Zur Vorlesung Signale+Systeme (MFB320) - Praktikum 3
Laplace-Transformation (Vorwärts, Rückwärts)

von Prof. Dr. O.Wallrapp, FK06 HM - 12.10.2007 - erstellt mit Maple 11.
Teile aus Praktikum Prof. Dr. Steger 22.10.2007
Ergänzungen Prof. Dr. Wallrapp 05.04.2008, 02.11.2009

Funktionen im Zeitbereich (t-Bereich) lassen sich mittels Laplace-Transformation in den Bidlbereich (s-Bereich) überführen.
Details siehe Manuskript der Vorlesung.
Vorteil der s-Beschreibung liegt in der Möglichkleit, über das System, das dieser Zeitfkt. y(t) zugrunde liegt, etwas auszusagen, wie z.B.
-> Stabilität (betrachte die Pole des Nenners von Y(s))
-> den Anfangswert y(t->0) -> s*Y(s->infinity)
-> den Endwert y(t->inifity) -> s*Y(s->0)
-> lösen von LZI-Systemen (Praktikum 4)

Wir schreiben in Maple:

```
> restart:
  with(inttrans):          # Bib Integraltransform.
  with(plots):             # bib Grafik
> y := cos(t);             # Beispiel
```

$$y := \cos(t)$$

```
> Y:= laplace(y,t,s);      # Laplace-Transformation
```

$$Y := \frac{s}{s^2+1}$$

```
> yr := invlaplace(Y,s,t); # Rück-Laplace-Transform.
```

$$yr := \cos(t)$$

Pole, Polplan

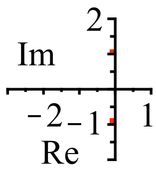
```
> denom(Y);                          # Nennerpolynom
  pole:= solve(%=0,s);               # Nullstellen = Pole
```

$$s^2+1$$

$$pole := \mathrm{I}, -\mathrm{I}$$

```
> complexplot([pole],style=point,                   # Polplan
    symbol=circle,symbolsize=20,thickness=2,
    scaling=constrained,view=[-3..1,-2..2], title="Polplan",
  labels=["Re","Im"]);
```

Polplan



Untersuchung Anfangswertsatz (AW) mittels s*Y, - siehe Bild y(t)

```
> y0   := limit(s*Y, s=infinity);        # AW Signals >> y(t=0)
```

$$y0 := 1$$

```
> dy0 := limit(s*(s*Y-y0),s=infinity); # AW Ableit. >>y'(t=0)
  limit(diff(y,t), t=0);                # Probe im Zeitbereich
```

$$dy0 := 0$$

$$0$$

Untersuchung Endwertsatz (EW) mittels s*Y - siehe Bild y(t) - periodisch !!

```
> yoo  := limit(s*Y, s=0);          # EW Signals >>y(t>unendl)
  limit(y, t=infinity);             # Probe im Zeitbereich
```

$$yoo := 0$$

$$-1\,..1$$

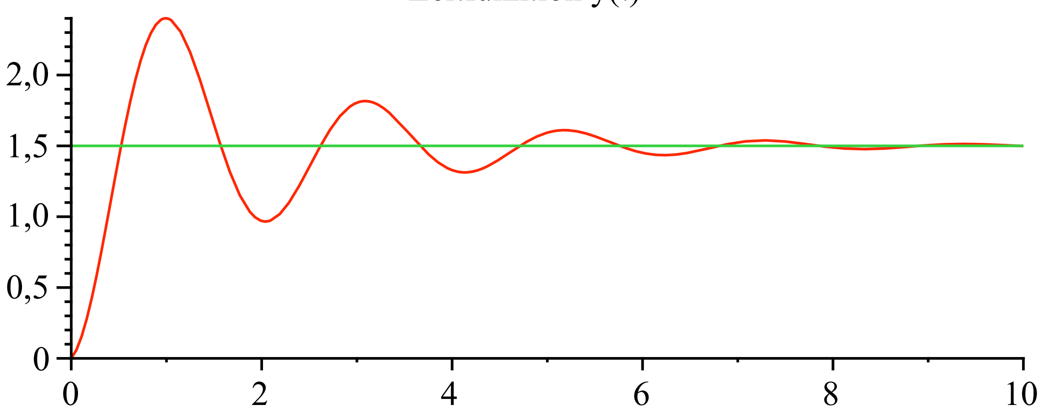
Aufgabe 1:

y := 3/2*(1-exp(-t/2)*cos(3*t));
Diskutiere die Funktion im s-Bereich (bestimmen Sie die Pole, AW und EW)

```
> restart:
  with(inttrans):            # Bib Integraltransform.
  with(plots):               # bib Grafik
> y := 3/2*(1-exp(-t/2)*cos(3*t));    #Eingabe Zeitfunktion
  plot([y, 1.5],t=0..10, title="Zeitfunktion y(t)");
```

$$y := \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\cos(3\,t)$$

Zeitfunktion y(t)



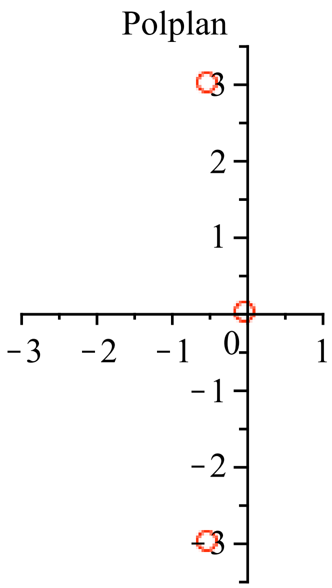

```
> Y := laplace(y,t,s);        # Laplace-Transformation
```

$$Y := \frac{3}{2}\,\frac{2\,s+37}{s\,(2\,s+1-6\,\mathrm{I})\,(2\,s+1+6\,\mathrm{I})}$$

```
> denom(Y);                               # Nennerpolynom
  pole:= solve(%,s);                      # Nullstellen = Pole
  complexplot([pole],style=point,         # Polplan
    symbol=circle,symbolsize=20,thickness=2,
    scaling=constrained,view=[-3..1,-3.5..3.5], title=
  "Polplan");
```

$$2\,s\,(2\,s+1-6\,\mathrm{I})\,(2\,s+1+6\,\mathrm{I})$$

$$pole := 0,\ -\frac{1}{2}+3\,\mathrm{I},\ -\frac{1}{2}-3\,\mathrm{I}$$



Das System ist stabile konj.komplexe Pole, aber auch einen Nullwert.

```
> y0:= limit(s*Y,s=infinity);             # AW des Signals >> y
  (t=0)
```

$$y0 := 0$$

```
> dy0:= limit(s*(s*Y-y0),s=infinity); # AW der Ableitung
  (Steigung) >> y'(t=0)
  eval(diff(y,t),t=0);                    # Probe: im Zeitbereich
```

$$ys0 := \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4}$$

AW ist 0 wie Graphik zeigt. Die Anfangssteigung ist 3/4

```
> yoo:= limit(s*Y,s=0);                   # EW des Signals >> y
  (t>unendl)
  limit(y,t=infinity);                    # Probe: im Zeitbereich
```

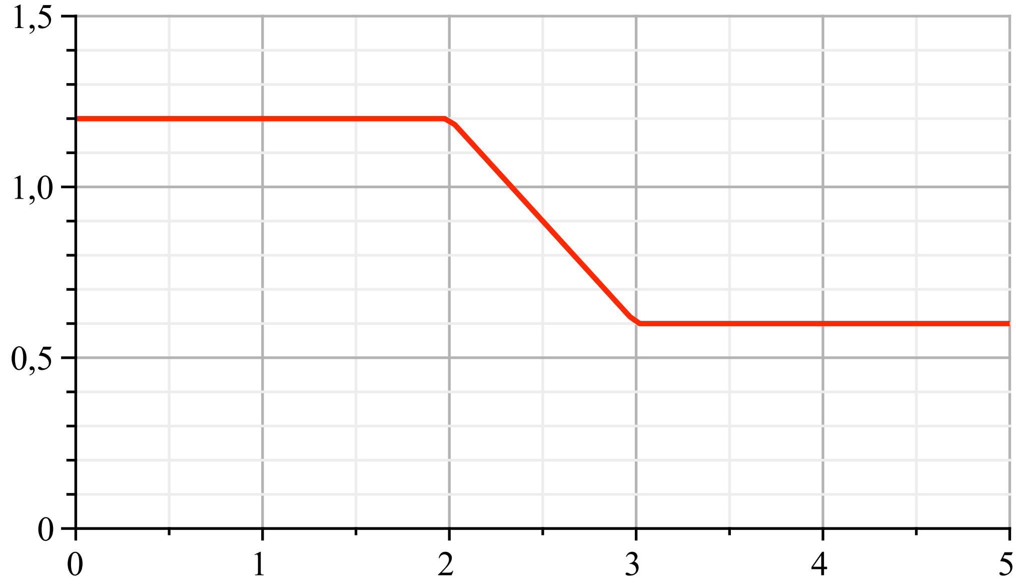
$$yoo := \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2}$$

EW geht auf 3/2, siehe Graphik.

Aufgabe 2:

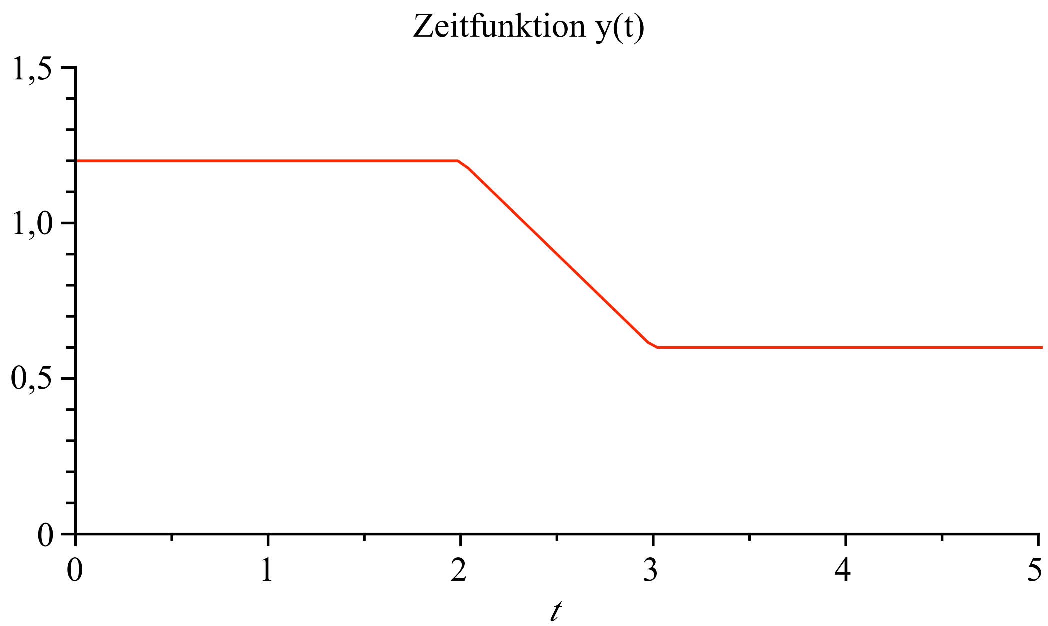
Gegeben ist die Rampenfunktion y(t) nach Skizze.



- Geben Sie die Signale in Maple ein und plotten Sie sie im Zeitbereich
- Berechnen Sie die Laplace-Transformierte und bestimmen Sie die Pole, AW und EW
- Bestimme die Fourrierreihe von y(t) für eine periodische Folge T = 5 s.

```
> restart:
  with(inttrans):          # Bib Integraltransform.
  with(plots):             # bib Grafik
> y := 1.2*Heaviside(t) - 0.6*(t-2)*Heaviside(t-2) + 0.6*
  (t-3)*Heaviside(t-3);
  plot([y], t=0..10, title="Zeitfunktion y(t)",view = [0..5,
  0..1.5] );
```

$$y := 1.2\,\mathrm{Heaviside}(t) - 0.6\,(t-2)\,\mathrm{Heaviside}(t-2) + 0.6\,(t-3)\,\mathrm{Heaviside}(t-3)$$




```
> Y := simplify(laplace(y,t,s));   #Laplace Fkt. ! simplify !
```

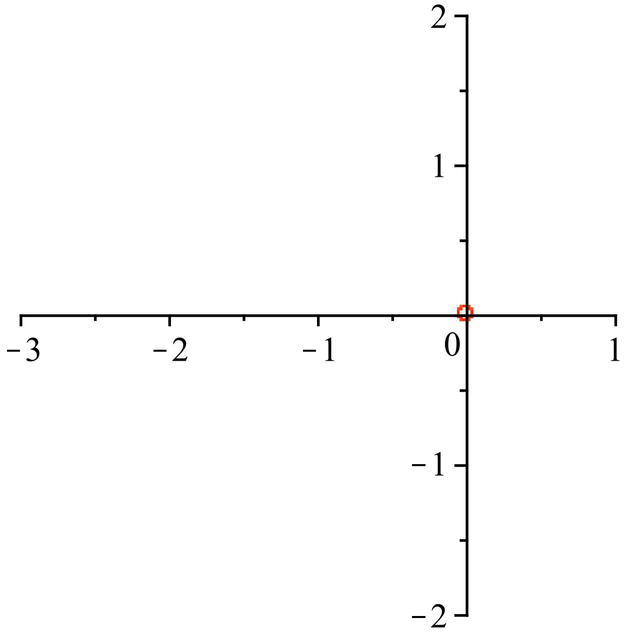
$$Y := \frac{0.6000000000\,\left(2.\,s - 1.\,e^{-2.\,s} + e^{-3.\,s}\right)}{s^2}$$

```
> pole := solve(denom(Y),s);
```

$$pole := 0, 0$$

Wir haben einen doppelten Pol bei 0 !!

```
> complexplot([pole],style=point,
    symbol=circle,symbolsize=20,thickness=2,
    scaling=constrained,view=[-3..1,-2..2]);
```




```
> limit(s*Y, s=0);              # Prüfung bei t -> oo
```

$$0.6000000000$$

```
> limit(s*Y, s=infinity);       # Prüfung bei t = 0
```

$$1.200000000$$

```
>
```

Fourrierreihe von y(t), die nach T periodisch folgt.
Definition: yfr = a0/2 + sum(a(k)*cos(k*omega*t) + b(k)*sin(k*omega*t), k = 1.. oo)

```
> parfr := [T = 5];
```

$$parfr := [T = 5]$$

```
> omega:=2*Pi/T;
  a0 :=    2/T * int(y,                 t=0..T);
  a  := k->2/T * int(y*cos(k*omega*t), t=0..T);
  b  := k->2/T * int(y*sin(k*omega*t), t=0..T);
```

$$\omega := \frac{2\,\pi}{T}$$

$$a0 := \frac{1}{T}\Big(2\,\big(1.200000000\,\mathrm{Heaviside}(T)\,T - 0.3000000000\,\mathrm{Heaviside}(T-2.)\,T^2 - 1.200000000\,\mathrm{Heaviside}(T-2.) + 1.200000000\,\mathrm{Heaviside}(T-2.)\,T + 0.3000000000\,\mathrm{Heaviside}(T-3.)\,T^2 + 2.700000000\,\mathrm{Heaviside}(T-3.) - 1.800000000\,\mathrm{Heaviside}(T-3.)\,T\big)\Big)$$

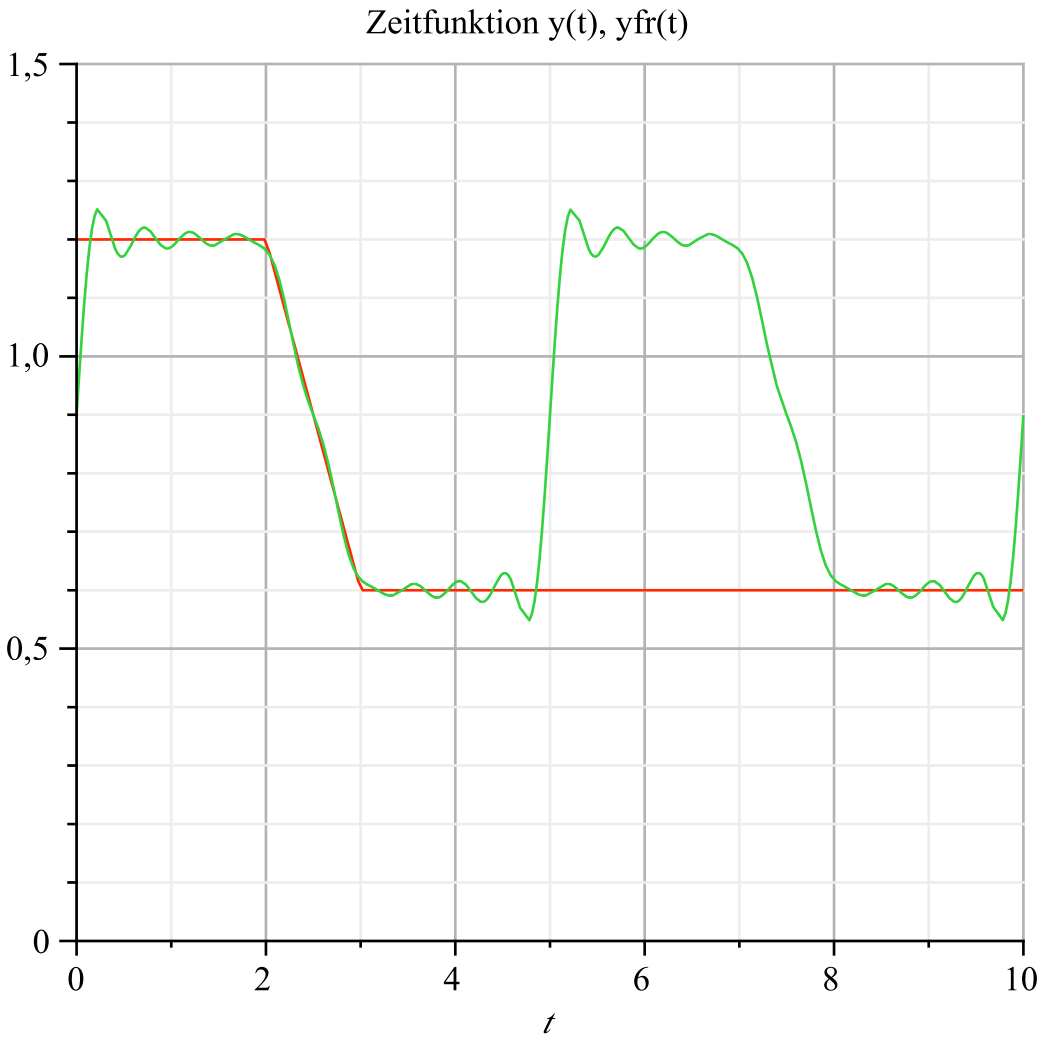
$$a := k \rightarrow \frac{2\left(\int_0^T y\cos(k\,\omega\,t)\,dt\right)}{T}$$

$$b := k \rightarrow \frac{2\left(\int_0^T y\sin(k\,\omega\,t)\,dt\right)}{T}$$

```
> yfr := a0/2 + sum(a(k)*cos(k*omega*t) + b(k)*sin(k*omega*t)
  , k=1..10):
  yfr := simplify(subs(parfr,  yfr));
```

$$\begin{aligned}
yfr :=\ & 0.03679391339 \sin(7.539822370\,t) + 6.700000000\ 10^{-11} \cos(5.026548246\,t) \\
& + 0.09578270128 \sin(3.769911184\,t) + 0.02138397969 \sin(8.796459432\,t) \\
& + 0.02322133691 \sin(2.513274124\,t) + 0.03819718634 \sin(6.283185308\,t) \\
& + 0.01909859317 \sin(12.56637062\,t) + 0.03657990221 \sin(5.026548246\,t) \\
& + 1.590000000\ 10^{-10} \cos(6.283185308\,t) - 6.500000000\ 10^{-11} \cos(7.539822370\,t) \\
& - 6.722957217\ 10^{-11} \cos(8.796459432\,t) + 5.530000000\ 10^{-11} \cos(10.05309649\,t) \\
& - 1.030000000\ 10^{-10} \cos(11.30973355\,t) + 0.02839021829 \sin(10.05309649\,t) \\
& + 0.3696512244 \sin(1.256637062\,t) - 5.125407081\ 10^{-10} \cos(2.513274124\,t) \\
& - 1.000000000\ 10^{-11} \cos(3.769911184\,t) + 0.01901491475 \sin(11.30973355\,t) \\
& - 3.400000000\ 10^{-11} \cos(12.56637062\,t) + 0.9000000000
\end{aligned}$$

```
> plot([y,yfr], t=0..10, title="Zeitfunktion y(t), yfr(t)",
  view = [0..10, 0..1.5]);
```



Aufgabe 3:

a) Y = (3*s+5) / (s*(s^3+2*s^2+3*s+4));
b) Y(s) = 2 / s^2 (s^3 + 2 s + 1) / (s^3 + 2 s^2 + 4 s + 8)
- Geben Sie das Signale in Maple ein und zeichnen Sie den Polplan, berechne AW und EW
- Berechnen Sie die Laplace-**Rück**transformierte und plotten Sie das Signal im Zeitbereich (mit Asymptote, falls vorhanden)

```
> restart:
  with(inttrans):          # Bib Integraltransform.
  with(plots):             # bib Grafik
```

Funktion a)

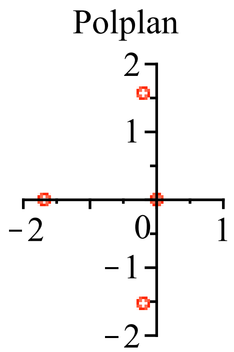
```
> Y := (3*s+5)/(s*(s^3+2*s^2+3*s+4));       # Signal im
  Bildbereich
```

$$Y := \frac{3\,s+5}{s\,\left(s^3+2\,s^2+3\,s+4\right)}$$

```
> pole:= solve(denom(Y),s):                 # Pole:
  pole:= evalf(pole);                        #   als real-Zahlen
```

$pole$:= 0., -1.650629192, -0.1746854042 − 1.546868888 I, -0.1746854042 + 1.546868888 I

```
> complexplot([pole],style=point,
    symbol=circle,symbolsize=20,thickness=2,
    scaling=constrained,view=[-2..1,-2..2], title="Polplan");
```

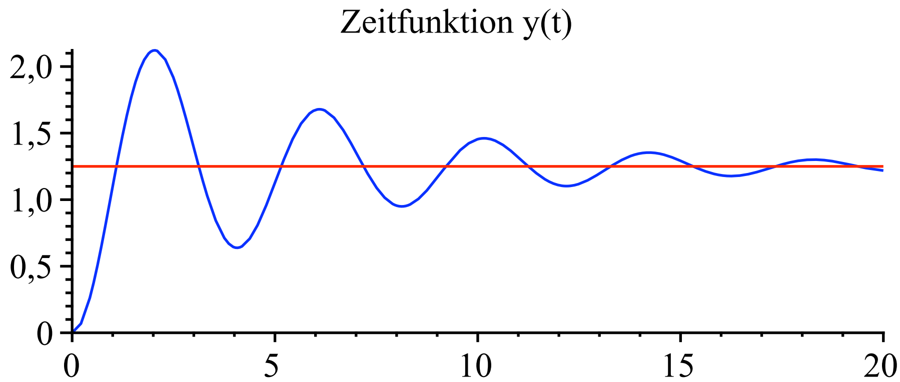



```
> y := invlaplace(Y,s,t):                    # Koeff. ohne Dezi.pkt!
  y := evalf(y):                             # reelle Darstellung
  y := simplify(y);                          # Maple-Schrott löschen
```

$$y := -0.006376410000\,e^{-1.650629191\,t} - 0.6218117950\,e^{(-0.1746854043 - 1.546868887\,I)\,t} - 0.07362226365\,I\,e^{(-0.1746854043 - 1.546868887\,I)\,t} - 0.6218117950\,e^{(-0.1746854043 + 1.546868887\,I)\,t} + 0.07362226365\,I\,e^{(-0.1746854043 + 1.546868887\,I)\,t} + 1.250000000$$

```
> yoo:= limit(s*Y,s=0);                      # Endwert
  plot([y, yoo],t=0..20,color=[blue,red],title="Zeitfunktion y(t)");
```

$$yoo := \frac{5}{4}$$




```
> y0  := limit(s*Y, s=infinity);         # AW
```

$$y0 := 0$$

```
> dy0:= limit(s*(s*Y-y0),s=infinity); # AW der Ableitung
```

$$dy0 := 0$$

Funktion b)

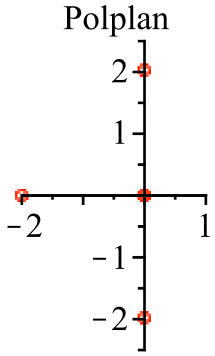
```
> Y := 2*(s^3+2*s+1)/s^2/(s^3+2*s^2+4*s+8);      # Signal im Bildbereich
```

$$Y := \frac{2\,(s^3 + 2\,s + 1)}{s^2\,(s^3 + 2\,s^2 + 4\,s + 8)}$$

```
> pole:= solve(denom(Y),s):                  # Pole:
  pole:= evalf(pole);                        #   als real-Zahlen
```

$$pole := 0.,\ 0.,\ -2.,\ 2.\,I,\ -2.\,I$$

```
> complexplot([pole],style=point,
    symbol=circle,symbolsize=20,thickness=2,
    scaling=constrained,view=[-2..1,-2.5..2.5], title=
  "Polplan");
```



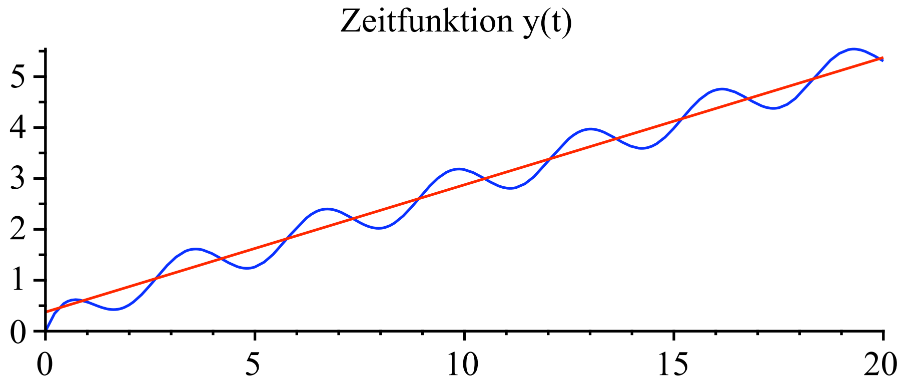

```
> y := invlaplace(Y,s,t):                      # Koeff. ohne Dezi.pkt!
  y := simplify(y);                            # Maple-Schrott löschen
```

$$y := \frac{5}{16}\cos(2\,t) + \frac{3}{16}\sin(2\,t) + \frac{3}{8} - \frac{11}{16}\,\mathrm{e}^{-2\,t} + \frac{1}{4}\,t$$

y(t) hat eine Asymptote der lin Glg. 3/8 + t/4

```
> yoo:= limit(s*Y,s=0);                       # Endwert
  plot([y, 3/8+t/4],t=0..20,color=[blue,red],title=
  "Zeitfunktion y(t)");
```

$$yoo := \mathit{undefined}$$




```
> y0  := limit(s*Y, s=infinity);         # AW
```

$$y0 := 0$$

```
> dy0 := limit(s*(s*Y-y0),s=infinity); # AW der Ableitung
```

$$dy0 := 2$$

```
>
```