Eigenfunktionen der Dehnung des Stabes: A1.3

Probemstellung

Der Ansatz w(x,t) = W(x) q(t) der Bewegungsgleichung der Dehnung rho0 A d^2w / dt^2 + E A w'' = 0 liefert die ortsabhaengige Bewegungsgleichung W''(x) + beta^2 W(x) = 0 mit der allgemeinen Loesung
W(x) = C1 sin(beta x) + C2 cos(beta x)
und die zeitabhaengige Bewegungsgleichung d^2q(t) / dt^2 + omega^2 q(t) = 0 mit der allgemeinen Loesung
q(t) = B1 sin(omega t) + B2 cos(omega t).
Freie Parameter sind die Eigenwerte beta und die Eigenkreisfrequenzen omega = 2 π f gemaess beta^2 = omega^2 rho0 A / (E A).
Aufgaben:
1. Finde zu den Randbedingungen des gelagerten Stabes die charakteristische Gleichung fuer beta.
2. Berechne beta für i = 1, ni.
3. Bestimme die Eigenfunktionen der Dehnung für **festeingespannt -- frei**.

Festlegung der Parameter

```
ni        = 10;             (* Zahl der gewuenschten Eigenfunktionen                      *)
npi       = 4;              (* Zahl der Eigenfunktionen, die zu zeichnen sind             *)
len       = 12;             (* Laenge l des Balkens                                       *)
Randbg    = "fest - frei";  (* Benennung der Randbedingungen                          *)
Randx0    = {0};            (* Randbeg. fuer x=0: 0=(w=0), 1=(w'=0), 2=(w''=0), 3=(w'''=0) *)
Randxl    = {1};            (* Randbeg. fuer x=l: 0=(w=0), 1=(w'=0), 2=(w''=0), 3=(w'''=0) *)
Skalierg  = 2;              (* Skalierg. der Fkt: 0=keine, 1=(Wmax=1), 2=(Int mue W^2 dx=1)*)
rhoD      = 8930;           (* Dichte in kg/m^3                                           *)
AQuer     = 0.002^2*Pi/4    (* Querschnittsflaeche in m^2                                 *)
massmy    = rhoD * AQuer    (* Massenbelegung in kg/m                                     *)
```

3.14159×10^{-6}

0.0280544

```
JFTMv  = non;          (* Flaechentraegheitsmoment in m^4                          *)
Emodv  = 12*10^+10;   (* Elastizitaetsmodul in N/m^2                              *)
```

Loesung

■ 1. Charakteristische Gleichung der homogenen partiellen DGL: W''(x) + beta^2 W(x) = 0 fuer gegebene Randbedingungen.

■ 1.1 Allgemeine Eigenfunktion und deren Ableitungen

```
W = C1 Sin[beta x]+ C2 Cos[beta x]
```

C2 Cos[beta x] + C1 Sin[beta x]

```
d1W = D[W,x]
```

beta C1 Cos[beta x] − beta C2 Sin[beta x]

■ 1.2 Die Funktionswerte für x = 0 und x = l

```
W0 = Table[0,{2}]; Wl = Table[0,{2}];
```

```
W0[[1]] = W /. x -> 0
```

C2

```
Wl[[1]] = W /. x -> l
```

C2 Cos[beta l] + C1 Sin[beta l]

```
W0[[2]] = d1W /. x -> 0
```

beta C1

```
Wl[[2]] = d1W /. x -> l
```

beta C1 Cos[beta l] - beta C2 Sin[beta l]

■ 1.3 Finde die charakteristische Gleichung (Charglg = 0) für die oben genannten Randbedingungen aus Det(CMat) = 0 von CMat . Ck = 0, wo Ck = {C1, C2}.

eq1 bis eq2 beschreibt die 2 Randbedingungen.

```
eq1 = W0[[Randx0[[1]]+1]];
eq2 = Wl[[Randxl[[1]]+1]];


CMat = Table[0,{2},{2}];
CMat[[1,1]] = eq1 /. {C1->1,C2->0,C3->0,C4->0};
CMat[[1,2]] = eq1 /. {C1->0,C2->1,C3->0,C4->0};

CMat[[2,1]] = eq2 /. {C1->1,C2->0,C3->0,C4->0};
CMat[[2,2]] = eq2 /. {C1->0,C2->1,C3->0,C4->0};

MatrixForm[CMat]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \text{beta Cos[beta l]} & -\text{beta Sin[beta l]} \end{pmatrix}$$

```
Charglg = Simplify[Det[CMat]]/-beta    (* fuer fest - frei   *)
```

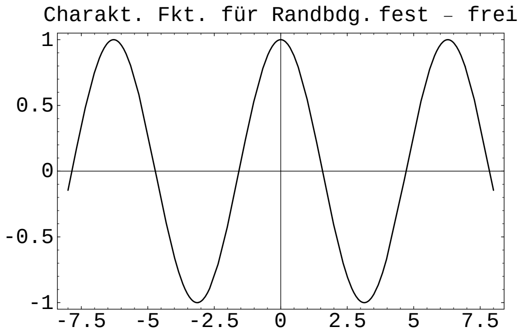
Cos[beta l]

```
Char = Charglg /. l → 1
erg = FindRoot[Char == 0, {beta, Pi / 2}]
```

{beta → 1.5708}

■ 1.4 Zeichne die charakteristische Gleichung fuer l = 1.

```
Plot [{Charglg/.l->1}, {beta,-8,8},
      PlotLabel-> "Charakt. Fkt. für Randbdg."Randbg,
      Frame    -> True];
```



■ 2. Berechne die Nullstellen der charakteristischen Gleichung, d.h. berechne beta*l fuer i = 1, ni

```
Char  = Charglg/.l->1;
betal = Table[0,{ni}];
Print["  l |     betal * l       | betal  fuer l = ",len];
Print["------------------------------------------------"];
Do [
    erg = FindRoot[Char == 0, {beta,(i1*2-1)*Pi/2}];
    bli = beta/.erg[[1]];
    betal[[i1]] = bli;
    Print[ PaddedForm [i1,        2]," | ",
           PaddedForm [bli,{17,15}]," | ",PaddedForm [bli/len,{17,15}]];
,{i1,ni}]
```

```
  l |     betal * l       | betal  fuer l = 12

------------------------------------------------

  1 |   1.570796326794897 |   0.130899693899575

  2 |   4.712388980384690 |   0.392699081698724

  3 |   7.853981633974483 |   0.654498469497874

  4 |  10.995574287564280 |   0.916297857297023

  5 |  14.137166941154070 |   1.178097245096172

  6 |  17.278759594743860 |   1.439896632895322

  7 |  20.420352248333660 |   1.701696020694471

  8 |  23.561944901923450 |   1.963495408493620

  9 |  26.703537555513240 |   2.225294796292770

 10 |  29.845130209103030 |   2.487094184091919
```

■ 3. Bestimme die Eigenfunktionen des Balkens fuer die genannten Randbedingungen.

■ 3.1 Berechne die Konstanten Ck = {C1, C2} der Glg. CMat . C = 0 fuer Werte von beta*l und l = len. Bestimme hieraus die Eigenfunktionen Wi(x). Skaliere die Funktionen gemaess Skalierg.

```
Wi  = Table[0,{ni}];
Mi = Table[0,{ni}];
Ki = Table[0,{ni}];
Qi = Table[0,{ni}];

Print["  i |    Ai           Bi   fuer l = ",len,"  | Freq[Hz]   Mi       Ki           Qi      Wi(L) "];
Print["------------------------------------------------------------------------------------------"];
Do [
    Ck      = NullSpace[CMat /.{beta->betal[[i1]]/len,l->len}];
    Wih     = W /.{C1->Ck[[1,1]], C2->Chop[Ck[[1,2]]],beta->betal[[i1]]/len};
    If[Skalierg===1,xmax = 1.0; Skal = Wih/.x->xmax; ];
    If[Skalierg===2,Skal = Sqrt[massmy*NIntegrate[Wih^2,{x,0,len}]] ];
    Wi [[i1]] = Chop[Expand[Wih / Skal]];
    Mi[[i1]] = NIntegrate[massmy*Wi[[i1]]^2,{x,0,len}];
        dWi  = D[Wi[[i1]],{x,1}];
    Ki[[i1]] = NIntegrate[Emodv*AQuer*dWi^2,{x,0,len}];
    Qi[[i1]] = NIntegrate[Wi[[i1]],{x,0,len}];

    Frequi  = Sqrt[Ki[[i1]]/Mi[[i1]]] / (2 * Pi)//N;
    Print[ PaddedForm [i1,     2]," | ",
           PaddedForm [Ck[[1,1]]/Skal ,{13,12}],
           PaddedForm [Chop[Ck[[1,2]]/Skal] ,{15,12}],"  |",
           PaddedForm [Frequi//N      ,{8,3}],
           PaddedForm [Mi[[i1]]      ,{6 ,4}],
           PaddedForm [Ki[[i1]]      ,{9,4}],
           PaddedForm [Qi[[i1]]      ,{9,4}],
           PaddedForm [Wi[[i1]]/.x->len      ,{9,4}]
           ];
,{i1,ni}];
```

i	Ai	Bi fuer l = 12	Freq[Hz]	Mi	Ki	Qi	Wi(L)
1	2.437382614334	0.000000000000	76.370	1.0000	230253.9290	18.6202	2.4374
2	−2.437382614334	0.000000000000	229.110	1.0000	2.0723×10^{6}	−6.2067	2.4374
3	−2.437382614334	0.000000000000	381.851	1.0000	5.7563×10^{6}	−3.7240	−2.4374
4	−2.437382614334	0.000000000000	534.591	1.0000	1.1282×10^{7}	−2.6600	2.4374
5	−2.437382614334	0.000000000000	687.331	1.0000	1.8651×10^{7}	−2.0689	−2.4374
6	2.437382614334	0.000000000000	840.072	1.0000	2.7861×10^{7}	1.6927	−2.4374
7	−2.437382614334	0.000000000000	992.812	1.0000	3.8913×10^{7}	−1.4323	−2.4374
8	2.437382614334	0.000000000000	1145.552	1.0000	5.1807×10^{7}	1.2413	−2.4374
9	−2.437382614334	0.000000000000	1298.293	1.0000	6.6543×10^{7}	−1.0953	−2.4374
10	2.437382614334	0.000000000000	1451.033	1.0000	8.3122×10^{7}	0.9800	−2.4374

```
Print["  i | Wi(x)   fuer l = ",len];
Print["-------------------------------------"];
Do [
    Print[ PaddedForm[i,2]," | ", N[Wi[[i]],14] ];
,{i,1,ni}];
```

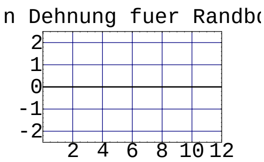
```
  i | Wi(x)   fuer l = 12

-------------------------------------

  1 | 2.43738 Sin[0.1309 x]

  2 | -2.43738 Sin[0.392699 x]

  3 | -2.43738 Sin[0.654498 x]

  4 | -2.43738 Sin[0.916298 x]

  5 | -2.43738 Sin[1.1781 x]

  6 | 2.43738 Sin[1.4399 x]

  7 | -2.43738 Sin[1.7017 x]

  8 | 2.43738 Sin[1.9635 x]

  9 | -2.43738 Sin[2.22529 x]

 10 | 2.43738 Sin[2.48709 x]
```

```
Wi
```

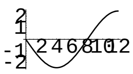
```
{2.43738 Sin[0.1309 x], -2.43738 Sin[0.392699 x], -2.43738 Sin[0.654498 x],
 -2.43738 Sin[0.916298 x], -2.43738 Sin[1.1781 x], 2.43738 Sin[1.4399 x],
 -2.43738 Sin[1.7017 x], 2.43738 Sin[1.9635 x], -2.43738 Sin[2.22529 x], 2.43738 Sin[2.48709 x]}
```

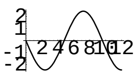
■ 3.2 Zeichne die Eigenfunktionen auf.

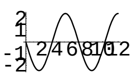
```
Rahmen = Plot[0,{x,0,len},
    PlotLabel-> "Eigenfunktionen Dehnung fuer Randbdg."Randbg,
    Frame -> True,
    GridLines -> Automatic,
    PlotRange -> {{0, len}, {-2.5, 2.5}} ];
```



```
EFplot = Table[0,{npi}];
Do [EFplot[[i]] = Plot[Wi[[i]],{x,0,len}];
,{i,1,npi}];
```







```
Show[Rahmen,EFplot];
```