschwindigkeit und Beschleunigung von S_i gilt

$$\vec{v}_{Si} = \dot{\vec{\rho}}_{Si} = \vec{v}_i + \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{Si}, \quad \vec{a}_{Si} = \dot{\vec{v}}_{Si} = \ddot{\vec{\rho}}_{Si} = \dot{\vec{v}}_i + \dot{\vec{\omega}}_i \times \vec{r}_{Si} + \vec{\omega}_i \times \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{Si} \quad (2.19)$$

Für Koordinaten in Inertialbasis gilt

$${}^I \mathbf{a}_P = {}^I \dot{\mathbf{v}}_P + \mathbf{A}^{Li} (\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_i \mathbf{r}_P + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_P) = {}^I \dot{\mathbf{p}}_{Si} + \mathbf{A}^{Li} (\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_i \mathbf{r}_{SP} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_{SP}) \quad (2.20)$$

Für Koordinaten in Körperbasis gilt

$${}^i \mathbf{a}_P = \dot{\mathbf{v}}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{v}_i - \tilde{\mathbf{r}}_P \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_P = \dot{\mathbf{v}}_{Si} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{v}_{Si} - \tilde{\mathbf{r}}_{SP} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_{SP} \quad (2.21)$$

Definition Masse

Die Masse des Körpers ist $m_i = \int_{K_i} dm = \text{konst.}$ (2.22)

Definition Schwerpunkt

Für Schwerpunkt S_i gilt:

$$m_i \vec{r}_{Si} = \int_{K_i} \vec{r}_P dm = \text{konst.}, \quad \int_{K_i} \vec{r}_{SP} dm = 0, \quad m_i \vec{\rho}_{Si} = \int_{K_i} \vec{\rho}_P dm \quad (2.23)$$

Für die Koordinaten des Schwerpunkts in Körperbasis gilt $\vec{r}_{Si} = \frac{1}{m_i} \int_{K_i} \vec{r}_P dm$ (2.24)

Definition Translationsimpuls

$$\text{Impuls } \vec{P}_i = \int_{K_i} \vec{v}_P dm = \int_{K_i} \dot{\vec{\rho}}_P dm = \frac{d}{dt} \int_{K_i} \vec{\rho}_P dm \stackrel{(2.23)}{=} m_i \dot{\vec{\rho}}_{Si} \stackrel{(2.19)}{=} m_i \vec{v}_i + \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{Si} \quad (2.25)$$

Definition Drehimpuls (Drall) bezogen auf O_i (Achtung, jeder beliebige Punkt ist möglich!)

$$\text{Drehimpuls } \vec{D}_{Oi} = \int_{K_i} \vec{r}_P \times \vec{v}_P dm \stackrel{(2.15)}{=} \int_{K_i} \vec{r}_P dm \times \vec{v}_i - \int_{K_i} \vec{r}_P \times \vec{r}_P dm \times \vec{\omega}_i$$

oder $\vec{D}_{Oi} = \int_{K_i} \vec{r}_P \times \vec{v}_P dm \stackrel{(2.23)}{=} m_i \vec{r}_{Si} \times \vec{v}_i - \int_{K_i} \vec{r}_P \times \vec{r}_P dm \times \vec{\omega}_i$ (2.26)

Kräftesatz, siehe Bild 2.6

Wirken auf den Körper i die Kräfte \vec{F}_{ki} an Marker k , so kann man diese zu einer Resultierenden \vec{F}_i zusammenfassen. Sie steht im Gleichgewicht mit der Änderung des Impulses. Der Körper bewegt sich translatorisch so, als ob die Kräfte \vec{F}_i in S_i angreifen und in S_i die gesamte Masse vereinigt wäre.

$$\text{Newton II: } \vec{F}_i = \sum_{K_i} \vec{F}_{ki} = \dot{\vec{P}}_i \stackrel{(2.25)}{=} m_i \ddot{\vec{\rho}}_{Si} \stackrel{(2.19)}{=} m_i \left(\ddot{\vec{\rho}}_i - \vec{r}_{Si} \times \dot{\vec{\omega}}_i + \vec{\omega}_i \times \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{Si} \right) \quad (2.27)$$

Bewegungsgleichungen der Translation

Mit Koordinaten der Schwerpunktsbewegung, also $O_i = S_i$:

$$\text{Für Koordinaten in Inertialbasis gilt } m_i {}^I \dot{\vec{v}}_{Si} = {}^I \vec{F}_i = \sum_{K_i} \mathbf{A}^{li} \mathbf{F}_{ki} \quad (2.28)$$

$$\text{Für Koordinaten in Körperbasis gilt } m_i \dot{\vec{v}}_{Si} + m_i \tilde{\vec{\omega}}_i \vec{v}_{Si} = \vec{F}_i = \sum_{K_i} \mathbf{F}_{ki} \quad (2.29)$$

Mit Koordinaten der Bewegung von O_i , wo $O_i \neq S_i$, dargestellt in der Körperbasis

$$m_i \dot{\vec{v}}_i - m_i \tilde{\vec{r}}_{Si} \dot{\vec{\omega}}_i + m_i \tilde{\vec{\omega}}_i \vec{v}_i + m_i \tilde{\vec{\omega}}_i \tilde{\vec{\omega}}_i \vec{r}_{Si} = \vec{F}_i = \sum_{K_i} \mathbf{F}_{ki} \quad (2.30)$$

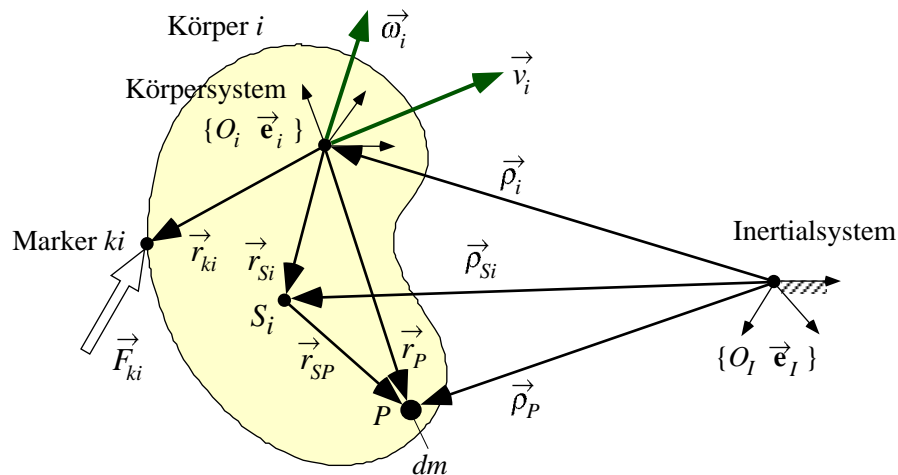


Bild 2.6: Zur Kinetik des starren Körpers

Momentensatz bezogen auf O_i .

Die auf den Körper wirkenden Kräfte \vec{F}_{ki} liefern neben der Resultierenden \vec{F}_i auch ein resultierendes Moment \vec{M}_{O_i} um den Bezugspunkt O_i . Dieses Moment ist im Gleichgewicht mit dem Ausdruck $\vec{r}_P \times \text{Impulsänderung}$ für alle Punkte P . Man findet

$$\begin{aligned}\vec{M}_{O_i} &= \sum_{K_i} \vec{r}_{ki} \times \vec{F}_{ki} = \int_{K_i} \vec{r}_P \times \dot{\vec{v}}_P \, dm = \frac{d}{dt} \left(\int_{K_i} \vec{r}_P \times \vec{v}_P \, dm \right) - \int_{K_i} \dot{\vec{r}}_P \times \vec{v}_P \, dm \\ &= \frac{d}{dt} \left(\int_{K_i} \vec{r}_P \times \vec{v}_P \, dm \right) - \int_{K_i} (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_P) \times (\vec{v}_i + \vec{\omega}_i \times \vec{r}_P) \, dm \\ &\stackrel{(\text{Bild 2.6, 2.10})}{=} \frac{d}{dt} \left(\int_{K_i} \vec{r}_P \times \vec{v}_P \, dm \right) - \int_{K_i} ((\vec{\omega}_i \times \vec{r}_{Si}) + (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_{SP})) \times (\vec{v}_i + (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_{Si}) + (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_{SP})) \, dm \\ &\stackrel{(2.23, \text{Rechenregel 4})}{=} \frac{d}{dt} \left(\int_{K_i} \vec{r}_P \times \vec{v}_P \, dm \right) - \int_{K_i} (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_{Si}) \times \vec{v}_i \, dm\end{aligned}$$

Mit Drehimpuls (2.26):
$$\vec{M}_{O_i} = \sum_{K_i} \vec{r}_{ki} \times \vec{F}_{ki} = \dot{\vec{D}}_{O_i} - m_i (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_{Si}) \times \vec{v}_i \quad (2.31)$$

Momentensatz bezogen auf Schwerpunkt $S_i = O_i$.

Für S_i gilt $\vec{r}_{Si} = 0 \Rightarrow \vec{M}_{S_i} = \sum_{K_i} \vec{r}_{ki} \times \vec{F}_{ki} = \dot{\vec{D}}_{S_i} \quad (2.32)$

Momentensatz bezogen auf Inertialursprung O_I . ($\vec{\rho}_{ki}$ = Ortsvektor des Markers k auf Körper i)

Für den Inertialursprung O_I gilt $\vec{v}_I = 0 \Rightarrow \vec{M}_{O_I} = \sum_{K_i} \vec{\rho}_{ki} \times \vec{F}_{ki} = \dot{\vec{D}}_{O_I} \quad (2.33)$

Definition Massenträgheitsmatrix

bezüglich O_i dargestellt im Körpersystem
$$\boxed{\vec{I}_{O_i} = - \int_{K_i} \vec{r}_P \vec{r}_P \, dm = \text{konst.}} \quad (2.34)$$

bezüglich S_i dargestellt im Körpersystem
$$\boxed{\vec{I}_{S_i} = - \int_{K_i} \vec{r}_{SP} \vec{r}_{SP} \, dm = \text{konst.}} \quad (2.35)$$

Bewegungsgleichungen der Rotation, dargestellt in körperfester Basis

Aus (2.31) findet man mit (2.26), (2.34) und $(\vec{\omega}_i \, \vec{r}_{Si})^\sim \vec{v}_i = \vec{\omega}_i \, \vec{r}_{Si} \, \vec{v}_i - \vec{r}_{Si} \, \vec{\omega}_i \, \vec{v}_i$

bezüglich O_i
$$\boxed{\vec{I}_{O_i} \dot{\vec{\omega}}_i + \vec{\omega}_i \, \vec{I}_{O_i} \, \vec{\omega}_i + m_i \, \vec{r}_{Si} \, \dot{\vec{v}}_i + m_i \, \vec{r}_{Si} \, \vec{\omega}_i \, \vec{v}_i = \vec{M}_{O_i}} \quad (2.36)$$

bezüglich S_i (Eulerglg.)
$$\boxed{\vec{I}_{S_i} \dot{\vec{\omega}}_i + \vec{\omega}_i \, \vec{I}_{S_i} \, \vec{\omega}_i = \vec{M}_{S_i}} \quad (2.37)$$

wo \vec{M}_{O_i} und \vec{M}_{S_i} die Koordinaten der resultierenden Momente um O_i und S_i sind.

Fassen wir Glg. (2.30) und (2.36) zusammen, erhalten wir die 6 DEs in (2.2).

A.3 Herleitung der Bewegungsgleichungen über virtuelle Leistungen

Nach dem Prinzip der virtuellen Leistungen (Jourdain'sches Prinzip) ist die Summe der virtuellen Leistung der Trägheitskräfte der Partikel P mit Masse dm und der virtuellen Leistung der diskreten Kräfte \vec{F}_{ki} gleich null. Man schreibt

$$-\int_{K_i} \delta \vec{v}_P \cdot \vec{a}_P dm + \sum_{K_i} \delta \vec{v}_{ki} \cdot \vec{F}_{ki} = 0 \quad (2.38)$$

Für Koordinaten in Körperbasis gilt:
$$-\int_{K_i} \delta \mathbf{v}_P^T \mathbf{a}_P dm + \sum_{K_i} \delta \mathbf{v}_{ki}^T \mathbf{F}_{ki} = 0 \quad (2.39)$$

Hierin sind $\delta \mathbf{v}_P$ und $\delta \mathbf{v}_{ki}$ die virtuelle Geschwindigkeit von P und der Marker ki dargestellt in der Körperbasis. \mathbf{a}_P ist die Beschleunigung von P .

Aus (2.15), (2.17) folgen

$$\delta \vec{v}_P = \vec{v}_i - \vec{r}_P \times \delta \vec{\omega}_i, \quad \delta \mathbf{v}_P = \delta \mathbf{v}_i - \tilde{\mathbf{r}}_P \delta \boldsymbol{\omega}_i \quad \text{und} \quad \delta \mathbf{v}_P^T = \delta \mathbf{v}_i^T + \delta \boldsymbol{\omega}_i^T \tilde{\mathbf{r}}_P, \quad (2.40)$$

und mit (2.21) findet man für (2.39)

$$-\int_{K_i} \left(\delta \mathbf{v}_i^T + \delta \boldsymbol{\omega}_i^T \tilde{\mathbf{r}}_P \right) \left(\dot{\mathbf{v}}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{v}_i - \tilde{\mathbf{r}}_P \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_P \right) dm + \sum_{K_i} \left(\delta \mathbf{v}_i^T + \delta \boldsymbol{\omega}_i^T \tilde{\mathbf{r}}_{ki} \right) \mathbf{F}_{ki} = 0$$

Nun werden (2.22), (2.24), (2.34) eingesetzt. Das liefert in Matrizenschreibweise

$$\begin{pmatrix} \delta \mathbf{v}_i^T \\ \delta \boldsymbol{\omega}_i^T \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} m_i \mathbf{E} & -m_i \tilde{\mathbf{r}}_{Si} \\ m_i \tilde{\mathbf{r}}_{Si} & \mathbf{I}_{Oi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{v}}_i \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{v}_i + m_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_{Si} \\ m_i \tilde{\mathbf{r}}_{Si} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{v}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{I}_{Oi} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \end{pmatrix} - \sum_{K_i} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \tilde{\mathbf{r}}_{ki} \end{pmatrix} \mathbf{F}_{ki} \right) = 0$$

$$\delta \mathbf{z}_i^T \begin{pmatrix} \mathbf{M}_i & \dot{\mathbf{z}}_i + \mathbf{Q}_i - \mathbf{h}_i \end{pmatrix} = 0$$

Die letzte Gleichung ist erfüllt für beliebige Werte von $\delta \mathbf{z}_i \neq \mathbf{0}$, also

$$\boxed{\mathbf{M}_i \dot{\mathbf{z}}_i + \mathbf{Q}_i = \mathbf{h}_i} \quad (2.41)$$

mit \mathbf{M}_i als symmetrische Massenmatrix, \mathbf{Q}_i als Spaltenmatrix der Zentrifugalkräfte und gyroskopischen Kräfte, sowie \mathbf{h}_i als Spaltenmatrix der äußeren Kräfte und Momente am Körper i , vgl. (2.2).

Den Sonderfall, dass wir uns auf den Schwerpunkt beziehen, erhält man mit $O_i = S_i$, also $\mathbf{r}_{Si} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{I}_{Oi} = \mathbf{I}_{Si}$.

Beachte: In (2.41) sind unter \mathbf{h}_i noch alle Kräfte und Momente zusammengefaßt. Wir werden diese später in eingepreßte Kräfte und Zwangskräfte in den Kraftelementen und Gelenken unterteilen. Sie treten immer paarweise an den Körpern i und j auf.

A.4 Gelenke

Gelenke schränken die Bewegungen der an ihnen beteiligten Körper ein. Diese Einschränkungen lassen sich als **Zwangsbedingungen** der Kinematik auffassen.

Ein Gelenk g verbindet genau zwei Körper, den Körper i am Marker P_g mit dem Körper j am Marker Q_g , siehe Bild 2.4. Es bewirkt u_g Zwangsbedingungen. Somit ergeben sich andererseits f_g Freiheitsgrade über das Gelenk.

Je nach Art des Gelenks ergeben sich unterschiedliche Bewegungseinschränkungen, siehe Abschn. 2.3.1

Implizite Zwangsbedingungen am Gelenk

Sind \mathbf{p}_i und \mathbf{p}_j die Koordinaten der Position und \mathbf{z}_i und \mathbf{z}_j die Koordinaten der Geschwindigkeit der Körper i und j , so kann man mit t als Zeit allgemein für die Zwangsbedingungen bezüglich der Position schreiben

$$\boxed{\mathbf{g}_g(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, t) = \mathbf{0}} \quad (2.44)$$

Die Spaltenmatrix \mathbf{g}_g hat die Länge u_g .

In Abschn. 2.3.2 wird das Aufstellen der Zwangsbedingungen exemplarisch gezeigt.

Entsprechend den Bewegungseinschränkungen ergeben sich **Gelenkkräfte (Zwangskräfte)** \vec{F}_g bzw. **Gelenkmomente (Zwangsmomente)** \vec{M}_g . Die Gelenkkräfte und -momente sind genau so groß, daß die Kinematik des Gelenks eingehalten wird. Ihre Koordinaten bezüglich der Basis \vec{e}_i wollen wir kurz λ_g nennen. Die Dimension von λ_g ist somit u_g .

Für die verallgemeinerten Zwangskräfte – ein Teil von \mathbf{h}_i in (2.2), (2.3) bzw. \mathbf{h}_j – gilt

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{h}_i^c &= \sum_{g=1}^{\text{alle Gelenke an } i} \mathbf{G}_{gi}^T \lambda_g \quad \text{mit} \quad \mathbf{G}_{gi} = \frac{\partial \mathbf{g}_g}{\partial \mathbf{p}_i} \mathbf{Z}_i \\ \mathbf{h}_j^c &= \sum_{g=1}^{\text{alle Gelenke an } j} \mathbf{G}_{gj}^T \lambda_g \quad \text{mit} \quad \mathbf{G}_{gj} = \frac{\partial \mathbf{g}_g}{\partial \mathbf{p}_j} \mathbf{Z}_j \end{aligned}} \quad (2.45)$$

Der Ausdruck (2.45) erfüllt die Bedingungen der Lagrange'schen Multiplikatorenmethode, wenn die Bewegungsgleichungen (2.2) noch die Nebenbedingungen (2.44) erfüllen müssen.

Vielfach werden die Vektoren der Gelenke vorteilhaft in einer Gelenkbasis $B_g\{P_g; x_g, y_g, z_g\}$ dargestellt.

A.5 Herleitung der Zwangsbedingungen

Wir betrachten ein **Kugelgelenk** (Typ 27 in Tab. 2.2) zwischen Körper i und Körper j an den Markern P_g und Q_g , siehe Bild 2.7 a). Nach dem Freischneiden ergeben sich folgende kinematischen und kinetischen Zusammenhänge:

Zahl der Freiheiten $f_g = 3$, Zahl der Zwangsbedingungen $u_g = 3$.

Die impliziten Zwangsbedingungen lauten für das Kugelgelenk (3 skalare Gln. in der Körperbasis i)

$$\begin{aligned} \vec{r}_g &= \vec{\rho}_{Q_g} - \vec{\rho}_{P_g} = \vec{\rho}_j + \vec{r}_{Q_g} - \vec{\rho}_i - \vec{r}_{P_g} \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \\ {}^i \mathbf{r}_g &= \mathbf{r}_g = \mathbf{A}^{Li^T} \mathbf{A}^{Lj} (\mathbf{p}_j + \mathbf{r}_{Q_g}) - \mathbf{p}_i - \mathbf{r}_{P_g} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Die allgemeine Form lautet: $\boxed{\mathbf{g}_g(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, t) = \mathbf{0}}$ (2.47)

Beachte: Die Zwangsbedingungen können in jeder beliebigen Basis angegeben werden. Auch kann \mathbf{g}_g von der Zeit t abhängen.

Die drei Zwangsbedingungen erfordern die

unbekannten Zwangskräfte \vec{F}_g bzw. ${}^i \mathbf{F}_g = \mathbf{F}_g = (F_{gx} \ F_{gy} \ F_{gz})^T = \boldsymbol{\lambda}_g$ (2.48)

Sie werden allgemein im Vektor $\boldsymbol{\lambda}_g$ zusammengefaßt, vgl. (2.45)

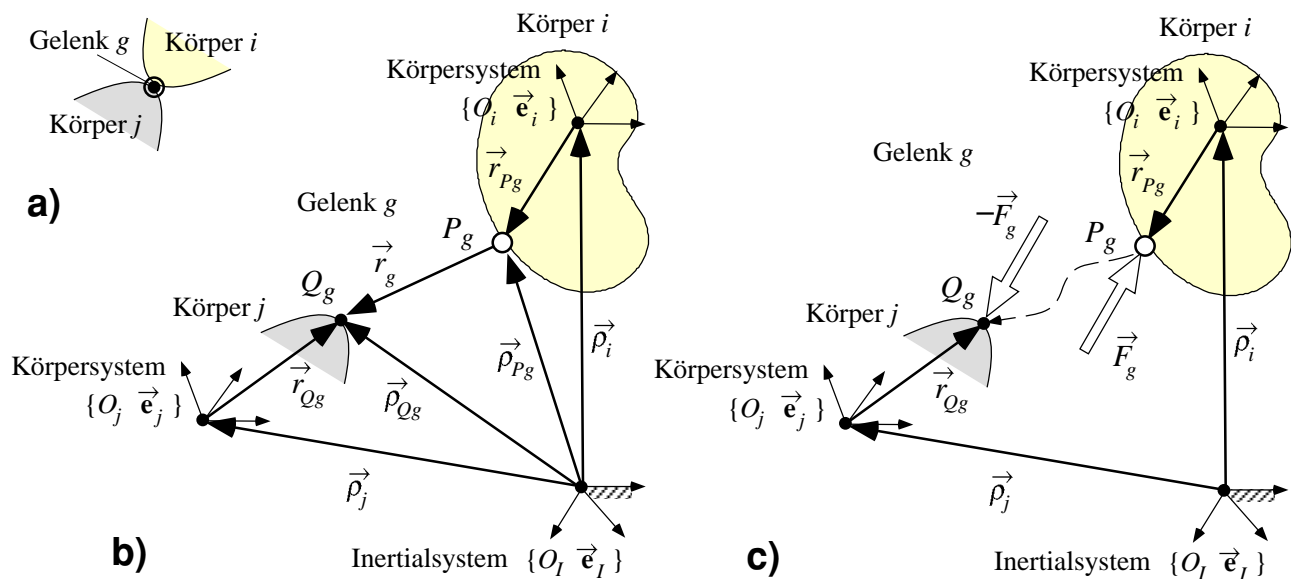


Bild 2.7: Kinematische (b) und kinetische Größen (c) am Kugelgelenk (a).

Die Gelenkfreiheitsgrade sind die drei Drehungen mit den drei Koordinaten $\alpha_g, \beta_g, \gamma_g$. Sie bilden die Drehmatrix

$$\mathbf{A}_g(\boldsymbol{\vartheta}_g) = \mathbf{A}^{ij}(\alpha_g, \beta_g, \gamma_g) = \mathbf{A}^{li^T} \mathbf{A}^{lj} \quad \text{für} \quad \vec{\mathbf{e}}_i = \mathbf{A}_g(\boldsymbol{\vartheta}_g) \vec{\mathbf{e}}_j \quad (2.49)$$

Damit kann man die expliziten Zwangsbedingungen am Kugelgelenk angeben als

$$\mathbf{A}^{lj} = \mathbf{A}^{li} \mathbf{A}_g(\boldsymbol{\vartheta}_g). \quad (2.50)$$

Die allgemeine explizite Form lautet: $\boxed{\mathbf{p}_j = \mathbf{f}_{gi}(\mathbf{p}_i, t) + \mathbf{f}_y(\mathbf{y}_g, t)}$ (2.51)

d.h. ist die Bewegung des Körpers i bekannt, kann man mit \mathbf{y}_g die Bewegung des Körpers j berechnen \rightarrow **Vorwärtsrekursion**.

Die Zwangsbedingungen (2.47) und (2.51) können wir ableiten und erhalten mit $\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{Z}_i \dot{\mathbf{z}}_i$ in (2.1) die Bedingungen auf Geschwindigkeitsebene. Sie sind für die Kinetik erforderlich.

Die implizite Form lautet

$$\underbrace{\frac{\partial \mathbf{g}_g}{\partial \mathbf{p}_i} \mathbf{Z}_i \dot{\mathbf{z}}_i}_{\mathbf{G}_{gi}} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{g}_g}{\partial \mathbf{p}_j} \mathbf{Z}_j \dot{\mathbf{z}}_j}_{\mathbf{G}_{gj}} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{g}_g}{\partial t}}_{\boldsymbol{\kappa}_g} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \mathbf{G}_{gi} \dot{\mathbf{z}}_i + \mathbf{G}_{gj} \dot{\mathbf{z}}_j + \boldsymbol{\kappa}_g = \mathbf{0} \quad (2.52)$$

Die explizite Form lautet

$$\dot{\mathbf{z}}_j = \underbrace{\mathbf{Z}_j^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}_{gi}}{\partial \mathbf{p}_i} \mathbf{Z}_i}_{\mathbf{J}_{gi}} \dot{\mathbf{z}}_i + \underbrace{\mathbf{Z}_j^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}_y}{\partial \mathbf{y}_g}}_{\mathbf{J}_{gy}} \dot{\mathbf{y}}_g + \underbrace{\mathbf{Z}_j^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{gi}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_y}{\partial t} \right)}_{\boldsymbol{\eta}_g(t)} = \mathbf{J}_{gi} \dot{\mathbf{z}}_i + \mathbf{J}_{gy} \dot{\mathbf{y}}_g + \boldsymbol{\eta}_g(t) \quad (2.53)$$

\mathbf{G}_{gi} und \mathbf{G}_{gj} sind die impliziten Zwangsmatrizen. Sie haben die Dimension $u_g \times 6$.

\mathbf{J}_{gi} und \mathbf{J}_{gy} sind die Jakobimatrizen der expliziten Zwangsbedingungen. Sie haben die Dimension 6×6 und $6 \times f_g$. Sind die Zwangsbedingungen (2.47) von der Zeit unabhängig ist $\boldsymbol{\kappa}_g = \boldsymbol{\eta}_g = \mathbf{0}$.