Hochschule München, FK06, Prof. Dr. O. Wallrapp 16.11.2007
update: 26.11.2009 : new notation
update: 30.11.2009 : kleine text. Korrektur
update: 02.12.2009 : P0 andere Matrix-Konstellation

Signale und Systeme.
Anhang: Zur Bestimmung der Laplace-Funktion von Dgls. mit Anfangsbedingungen
(vgl. Skript Prof. Unterseer, Prakt. Prof. Wallrapp

Gegeben sei die Dgl: $a_3\, y''' + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = b\, u(t)$,
mit $y = y(t)$, Anfangsbedg. $y0 = y(0+)$, $y0' = y'(0+)$, $y0'' = y''(0+)$
und den Koeffizienten a_3, a_2, a_1, a_0.
Gesucht: Lösung im Bildbereich Y(s) und daraus die Lösung im Zeitbereich y(t).
Lösung: $\mathcal{L}\{ a_3\, y''' + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y \} = \mathcal{L}\{b\, u(t)\}$.
unter der Verwendung der Transformation von $\mathcal{L}\{ y^{(n)}\}$ nach Tabelle (Skript)
folgt:

$$\begin{aligned}
& a_3\,(s^3\, Y - s^2\, y0 - s\, y0' - y0'') \\
+\ & a_2\,(s^2\, Y - s^1\, y0 - 1\, y0') \\
+\ & a_1\,(s^1\, Y - 1\, y0) \\
+\ & a_0\,(1\, Y) = \mathcal{L}\{b\, u(t)\}
\end{aligned}$$

Wir sammeln die Anteile mit Y in P Y auf der linke Seite und bringen den Rest von links, genannt P0 auf die rechte Seite:

$$P\, Y = P0 + \mathcal{L}\{b\, u(t)\}.$$

Die Lösung hieraus ist: $Y(s) = \dfrac{1}{P}\,(P0 + \mathcal{L}\{b\, u(t)\})$ => $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$

Die Einzelterme:

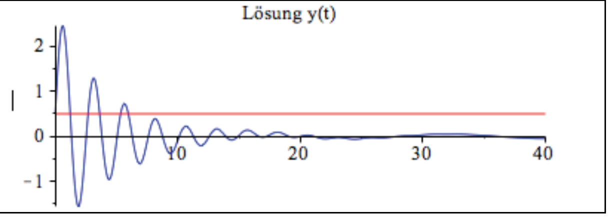
$$P = a_3\, s^3 + a_2\, s^2 + a_1\, s + a_0$$

$P0$, der Term der Anfangsbedingungen wird durch ein Matrixprodukt dargestellt:

$$\begin{aligned}
P0 = \ & a_3\, s^2\, y0 + a_3\, s\, y0' + a_3\, 1\, y0'' \\
& + a_2\, s\, y0 + a_2\, 1\ y0' \\
& + a_1\ 1\ y0 \\
& = \underbrace{\begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}row} \underbrace{\begin{pmatrix} s^2 & s & 1 \\ s & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{S}mat} \underbrace{\begin{pmatrix} y0 \\ y0' \\ y0'' \end{pmatrix}}_{\mathbf{I}vec} = \mathbf{S}row.\mathbf{A}mat\ .\mathbf{I}vec
\end{aligned}$$

was leicht nachzuprüfen ist. Die Matrizen für P0 sind:
Srow, die Ableitungen von y, ist eine 1×n - Zeile,
Amat ist eine n×n - Dreiecksmatrix, **I**vec ist eine n×1 - Spalte,
n ist die höchste Ableitung der Dgl. und somit die Dimension dieser Matrizen.

Beispiel:
$2\, y''' + 4\, y'' + 14\, y' + 20\, y = \cos(0.4\, t)$
mit Anfangsbedg.
$y(0) = 0.5$, $y'(0) = 5$, $y''(0) = 1$.



Hochschule München, FK06, Prof. Dr. O. Wallrapp 16.11.2007
update: 26.11.2009

Signale und Systeme.
Anhang: Zur Bestimmung der Stabilität LZI-Systeme
(vgl. Skript Prof. Steger, Prakt. Prof. Wallrapp

Gegeben sei die Dgl: $a_3\, y''' + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = 0$.
Gesucht ist die Stabilität des Eigensystems.
Lösung: Anwendung des Hurwitz-Kriteriums

$\mathcal{L}\{ a_3\, y''' + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y \} = G(s) = 1/P$, mit $P(s) = a_3\, s^3 + a_2\, s^2 + a_1\, s + a_0 = N(s)$.
Für die Koeffizienten a_3, a_2, a_1, a_0 muss gelten, je nach Ordnung der Dgl, siehe Tab. 1

$N(s)$	$N(s)$ ist stabil, wenn gilt
$a_2\, s^2 + a_1\, s + a_0$	$a_2 > 0\ ,\ a_1 > 0\ ,\ a_0 > 0$
$a_3\, s^3 + a_2\, s^2 + a_1\, s + a_0$	$a_3 > 0\ ,\ a_2 > 0\ ,\ a_1 > 0\ ,\ a_0 > 0\ ,$ $a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 > 0$
$a_4\, s^4 + a_3\, s^3 + a_2\, s^2 + a_1\, s + a_0$	$a_4 > 0\ ,\ a_3 > 0\ ,\ a_2 > 0\ ,\ a_1 > 0\ ,\ a_0 > 0\ ,$ $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 - a_1^2 \cdot a_4 - a_0 \cdot a_3^2 > 0$

Tab. 1: Hurwitz-Kriterium