

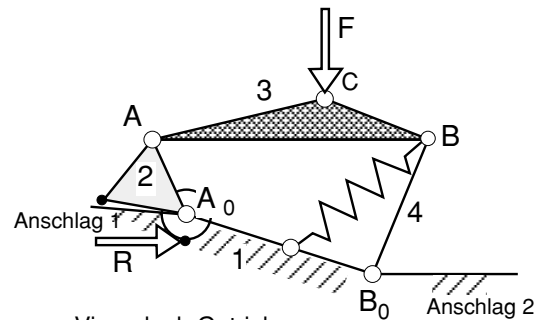
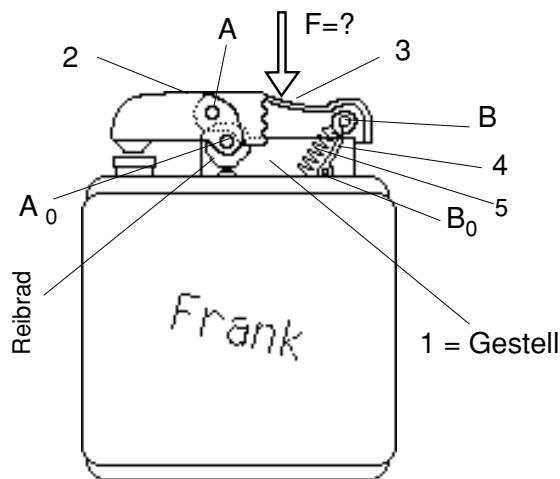
2	Einführung in die Mehrkörpersimulation.....	1
2.1	Starrer Körper	2
2.1.1	Daten des starrer Körpers	2
2.1.2	Bewegungsgleichungen des starrer Körpers	3
2.2	Elastischer Körper	5
2.3	Gelenke.....	6
2.3.1	Implizite Zwangsbedingungen am Gelenk	6
2.3.2	Zusammenstellung wichtiger Gelenke	7
2.3.3	Gelenke mit Bewegungseinschränkungen.....	9
2.4	Kraftelemente.....	11
2.4.1	Modelle von Kraftelementen	12
2.4.2	Der Muskel als Kraftelement.....	15
2.4.3	Kraftelemente mit Reibung	16
2.5	Sensoren.....	17
2.6	Bewegungsgleichungen des MKS.....	18
2.6.1	Freiheiten und Zwangsbedingungen des MKS.....	18
2.6.2	Bewegungsgleichungen des MKS.....	19
2.7	MKS-Programme und ihre Formalismen	22

2 Einführung in die Mehrkörpersimulation

Ein Mehrkörpersystem (MKS) ist ein Verbund von mehreren **Körpern** (Bodies), die durch **Gelenke** (joints) und **Kraftelemente** (force elements) mit der **Umgebung** (inertial frame) – dem ruhendem Körper oder Gestell – oder mit anderen bewegten Körpern verbunden sind. Die mathematischen Gleichungen erlauben, die Bewegung aller Körper und die auf sie einwirkenden Kräfte und Momente zu berechnen.

Sensoren (measurements) erlauben Bewegungen jeder Art im System auszuwerten.

Als Beispiel sei das Feuerzeug (Bild 2.1) genannt, das aus 4 Körpern besteht, wobei Körper 1 das Gestell ist. Das System hat einen Freiheitsgrad (FHG).



Viergelenk-Getriebe

4 Körper (Glieder), No. 1 = Gestell

4 Gelenke

1 Federglied

Druckkraft F und Reibkraft R

2 Anschläge

1 Freiheitsgrad

Bild 2.1: Feuerzeug als Mehrkörpersystem (links das reale Produkt, rechts das mechanische Modell)

Der menschliche Bewegungsapparat (Bild 2.2) lässt sich ebenfalls als Mehrkörpersystem beschreiben.

Die Segmente sind die Körper, die Gelenke sind als mechanische Gelenke mit

Bewegungseinschränkungen zu beschreiben, die Muskeln sind die Kraftelemente, die Augen kann man als Sensoren bezeichnen.



Bild 2.2 Der Mensch als Mehrkörpersystem

Ein Mehrkörpersystem besteht demnach aus den folgenden Komponenten:

- starre und elastische Körpern
- Gelenke
- Kraftelemente
- Sensoren

Diese Komponenten werden im Weiteren beschrieben und Gleichungen hierfür aufgestellt.

2.1 Starrer Körper

Jeder Körper im MKS erhält eine Nummer $i = 1, \dots, n$. Körper mit Nummer Null soll das Gestell sein.

2.1.1 Daten des starrer Körpers

Ein starrer Körper ist durch folgende Daten eindeutig beschrieben:

- körperfestes **Koordinatensystem** $B_i = \{O_i, \vec{e}_i\}$ mit Ursprung O_i und den Basisvektoren \vec{e}_i
- Lage des **Schwerpunktes** S_i von O_i = Ortsvektor $\mathbf{r}_{Si} = \begin{pmatrix} r_{Si_x} \\ r_{Si_y} \\ r_{Si_z} \end{pmatrix}$, dargestellt in Basis \vec{e}_i , Einheit [m]
- **Masse** m_i , Einheit [kg]
- **Massenträgheitsmatrix** $\mathbf{I}_{Si} = \begin{pmatrix} I_{Si_{xx}} & I_{Si_{xy}} & I_{Si_{xz}} \\ & I_{Si_{yy}} & I_{Si_{yz}} \\ sym. & & I_{Si_{zz}} \end{pmatrix}$ bez. S_i dargestellt in Basis \vec{e}_i , Einheit [kgm²]

Die Elemente $I_{Si_{xx}}, I_{Si_{yy}}, I_{Si_{zz}}$ sind die Hauptträgheitsmomente,

die Elemente $I_{Si_{xy}}, I_{Si_{xz}}, I_{Si_{yz}}$ sind die Deviationsmomente.

- Neben dem Schwerpunkt besitzt ein Körper eine endliche Anzahl von Punkten (Anlenkpunkte, Koppelpunkte, Marker, Beobachtungspunkte, Knoten (nodes, grid points), hier **Marker** genannt.
- Zur Darstellung des Körpers ist auch eine **3D-Geometrie** erforderlich.

Stellt man alle Vektoren und Tensoren im körperfesten Koordinatensystem B_i dar, sind die oben genannten Daten des starren Körpers konstant.

Die Deviationsmomente sind null, wenn ein symmetrischer Körper vorliegt und die Achsen parallel zu den Symmetrieachsen verlaufen.

Im 3D-Fall besitzt ein starrer Körper 6 Freiheitsgrade (FHG), in 2D nur 3 FHG.

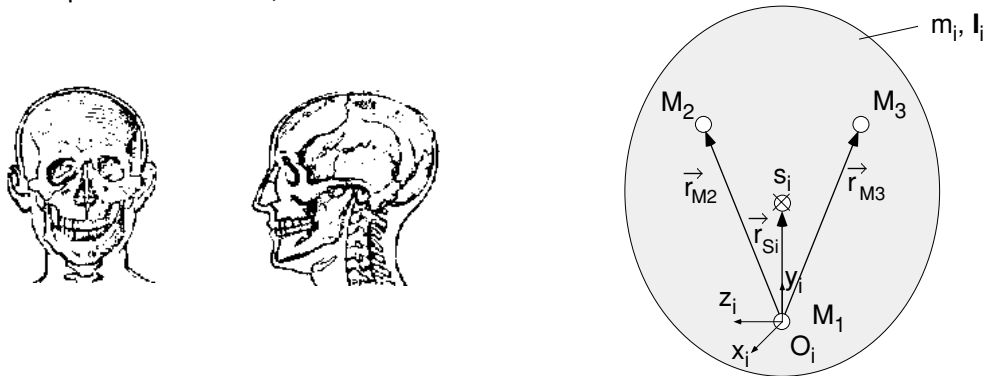
Beispiel: Kopf des Menschen, Bild 2.3

Bild 2.3: Kopf des Menschen als starrer Körper

Die Marker sind:

M1: Gelenk-Marker zur Wirbelsäule, Ortsvektor $\mathbf{r}_{M1} = \mathbf{0}$.M2: & M3: Sensor-Marker der Augen mit Vektoren \mathbf{r}_{M2} und \mathbf{r}_{M3} , siehe Abschnitt Sensoren.**2.1.2 Bewegungsgleichungen des starrer Körpers**

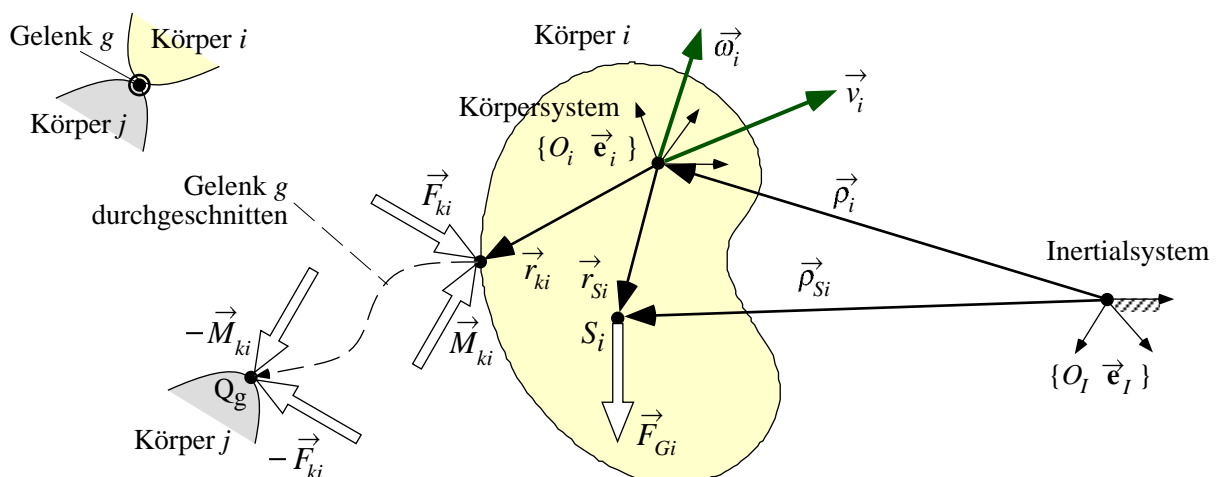
Die Bewegungen eines aus dem MKS herausgeschnittenen Körpers (Bild 2.4) werden bezüglich einem Inertialsystem beschrieben. Das Inertialsystem ist fest mit dem Gestell verbunden und bewegt sich nicht. (Gestelle mit konstanter Geschwindigkeit werden jetzt nicht betrachtet)

Wähle das Gestell bez. Inertialsystem dort, wo man annimmt, dass sich diese Umgebung nicht bewegt!

Freischneiden heißt, alle Gelenke und Kraftelemente durchschneiden und die Schnittkräfte und -momente \vec{F}_{ki} und \vec{M}_{ki} an den Körpern i und j einzeichnen.

Für Kraftelemente müssen wir ein Kraftgesetz angeben, siehe Abschn. 2.4. Für die Gelenke können wir nur ihre Wirkungsrichtung nach der Art des Gelenks angeben, siehe Abschn. 2.3.

Weiter können sonstige eingeprägte Kräfte am Körper i aktiv sein, z.B. die Gewichtskraft \vec{F}_{Gi}

Bild 2.4: Kinematische und kinetische Größen am starren Körper. Kraft ist positiv am Körper i !

In den folgenden Bewegungsgleichungen sind alle kinematischen und kinetischen Vektoren im körperfesten Koordinatensystem (Basis \vec{e}_i) dargestellt.

Zusammenfassend kann man schreiben:

Ein freier starrer Körper hat 6 FHG im Raume, deshalb sind 6 Koordinaten der Lage und 6 Koordinaten der Geschwindigkeit erforderlich:

Position und Orientierung des Körpersystems $\{O_i, \vec{e}_i\}$ bezüglich dem Inertialsystem $\{O_I, \vec{e}_I\}$ sei gegeben durch die Koordinaten des Ortsvektors $\mathbf{p}_i = (\rho_{ix} \ \rho_{iy} \ \rho_{iz})^T$ und Drehmatrix $\mathbf{A}^{li}(\boldsymbol{\vartheta}_i)$ mit den Winkeln $\boldsymbol{\vartheta}_i$ (vgl. Rechenregel 5) und die Geschwindigkeiten seien \mathbf{v}_i und $\boldsymbol{\omega}_i$ so lauten die

Koordinaten der Lage $\mathbf{p}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_i \\ \boldsymbol{\vartheta}_i \end{pmatrix}$ und der **Geschwindigkeit** $\mathbf{z}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i \\ \boldsymbol{\omega}_i \end{pmatrix}$

Zwischen ihnen gilt Glg. $\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{Z}_i \mathbf{z}_i$ wobei $\mathbf{Z}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \tilde{\mathbf{p}}_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_i^{-1} \end{pmatrix}$ (DGL der Kinematik) (2.1)

Matrix \mathbf{E} ist eine 3x3 Einheitsmatrix und \mathbf{H}_i ist die Matrix der Drehkinematik, siehe (2.6)

Die dynamischen Glg. lauten (kompakt)

$$\boxed{\mathbf{M}_i \dot{\mathbf{z}}_i + \mathbf{Q}_i = \mathbf{h}_i} \quad (2.2)$$

(Masse mal Geschwindigkeitsänderung ist Summe aller Kräfte)

mit \mathbf{M}_i als symmetrische Massenmatrix und \mathbf{Q}_i als Matrix der gyroskopischen Kräfte. In \mathbf{h}_i sind alle äußeren Kräfte und Momente zusammengefaßt.

Verwendung des Punktes O_i , der identisch Schwerpunkt S_i ist, dann gilt:

Es gelten die Aussagen $\mathbf{r}_{Si} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{Si}$

$$\mathbf{M}_i = \begin{pmatrix} m_i \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{Si} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} m_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{v}_i \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{I}_{Si} \boldsymbol{\omega}_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{M}_{Si} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Hier sei m_i die Masse, und \mathbf{I}_{Si} die Massenträgheitsmatrix bez. S_i des Körpers i sowie \mathbf{F}_i die Summe aller Kräfte und \mathbf{M}_{Si} die Summe aller Momente um S_i .

Verwendung eines beliebigen Punktes $O_i \neq$ Schwerpunkt S_i , dann gilt:

$$\mathbf{M}_i = \begin{pmatrix} m_i \mathbf{E} & -m_i \tilde{\mathbf{r}}_{Si} \\ m_i \tilde{\mathbf{r}}_{Si} & \mathbf{I}_{Oi} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} m_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{v}_i + m_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_{Si} \\ m_i \tilde{\mathbf{r}}_{Si} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{v}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{I}_{Oi} \boldsymbol{\omega}_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{M}_{Oi} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Hier sei m_i die Masse, \mathbf{r}_{Si} die Position des Schwerpunktes und \mathbf{I}_{Oi} die Massenträgheitsmatrix bez. O_i des Körpers i sowie \mathbf{F}_i die Summe aller Kräfte und \mathbf{M}_{Oi} die Summe aller Momente um O_i .

Hinweis: Die 6 DEs der Kinematik und die der Kinetik sind in sich gekoppelt.

Die detaillierte Herleitung der Bewegungsgleichungen ist in Anhang A angegeben.

Für Systeme mit Gelenken siehe Abschnitt 2.6.

2.2 Elastischer Körper

Ein elastischer Körper weist neben den Bewegungsmöglichkeiten des starren Körpers noch die Verformungen, also die Bewegungen jedes einzelnen Partikels P mit der Masse dm auf. Die Spannungen im Inneren halten die Partikel zusammen.

Ein elastischer Körper hat somit unendlich viele Freiheitsgrade.

Eine häufig genutzte Approximation des realen unendlich dimensionalen Körpermodells ist $6 + n_q$ FHG, wo 6 für die Zahl der Starrkörperbewegung steht und wo n_q die Zahl der Koordinaten der Modellapproximation für die Verformungen ist.

In der Literatur übliche Modelle sind:

- die der Kontinuumsmechanik mit endlich vielen Freiheitsgraden aus der Lösung der partiellen Dgl.,
- die Modalapproximation mit 1 bis 30 FHG an Eigenformen und
- die Finite Elemente Methode mit bis zu 1 Million FHG an Knotenkoordinaten.

Ein Überblick zu den Modellen bzw. den Methoden ist z.B. in (Schwertassek and Wallrapp 1999) zu finden, oder siehe die Literatur zur FEM.

Auf die Bewegungsgleichungen wird hier nicht eingegangen, sondern auf die Literatur verwiesen.

2.3 Gelenke

Gelenke schränken die Bewegungen der an ihnen beteiligten Körper ein. Diese Einschränkungen lassen sich als **Zwangsbedingungen** der Kinematik auffassen.

Ein Gelenk g verbindet genau zwei Körper, den Körper i am Marker P_g mit dem Körper j am Marker Q_g , siehe Bild 2.4. Es bewirkt u_g Zwangsbedingungen. Somit ergeben sich andererseits f_g Freiheitsgrade über das Gelenk.

Je nach Art des Gelenks ergeben sich unterschiedliche Bewegungseinschränkungen, siehe Abschn.

2.3.1

2.3.1 Implizite Zwangsbedingungen am Gelenk

Sind \mathbf{p}_i und \mathbf{p}_j die Koordinaten der Position und \mathbf{z}_i und \mathbf{z}_j die Koordinaten der Geschwindigkeit der Körper i und j , so kann man mit t als Zeit allgemein für die Zwangsbedingungen bezüglich der Position schreiben

$$\boxed{\mathbf{g}_g(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, t) = \mathbf{0}} \quad (2.44)$$

Die Spaltenmatrix \mathbf{g}_g hat die Länge u_g .

In Abschn. 2.3.2 wird das Aufstellen der Zwangsbedingungen exemplarisch gezeigt.

Entsprechend den Bewegungseinschränkungen ergeben sich **Gelenkkräfte (Zwangskräfte)** \vec{F}_g bzw. **Gelenkmomente (Zwangsmomente)** \vec{M}_g . Die Gelenkkräfte und- momente sind genau so groß, daß die Kinematik des Gelenks eingehalten wird. Ihre Koordinaten bezüglich der Basis $\vec{\mathbf{e}}_i$ wollen wir kurz λ_g nennen. Die Dimension von λ_g ist somit u_g .

Für die verallgemeinerten Zwangskräfte – ein Teil von \mathbf{h}_i in (2.2), (2.3) bzw. \mathbf{h}_j – gilt

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{h}_i^c &= \sum_{g=1}^{\text{alle Gelenke an } i} \mathbf{G}_{gi}^T \lambda_g \quad \text{mit} \quad \mathbf{G}_{gi} = \frac{\partial \mathbf{g}_g}{\partial \mathbf{p}_i} \mathbf{Z}_i \\ \mathbf{h}_j^c &= \sum_{g=1}^{\text{alle Gelenke an } j} \mathbf{G}_{gj}^T \lambda_g \quad \text{mit} \quad \mathbf{G}_{gj} = \frac{\partial \mathbf{g}_g}{\partial \mathbf{p}_j} \mathbf{Z}_j \end{aligned}} \quad (2.45)$$

Der Ausdruck (2.45) erfüllt die Bedingungen der Lagrange'schen Multiplikatorenmethode, wenn die Bewegungsgleichungen (2.2) noch die Nebenbedingungen (2.44) erfüllen müssen.

Vielfach werden die Vektoren der Gelenke vorteilhaft in einer Gelenkbasis $B_g\{P_g; x_g, y_g, z_g\}$ dargestellt.

Details zur Herleitung der Gleichungen finden sie im Anhang A.

2.3.2 Zusammenstellung wichtiger Gelenke

Ein Gelenk wird durch seine **Art** charakterisiert. Es kann kraft- oder formschlüssig sein, null oder bis zu sechs Freiheitsgraden f_g aufweisen, zunächst ohne Einschränkung der Umlauffähigkeit.

Sonderfälle sind:

 feste Einspannung, wo $f_g = 0$ und $u_g = 6$

 freie Bewegung, wo $f_g = 6$ und $u_g = 0$.

Weitere technische Gelenkarten sind in Tabelle 2.2 zu finden.

In der Biomechanik finden wir das Kugelgelenk (Typ 27 in Tab. 2.2) angewandt in der Hüfte und im Schultergelenk. Für die anderen Gelenke kann man näherungsweise andere Typen aus Tab. 2.2 auswählen oder die Gelenke aus Tab. 2.1 einsetzen. Jedoch sind die Bewegungseinschränkungen der Gelenke zu beachten, siehe Abschnitt 2.3.3.

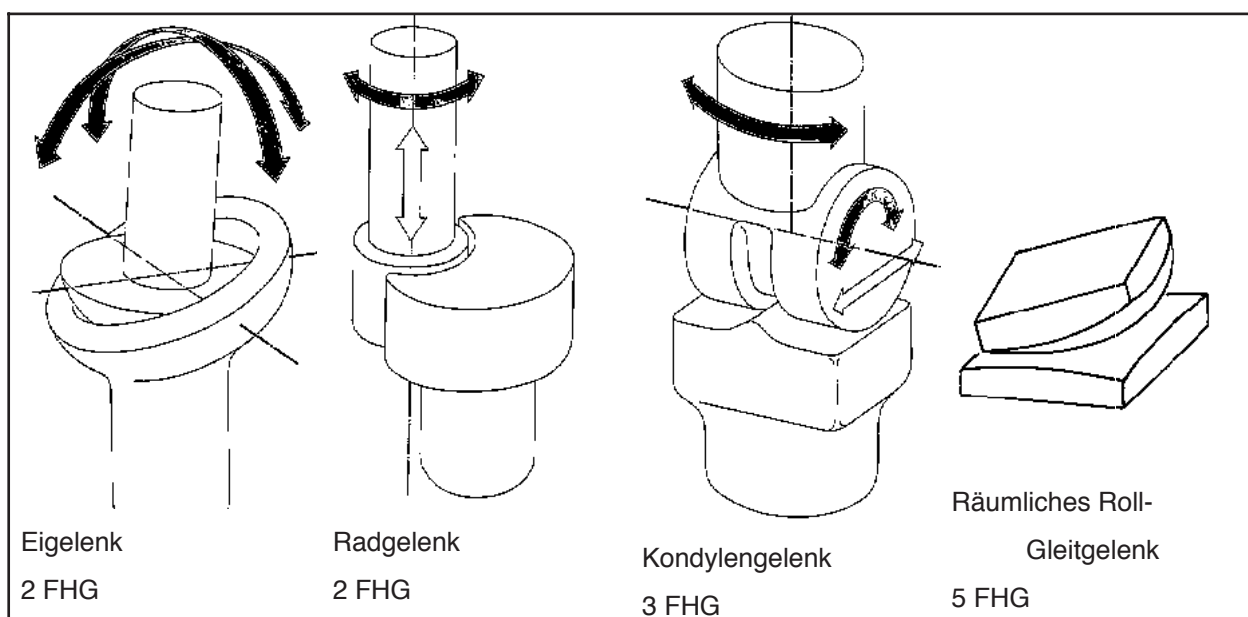


Tabelle 2.1: Spezielle Gelenke in der Biomechanik (FHG = Freiheitsgrade im Gelenk)

Übung 2.2: Gebe an, wo die 4 Gelenke aus Tab. 2.1 beim Menschen Anwendung finden.

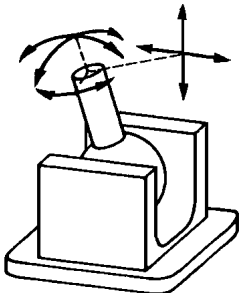
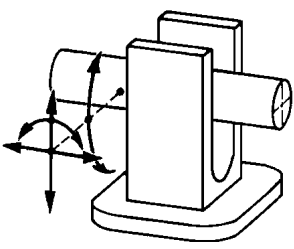
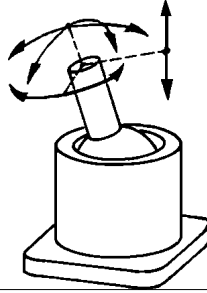
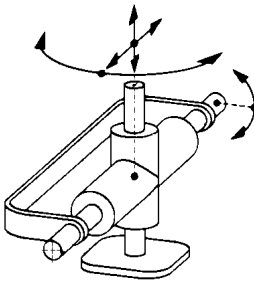
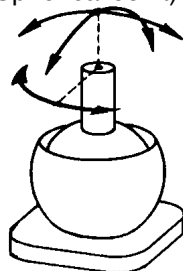
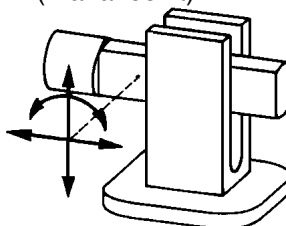
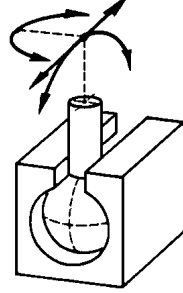
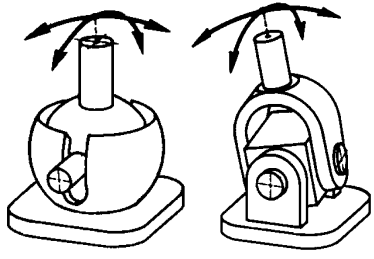
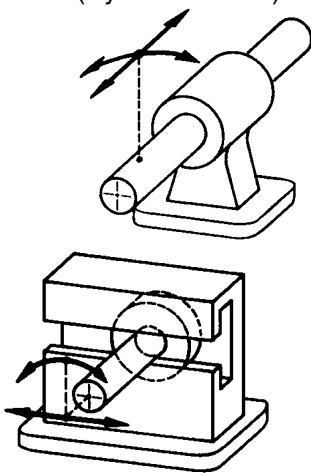
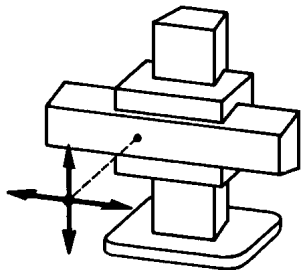
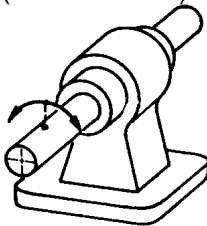
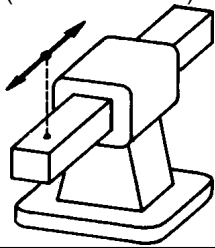
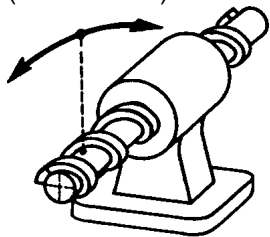
FHG			
5	23) D_3S_2 - Kugelflächengelenk 		
4	24) D_2S_2 - Zylinderflächengelk. 	25) D_3S - Kugelrohrgelenk 	26) D_2S_2 - Doppeldrehschubg. 
3	27) D_3 - Kugelgelenk (Spherical Joint) 	28) DS_2 - Plattengelenk (Planar Joint) 	29) D_2S Kugelrillengelenk 
2	30) D_2 - Kreuz-(Kardan-)gelenk (Universal (Tait-Bryan) Joint) 	31) DS - Drehschubgelenk (Cylindrical Joint) 	32) S_2 - Doppelschubgelenk 
1	33) D - Drehgelenk (Revolute Joint) 	34) S - Schubgelenk (Prismatic Joint) 	35) W - Schraubgelenk (Helical Joint) 

Tabelle 2.2: Formschlüssige Gelenke nach VDI Richtlinie 2156, FHG = Freiheitsgrade im Gelenk

2.3.3 Gelenke mit Bewegungseinschränkungen

Alle Gelenke im menschlichen Bewegungsapparat weisen Bewegungseinschränkungen auf. Aus der Anatomie kennen wir ihre Werte.

Beispiel: Das Kugelgelenk in der Hüfte zwischen Beckenknochen und Femurknochen, siehe Bild 2.8 a).

Die Aufgabe des Biomechaniker ist es nun, diese anatomischen Begriffe in Winkelbeschränkungen des Gelenks gemäß einem Koordinatensystem anzugeben. Vielfach wählt man als Gelenk-

Koordinatensystem das des Körpers mit dem Index i , hier die Hüfte, Bild 2.8 b).

Im Hüftgelenk ergeben sich nach dem Freischneiden die Zwangskräfte \vec{F}_g , positiv an der Hüfte im Punkt P_g und entgegengesetzt am Femur im Punkt Q_g , vgl. Abschn. 2.3.2, siehe Bild 2.8 c).

Definition des rechten Hüftgelenks und seine Bewegungseinschränkungen

Glied i = Hüfte, Glied j = Femur,

Marker $M_2 = P_g$ an Hüfte i , Basis x_g, y_g, z_g parallel zur Körperbasis (siehe Bezeichnungen)

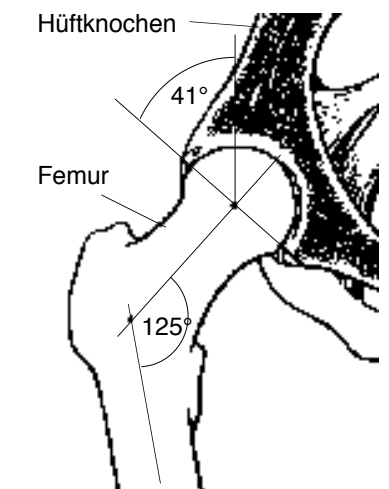
Marker $M_3 = Q_g$ an Femur j ,

Gelenktyp = Kugelgelenk,

Gelenkkordinaten sind die drei Winkel α_g, β_g und γ_g des Femur j bezüglich Hüfte i

Einschränkungen:

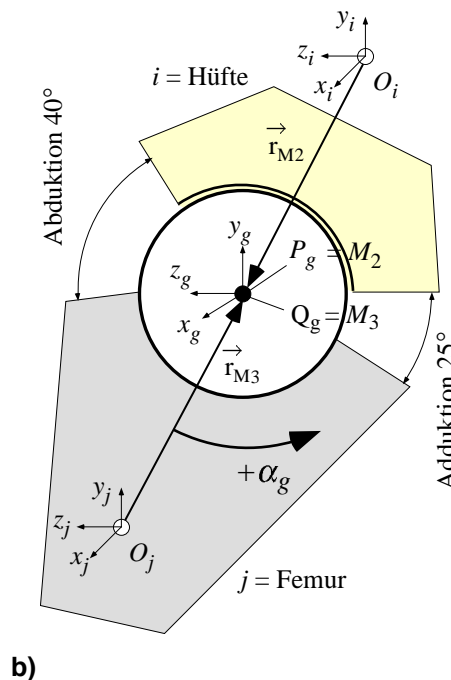
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{um } x_g \text{- Achse: } -|\text{Abduktion} = 40^\circ| < \alpha_g < +|\text{Adduktion} = 25^\circ| \\ \text{um } y_g \text{- Achse: } -|\text{Außenrotation} = 40^\circ| < \beta_g < +|\text{Innenrotation} = 45^\circ| \\ \text{um } z_g \text{- Achse: } -|\text{Extension} = 15^\circ| < \gamma_g < +|\text{Flexion} = 135^\circ| \end{array} \right\} \quad (2.54)$$



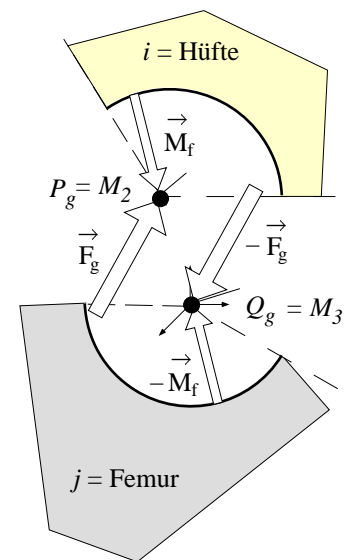
Bewegungseinschränkungen:

Adduktion = 25°
 Abduktion = 40°
 Extension = 15°
 Flexion = 135°
 Innenrotation = 45°
 Außenrotation = 40°

a)



b)



c)

Bild 2.8: Rechtes Hüftgelenk als Kugelgelenk mit Beschränkungen (Frontalebene).

\vec{F}_g ist die Zwangskraft, \vec{M}_f ist das Reibmoment im Gelenk. (Kraft ist positiv am Körper i !)

Realisierung von Bewegungseinschränkungen in MKS-Programmen

Ein starrer Anschlag eines Gelenks würde eine Reduzierung der Gelenkfreiheitsgrade zur Folge haben. Das ist in MKS-Programmen i. a. nicht möglich. Einfacher und der Wirklichkeit auch näher ist es, den Anschlag als elastische Bettung, also als Federelement zu modellieren, das nach der freien Bewegung der Winkelbeschränkungen aktiv wird. Man schreibt, siehe Bild 2.9:

$$\text{Anschlagsmoment} \quad M_{fx}(\alpha_g) = \begin{cases} k_T \alpha_g & \text{für } \alpha_u > \alpha_g > \alpha_o \\ 0 & \end{cases} \quad (2.55)$$

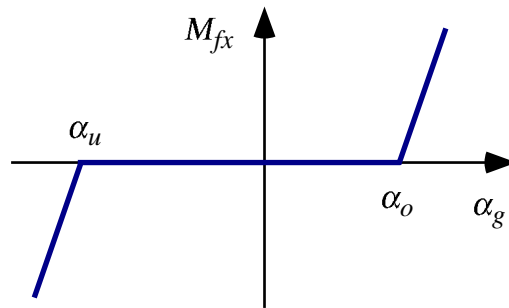


Bild 2.9: Modell der Bewegungseinschränkung als Torsionsfeder mit Spiel.

Übung 2.4: Stelle die Gelenkdefinition und zulässigen Bewegungsmöglichkeiten des rechten Ellbogengelenks bei hängendem Arm auf.

(Welche Bewegung kann die Handwurzel bez. Oberarm ausführen)

Aus der Anatomie entnehmen wir: Flexion 150 °, Extension 10°, Pronation 90 °, Supination 80 °.

2.4 Kraftelemente

Alle **eingepprägten Kräfte und Momente** an Körpern werden durch **Krafterelemente** repräsentiert.

Eingeprägte Kräfte/Momente sind

die Gewichtskraft (aktiv im Schwerpunkt S_i im Falle des starren Körpers),

äußere Kräfte und Momente am Körper, die inertialfest eingeprägten werden,

Kräfte und Momente von Federn und Dämpfern zwischen zwei Körpern oder einem Körper und dem Gestell,

Kräfte und Momente von Aktoren und Antriebseinheiten zwischen zwei Körpern oder einem Körper und dem Gestell,

Reibkräfte und Reibmomente zwischen zwei Körpern oder einem Körper und dem Gestell

(Abschn. 2.4.3)

Merke: eingeprägten Kräfte und Momente (applied forces and torques) prägen die Bewegung der Körper ein, initiieren somit ihre Bewegung.

Wir definieren allgemein ein Krafterelement mit Index f zwischen dem Körper i am **Marker P_f** und Körper j am **Marker Q_f** . Als Schnittgrößen setzen wir an P_f die eingeprägten positiven Kräfte \vec{F}_f und das eingeprägte positive Moment \vec{M}_f an, am Marker Q_f sind die negativen Schnittgrößen zu finden.

Merke: Prüfe in Rechenprogrammen genau die Definition der positiven und negativen Schnittgrößen. Sie sind sehr unterschiedlich festgelegt. Gegebenenfalls die Wirkrichtung von i nach j umkehren.

Für ein Krafterelement f muss ein **Kraftgesetz** vorliegen. Es kann eine Funktion der Zeit t oder/und der Kinematik der Bewegungen der beteiligten Körper i und j sein. Dazu sind spezielle Modelldaten erforderlich. Verschiedene Modelle sind in Abschnitt 2.4.1 zu finden.

Kraftgesetze können ein- oder mehrdimensional sein.

Aktive Krafterelemente, z.B. Aktuatoren, werden mit Hilfe von Sensoren gesteuert oder geregelt, siehe Vorlesung Regelungstechnik.

Eine allgemeine Darstellung der Kraftgesetze wäre (in Vektor- und Matrizenschreibweise in Basis \vec{e}_i)

$$\begin{aligned}\vec{F}_f &= \vec{f}_1(t, \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j, \dots, \text{Parameter}), & \vec{M}_f &= \vec{f}_2(t, \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j, \dots, \text{Parameter}) \\ \mathbf{F}_f &= \mathbf{f}_1(t, \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j, \dots, \text{Parameter}), & \mathbf{M}_f &= \mathbf{f}_2(t, \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j, \dots, \text{Parameter})\end{aligned}\quad (2.56)$$

Die Vektoren werden vielfach in der Krafterelementbasis $B_f\{P_f; x_f, y_f, z_f\}$ dargestellt.

Für die verallgemeinerten eingeprägten Kräfte – ein Teil von \mathbf{h}_i in (2.2), (2.3) bzw. \mathbf{h}_j – gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_i^a &= \sum_{f=1}^{\text{alle Krafterelemente an } i} \begin{pmatrix} \mathbf{F}_f \\ \tilde{\mathbf{r}}_{P_f} \mathbf{F}_f + \mathbf{M}_f \end{pmatrix} \\ \mathbf{h}_j^a &= \sum_{f=1}^{\text{alle Krafterelemente an } j} \begin{pmatrix} -\mathbf{A}^{I_j^T} \mathbf{A}^{I_i} \mathbf{F}_f \\ -\tilde{\mathbf{r}}_{Q_f} \mathbf{A}^{I_j^T} \mathbf{A}^{I_i} \mathbf{F}_f - \mathbf{A}^{I_j^T} \mathbf{A}^{I_i} \mathbf{M}_f \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2.57)$$

2.4.1 Modelle von Kraftelementen

Definition Gewichtskraft

Mit m_i als Masse des Körpers i und \vec{g} als Erdbeschleunigungsvektor, wo ${}^I\vec{g} = \text{konst.}$ die Koordinaten in der Inertialbasis sind, ergibt sich die Gewichtskraft, aktiv im Schwerpunkt S_i des starren Körpers i , vgl. Bild 2.4,

$$\vec{F}_{Gi} = m_i \vec{g}, \quad \mathbf{F}_{Gi} = {}^i\mathbf{F}_{Gi} = m_i \mathbf{A}^{liT} {}^I\mathbf{g} \quad (2.58)$$

Definition axiales Kraftelemente

Zwischen Körper i am **Marker P_f** und Körper j am **Marker Q_f** wirkt das Kraftelement mit der Kraft \vec{F}_f , siehe Bild 2.10. An den Markern muss man sich Kugelgelenke

vorstellen, so dass die Kraft an Körper i stets von P_f nach Q_f zeigt.

Für die Wirkrichtung und Abstand l_f gilt

$$\vec{r}_f = \vec{\rho}_{Qf} - \vec{\rho}_{Pf} = \vec{\rho}_j + \vec{r}_{Qf} - \vec{\rho}_i - \vec{r}_{Pf},$$

$${}^i\mathbf{r}_f = \mathbf{r}_f = \mathbf{A}^{liT} \mathbf{A}^{lj} (\mathbf{\rho}_j + \mathbf{r}_{Qf}) - \mathbf{\rho}_i - \mathbf{r}_{Pf} = \mathbf{0}, \quad (2.59)$$

$$\text{folglich gilt } \vec{n}_f = \frac{\vec{r}_f}{|\vec{r}_f|} \text{ bzw. } \mathbf{n}_f = \frac{\mathbf{r}_f}{|\mathbf{r}_f|} \text{ und Abstand } l_f = |\vec{r}_f| = |\mathbf{r}_f|$$

Für die Koordinaten des Kraftvektors am Marker $P_f = ki$ in der Körperbasis \vec{e}_i findet man

$$\mathbf{F}_{ki} = \mathbf{F}_f = \mathbf{n}_f F_f \quad (2.60)$$

wo F_f die skalare Kraft ist. Für sie geben wir ein Kraftgesetz an.

Für $F_f > 0$ liegt eine **Zugkraft** vor, andernfalls eine Druckkraft.

Für die Kraft am Marker $Q_f = kj$ in der Körperbasis \vec{e}_j gilt:

$$\mathbf{F}_{kj} = -\mathbf{A}^{ljT} \mathbf{A}^{li} \mathbf{F}_f = -\mathbf{A}^{ljT} \mathbf{A}^{li} \mathbf{n}_f F_f \quad (2.61)$$

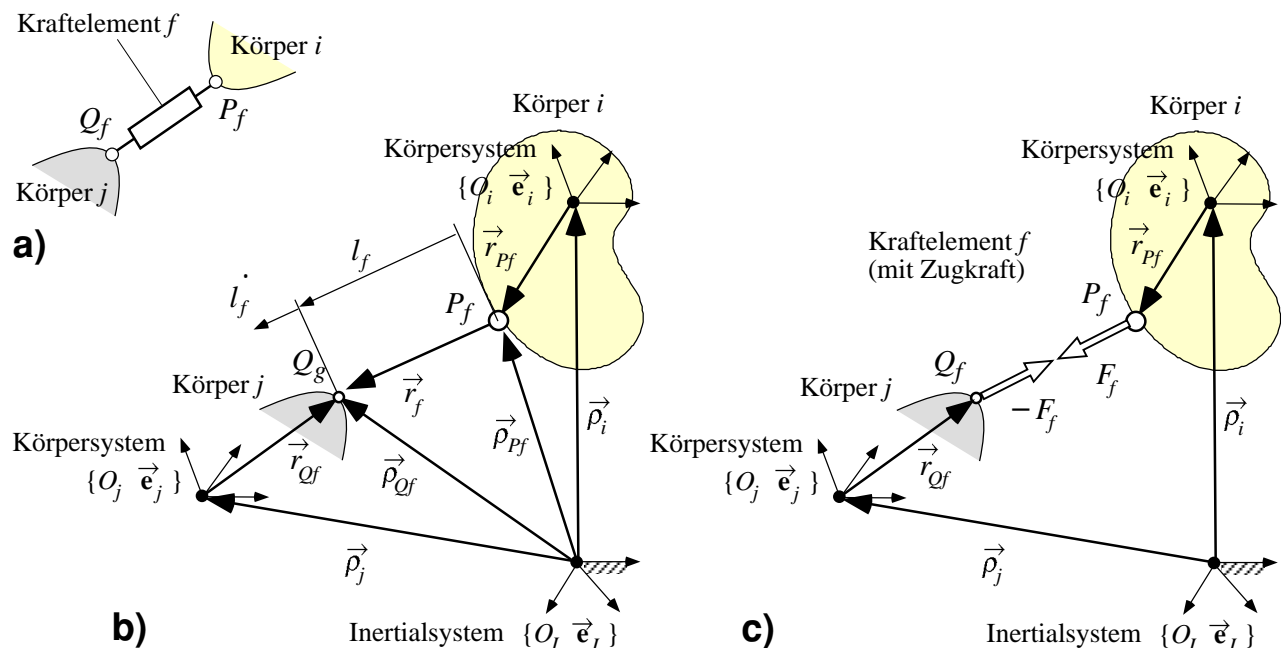


Bild 2.10: Kinematik (b) und Kinetik (c) am axialen Kraftelement (a). Kraft ist positiv am Körper i !

Definition lineare Zug/Druck-Feder mit linearer viskoser Dämpfung

Für die skalare Kraft F_f gilt

$$F_f = k_f (l_f - l_{f0}) + d_f \dot{l}_f \quad (2.62)$$

Hierin sind

- k_f die Federsteifigkeit,
- d_f die Dämpfungskonstante,
- l_f die aktuelle Federlänge,
- \dot{l}_f die aktuelle Abstandsgeschwindigkeit,
- l_{f0} die Einbau-Federlänge für Federkraft = 0.

Definition Kraftelemente um eine körperfeste Drehachse

Ist \mathbf{n}_f die körperfeste Drehachse, gesehen in Körperbasis $\vec{\mathbf{e}}_i$, so gilt für das eingeprägte Moment \vec{M}_f bzw. \mathbf{M}_f am Marker $P_f = ki$

$$\mathbf{M}_{ki} = \mathbf{M}_f = \mathbf{n}_f M_f \quad (2.63)$$

wo M_f das skalare Moment ist. Für sie geben wir wieder ein Kraftgesetz an.

Für das Moment \mathbf{M}_{kj} am Marker $Q_f = kj$ in der Körperbasis $\vec{\mathbf{e}}_j$ gilt in Analogie zu (2.61)

$$\mathbf{M}_{kj} = -\mathbf{A}^{ljT} \mathbf{A}^{li} \mathbf{M}_f = -\mathbf{A}^{ljT} \mathbf{A}^{li} \mathbf{n}_f M_f$$

Definition lineare Torsionsfeder mit linearer viskoser Dämpfung

Für das Moment M_f gilt

$$M_f = k_{Tf} (\varphi_f - \varphi_{f0}) + d_{Tf} \dot{\varphi}_f \quad (2.64)$$

Hierin sind

- k_{Tf} die Federsteifigkeit der Torsion,
- d_{Tf} die Dämpfungskonstante der Torsion,
- φ_f der aktuelle Drehwinkel,
- $\dot{\varphi}_f$ die aktuelle Winkelgeschwindigkeit,
- φ_{f0} der Einbau-Drehwinkel für Federmoment = 0.

Weitere Kraftelemente sind in Tabelle 2.3 zu finden.

- III FE-1 Push-pull spring with linear force law
- III FE-2 Translation damper with linear force law
- III FE-3 Compact spring element (spatial rubber)
- III FE-4 Spring-damper in parallel, direction equals interconnection line
- III FE-5 Compact spring element with damping, non- linear characteristics and clearance (spatial rubber)
- III FE-6 Spring damper element in series
- III FE-7 Simple Joint Friction (discontinuous)
- III FE-8 DC-motor with revolute transmission, control of voltage and speed, and control of the motor speed and torque
- III FE-9 DC motor with worm and nut transmission, control of voltage and speed, and control of the motor speed and torque
- II FE-10 Tyre model with fit to measurements graphs after E.Bakker, L.Nyborg, H.Pacejka
- II FE-11 Tire model after the similarity method of H. Pacejka with road irregularities
- II FE-12 Torsion-spring suspension (force law based on the joint state quantities)
- II FE-13 Spatial torsion-spring damper (force laws based on kinematic relative measurements)
- II FE-14 Gear box with elastic transmission
- II FE-15 Frequency-dependent excitation
- II FE-16 Time excitation for forces and moments with given direction of action
- II FE-17 Time excitation for forces and moments acting along the connection line between the coupling points
- II FE-18 One-sided contact element
- II FE-19 Force definition with FPARAM - Linking SIMPACK block simulation programs
- II FE-41 Spherical Linear Spring and Damper Parallel: given in B_i
- II FE-46 Call of MEDYNA User Elements Type 80 - 99 : given in M_i
- II FE-47 Call of MEDYNA User Elements Type 80 - 99 : given in PtP
- II FE-48 Call of MEDYNA User Elements Type 80 - 99 : spherical in M_i
- II FE-49 General SIMPACK Tyre
- II FE-85 Screw Pressure and Friction Force
- II FE-87 Contribute algebraic state $q(t)$ to the MBS differential algebraic equations
- II FE-88 Wheel-Rail Friction Force for Quick-Wheelset
- II FE-89 Wheel-Rail Friction Force for General Contact
- II FE-90 SIN-time excitation for forces and torques with given direction of action
- II FE-91 Hydraulic bearing with eigendynamic, caused by fluid movement
- II FE-92 Contact problem "belt and roll" in conveying systems
- II FE-93 Time excitation by $u(t)$ -vector for forces and torques with given direction of action
- II FE-94 Time excitation by $u(t)$ -vector for forces and torques acting along the connection line between the coupling points
- III FE-95 Hydropneumatic spring-damper (used by aero-planes)
- III FE-96 Tire force aero-plane drop test modelations
- III FE-97 Steering angle control in vehicle dynamics
- III FE-98 Track ODE
- III FE-99 Wheel/Rail Track Sleeper Spring-Damper
- III FE-100 Friction with normal force given by other elements: B_i
- III FE-101 Friction with normal force given by other elements: PtP
- III FE-102 Dynamic force element (spring,damper) dependent on frequency response: given in B_i
- III FE-103 Dynamic force element (spring,damper) dependent on frequency response: PtP
- III FE-104 Nonlinear spring damper parallel with hysteresis: given in B_i
- III FE-105 Nonlinear spring and damper with hysteresis: PtP
- III FE-190 Nonlinear Force Element with Stick-Slip-Characteristics: PtP
- III FE-191 Nonlinear Force Element with Stick-Slip-Characteristics and Force Element Input: PtP
- III FE-192 Nonlinear Force Element with Stick-Slip-Characteristics and Constraint Force Input: PtP
- III FE-195 Structure-Variable Contact Force between Two Surfaces
- III FE-200 Wheel-Lift: Monitoring of Wheel/Rail Constraint

Tabelle 2.3: Liste der Kraftelemente implementiert im MKS-Programm SIMPACK, V8.5

2.4.2 Der Muskel als Kraftelement

Am Beispiel des Muskels Biceps (Beuger) des Ellbogengelenks am Arm wird das Kraftelement **Muskel** diskutiert. Wie in Bild 2.11 a) zu sehen, ist der Muskel Biceps einerseits am Radius (Speiche) 6) angewachsen und andererseits an der Schulter (1,7) jedoch durch zwei Muskelansätzen befestigt, wobei der eine Strang über den großen Höcker (2) verläuft.

Diese Art von Kraftelementen ist in den MKS-Programmen nicht zu finden. Wie in (2.59) und (2.60) festgelegt, kann ein Kraftelement nur an den Markern P_f und Q_f wirken, also axial nur zwischen den Markern P_f und Q_f . Durch diese Vorgabe ergibt sich die in Bild 2.11 b) gezeigte Modellvereinfachung des Muskels Biceps.

Merke: Ein Muskel kann nur Zugkräfte erzeugen.

Das axiale Kraftgesetz für die Muskelkraft wird in Kapitel 4 besprochen.

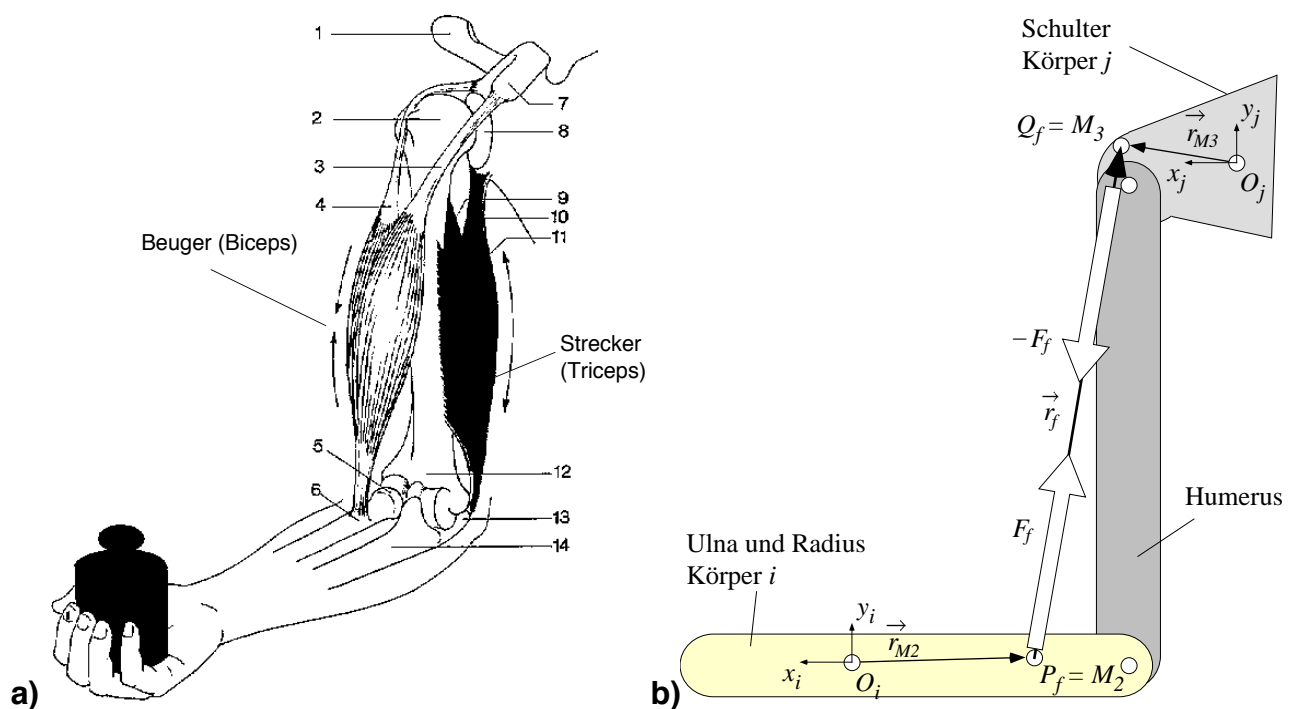


Bild 2.11 Kraftelement für den Muskel Biceps (Beuger) des rechten Armes.

- Legende:
- | | |
|--------------------------------------|-------------------------------------|
| 1, 7, 8 | = Schulterblatt mit Gelenk |
| 2 | = großer Höcker |
| 3, 4 | = kurzer und langer Kopf des Biceps |
| 5, 6 | = Radiuskopf des Radius (Speiche) |
| 9, 10, 11 | = obere Köpfe des Triceps |
| 12 | = Oberarmknochen (Humerus) |
| 13 | = Ellbogen |
| 14 | = Elle (Ulna) |
| Marker $M_2 = P_f$ an Radius i | |
| Marker $M_3 = Q_f$ an Schulter j , | |

2.4.3 Kraftelemente mit Reibung

Reibkräfte und Reibmomente zählen ebenfalls zu den Kraftelementen. Sie sind, wie wir aus der Techn. Mechanik wissen, von einem Reibungskoeffizienten μ und von der Gelenkkraft \vec{F}_g , vgl. Abschnitt 2.3

(auch Normalkraft N genannt) abhängig. Reibkräfte und Reibmomente wirken immer an den Reibflächen entgegen der Bewegung.

Definition Reibkraft im Schubgelenk

Wie Bild 2.12 a) zeigt, findet man mit der Normalkraft N , den Körpergeschwindigkeiten \vec{v}_i und \vec{v}_j , sowie dem Reibkoeffizienten μ für die Reibkraft, positiv am Körper i

$$\vec{F}_f = \vec{F}_R = \mu N \frac{\vec{v}_g}{|\vec{v}_g|} \quad \text{wo} \quad \vec{v}_g = \vec{v}_j - \vec{v}_i \quad (2.65)$$

Diese Gleichungen geben wir wieder in der Körperbasis der Körper i und j an.

Definition Reibkraft im Drehgelenk

Nach Bild 2.12 b) gilt mit der Normalkraft N , den Gelenkwinkelgeschwindigkeiten $\vec{\omega}_g$, dem Reibkoeffizienten μ sowie dem Gelenkradius r für das Reibmoment, positiv am Körper i

$$\vec{M}_f = \vec{M}_R = \mu r N \frac{\vec{\omega}_g}{|\vec{\omega}_g|} \quad \text{wo} \quad \vec{\omega}_g = \vec{\omega}_j - \vec{\omega}_i \quad (2.66)$$

Diese Gleichungen geben wir wieder in der Körperbasis der Körper i und j an.

Als Anwendung sei das Hüftgelenk in Bild 2.8 genannt.

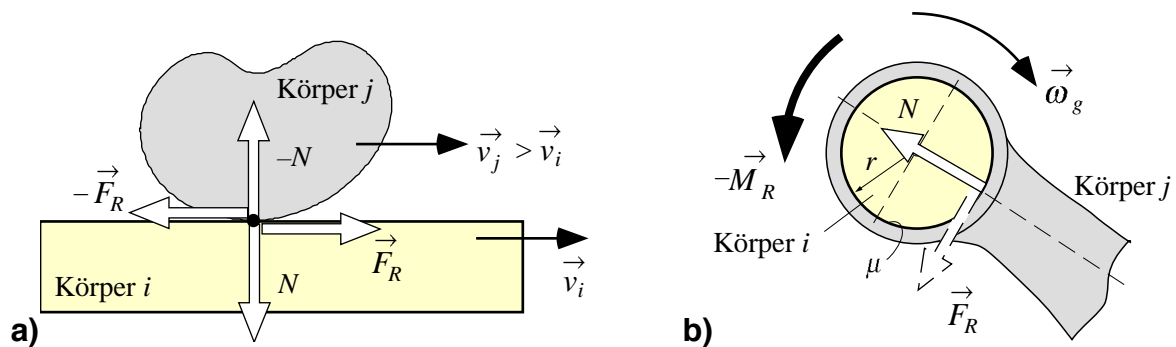


Bild 2.12 Reibelemente im Schubgelenk (a) und im Drehgelenk oder Kugelgelenk (b).

Beispiel: Reibbeiwert für das Hüftgelenk ist $\mu =$ _____.

2.5 Sensoren

Sensoren erlauben es, an beliebigen Stellen des MKS kinematische Messungen oder Auswertungen vorzunehmen. Diese Messungen können sein:

- Relativ- oder Absolutbewegungen,
- Lage, Geschwindigkeit, Beschleunigung,
- Translation oder Rotation

Eine Messung \mathbf{s} wird zwischen Körper i am **Marker P_S** und Körper j am **Marker Q_S** vorgenommen.

Dabei kann i oder j ein Körper oder das Gestell (Inertialsystem) sein.

Die Meßrichtung ist von P_S nach Q_S und kann noch mit einer Sensorbasis $B_S \{P_S; x_S y_S z_S\}$ festgelegt werden.

Beispiel Auge, siehe Bild 2.13

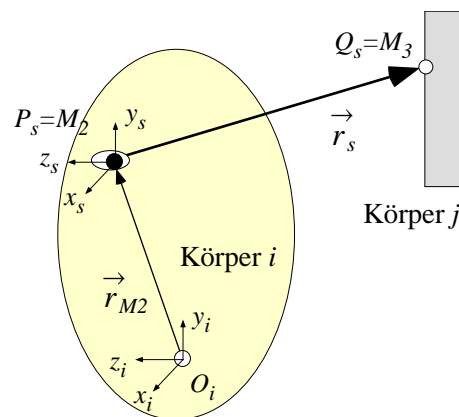


Bild 2.13: Kinematische Messungen mit dem rechten Auge (Körper i) bez. einem Körper j .

2.6 Bewegungsgleichungen des MKS

2.6.1 Freiheiten und Zwangsbedingungen des MKS

Weist ein MKS n bewegliche starre Körper (ohne Gestell) und n_g Gelenke auf, so ergibt sich die **Zahl der Freiheitsgrade des MKS** aus der Grübler-Bedingung bei 3D Betrachtung:

$$F = 6n - \sum_{g=1}^{n_g} u_g = 6(n - n_g) + \sum_{g=1}^{n_g} f_g \leq 6 \cdot n. \quad (2.71)$$

Hierin sind: u_g = Zahl der Zwänge und f_g die Zahl der Freiheiten im Gelenk g .

Die **Zahl aller Zwangsbedingungen des MKS** ist

$$n_c = \sum_{g=1}^{n_g} u_g \geq 0. \quad (2.72)$$

Implizite Zwangsbedingungen des MKS

Sind \mathbf{p}_i und \mathbf{p}_j die **Absolutkoordinaten** der Position und \mathbf{z}_i und \mathbf{z}_j die Absolutkoordinaten der Geschwindigkeit der Körper i und j , so kann man mit t als Zeit allgemein für alle n_c Zwangsbedingungen bezüglich Position und Geschwindigkeit schreiben

$$\mathbf{g}(\mathbf{p}, t) = (\mathbf{g}_g(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, t)) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{G}(\mathbf{p}) \mathbf{z} + \boldsymbol{\kappa}(t) = \mathbf{0} \quad \text{wo} \quad \mathbf{G}(\mathbf{p}) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{Z}, \quad \boldsymbol{\kappa}(t) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t}. \quad (2.73)$$

\mathbf{g} und $\boldsymbol{\kappa}$ haben die Länge n_c und \mathbf{G} hat die Dimensionen $n_c \times 6 \cdot n$. Für die Matrix \mathbf{Z} wird aus den einzelnen Matrizen \mathbf{Z}_i zusammengefaßt als $\mathbf{Z} = \text{diag}(\mathbf{Z}_i)$. Die Spaltenmatrizen

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{p}_i \\ \mathbf{p}_j \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{z}_i \\ \mathbf{z}_j \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

sind die Spaltenmatrizen der absoluten Positions- und Geschwindigkeitskoordinaten aller Körper n im MKS. Hat Matrix \mathbf{G} den Rang n_c so liegen keine passiven Zwangsbedingungen vor, vgl. Vorlesungsmanuskript "Entwurf von Mechanismen".

Explizite Zwangsbedingungen des MKS

Das MKS hat F Freiheitsgrade, die durch die Gelenkkordinaten \mathbf{y} und deren Ableitungen beschrieben (auch **Relativkoordinaten**) werden können. Man kann an Stelle (2.73) auch die Koordinaten \mathbf{p} und \mathbf{z} durch \mathbf{y} , deren Ableitungen und t ausdrücken. Das liefert

$$\mathbf{p}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{z} = \mathbf{J}_y(\mathbf{y}) \dot{\mathbf{y}} + \boldsymbol{\eta}(t) \quad \text{wo} \quad \mathbf{J}_y(\mathbf{y}) = \mathbf{Z}^{-1} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{y}}, \quad \boldsymbol{\eta}(t) = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \quad (2.75)$$

\mathbf{J}_y ist die Jakobimatrix der Dimension $6 \cdot n \times F$. Für sie gilt die wichtige Beziehung

$$\mathbf{J}_y^T \mathbf{G}^T = \mathbf{0}. \quad (2.76)$$

Merke: Ein MKS mit F Freiheitsgraden kann durch die Relativkoordinaten \mathbf{y} und deren Ableitungen eindeutig beschrieben werden. Mit (2.75) erhält man dann die allgemeinen oder kartesischen Absolutkoordinaten \mathbf{p} und \mathbf{z} .

2.6.2 Bewegungsgleichungen des MKS

In Analogie zu \mathbf{p} und \mathbf{z} in (2.74) werden die Matrizen der Bewegungsgleichungen der einzelnen Körper i in (2.1) und (2.2) bzw. (2.3) zusammengefasst. Für \mathbf{h}_i setzen wir die Aufteilung in eingeprägte Kräfte (superscript a) und die Zwangskräfte (superscript c) ein.

Wir erhalten somit die **kinematischen und dynamischen Bewegungsgleichungen des MKS**

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{Z}(\mathbf{p}) \mathbf{z} \\ \mathbf{M} \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{z}) &= \mathbf{h}^a + \mathbf{h}^c \end{aligned} \quad (2.77)$$

Für die verallgemeinerten Kräfte \mathbf{h}^c in (2.77) wollen wir die Gleichung (2.45) nutzen. Entsprechend den Bewegungseinschränkungen ergeben sich **Gelenkkräfte (Zwangskräfte)** \vec{F}_g bzw. **Gelenkmomente (Zwangsmomente)** \vec{M}_g . Die Gelenkkräfte und -momente sind genau so groß, daß die Kinematik der Gelenke eingehalten wird. Ihre Koordinaten bezüglich der Basis \vec{e}_i wollen wir in $\boldsymbol{\lambda}$ zusammenfassen. Die Dimension von $\boldsymbol{\lambda}$ ist somit n_c . **Die Werte von $\boldsymbol{\lambda}$ sind noch unbekannt.** Man kann also schreiben

$$\mathbf{h}^c = \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (2.78)$$

Wir haben also die Unbekannten \mathbf{p} , \mathbf{z} und $\boldsymbol{\lambda}$. Das sind $2 \cdot 6 \cdot n + n_c$ Variable. Mit (2.77) und (2.78) liegen uns $2 \cdot 6 \cdot n$ Gleichungen vor. Wir müssen noch die **impliziten Zwangsbedingungen** der Lage in (2.73): $\mathbf{g}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ hinzunehmen. Es folgen die

Bewegungsgleichungen des MKS in Deskriptor Form für die Absolutkoordinaten \mathbf{p} , \mathbf{z} und Zwangskräfte $\boldsymbol{\lambda}$; $2 \cdot 6 \cdot n + n_c$ DAEs:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{Z}(\mathbf{p}) \mathbf{z} \\ \mathbf{M} \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{z}) &= \mathbf{h}^a(\mathbf{p}, \mathbf{z}, t) + \mathbf{G}^T(\mathbf{p}) \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{g}(\mathbf{p}, t) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.79)$$

Für die Matrizen gilt:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{Z}_i & \\ & & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & & \mathbf{Z}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{M}_i & \\ & & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & & \mathbf{M}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_i \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}^{a,c} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1^{a,c} \\ \vdots \\ \mathbf{h}_i^{a,c} \\ \vdots \\ \mathbf{h}_n^{a,c} \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

Die Matrizen \mathbf{Z} und \mathbf{M} sind dünn besetzt (blockdiagonale Belegung).

Wie in (2.57) gezeigt, sind in \mathbf{h}_i^a alle eingeprägten Kräfte und Momente aus Gewicht, äußeren Kräften und Momenten und Kraftelementen enthalten. Hierfür müssen wir ein Kraftgesetz angeben, um den Vektor \mathbf{h}^a berechnen zu können.

Liegen die **expliziten Zwangsbedingungen** (2.75) mit der Aussage (2.76) vor, so kann man die Bewegungsgleichungen (2.80) auf Minimalform (mit der Dimension F) reduzieren.

Für die **kinematischen Gleichungen** gilt einfach $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \dot{\mathbf{y}}$ (2.81)

Für die dynamischen Gleichungen findet man aus (2.80) mit (2.75, 76)

$$\underbrace{\mathbf{J}_y^T \mathbf{M} \mathbf{J}_y}_{\mathbf{M}_y} \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\mathbf{J}_y^T \mathbf{Q}}_{\mathbf{Q}_y} = \underbrace{\mathbf{J}_y^T \mathbf{h}^a}_{\mathbf{h}_y^a} + \underbrace{\mathbf{J}_y^T \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}}_{\mathbf{0}} + \underbrace{\mathbf{J}_y^T \mathbf{M} (\dot{\mathbf{J}}_y \mathbf{z} + \dot{\mathbf{q}})}_{\boldsymbol{\chi}_y}$$

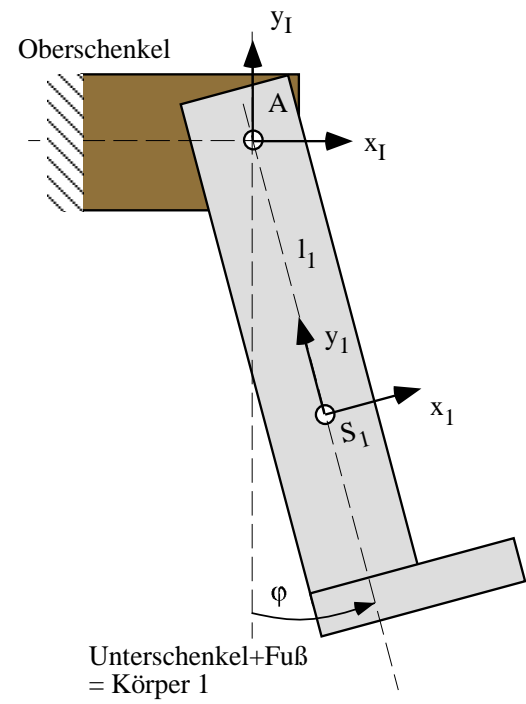
und somit

die F gewöhnlichen dynamischen Differentialgl. 2. Ordg für die Relativkoordinaten \mathbf{y}

$$\mathbf{M}_y(\mathbf{y}) \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{Q}_y(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = \mathbf{h}_y^a(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) + \boldsymbol{\chi}_y(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) \quad (2.82)$$

Matrix \mathbf{M}_y ist symmetrisch und positiv definit und hat die Dimension $F \times F$. Durch die Multiplikation mit \mathbf{J}_y ist \mathbf{M}_y nun voll besetzt und vom Zustand \mathbf{y} abhängig. Die übrigen Spaltenmatrizen in (2.82) haben die Länge F .

Übung 2.5 Stelle die Bewegungsgleichungen für den pendelnden Unterschenkel mit starrem Fußgelenk auf. Wir gehen von ebenen Bewegungen aus und modellieren das Kniegelenk als Drehgelenk.



2.7 MKS-Programme und ihre Formalismen

In Tab. 1.1 wurden einige MKS Programme zitiert. Details über die Entwicklungsgeschichte und weiterer Programme sind dem Bild 2.14 zu entnehmen. Es zeigt sich, dass viele Programm-Entwicklungen nur an Institutionen oder nur zeitweilig genutzt wurden. Die heute weltweit führenden Programme sind demnach ADAMS (USA), DADS (USA) , SIMPACK (D) und WorkingModel (USA). Es ist abzuwarten, wie sich die toolbox SimMechanics von Matlab (USA) bewährt.

In Bild 2.14 ist auch festgehalten, dass bis auf SIMPACK alle Programme in Absolutkoordinaten formuliert sind, also diese die Bewegungsgleichungen (2.80) anwenden. Desweiteren bieten fast alle Programme auch die Modellierung elastischer Körper an.

Im Fakultät 06 der FHM sind die Programme SIMPACK und WorkingModel verfügbar.

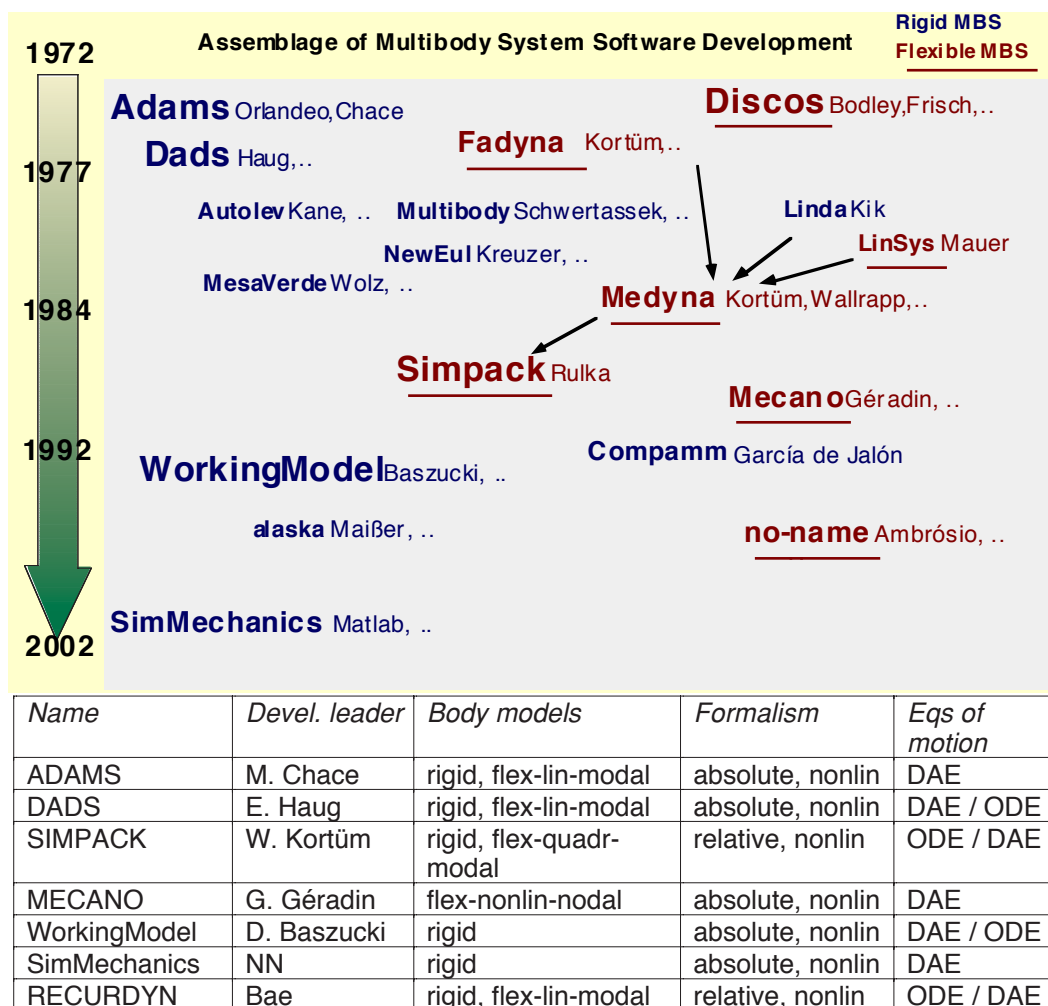


Bild 2.14: Überblick über kommerzielle MKS-Programme und deren Eigenschaften.