

# **EINFÜHRUNG IN DIE FINITE ELEMENTE METHODE**

**Prof. Dr.-Ing. Oskar Wallrapp**



**Fachhochschule München  
Fachbereich 06 - Feinwerk- und Mikrotechnik**

**Das vorliegende Manuskript wurde als Hilfsmittel für die Vorlesung Finite Elemente Methode erstellt.**

**Eine – auch auszugsweise – Wiedergabe oder Veröffentlichung bedarf der Genehmigung des Verfassers.**

**All copyrights are preserved.**

**Das Manuskript können Sie herunterladen unter**

[http://www.fh-muenchen.de/fb06/professoren/wallrapp/d\\_wallrapp\\_o.html](http://www.fh-muenchen.de/fb06/professoren/wallrapp/d_wallrapp_o.html)

**München, März 2005**

**Prof. Dr. O. Wallrapp**

### **Ziele:**

Aufbauend auf die Elastostatik erhält der Studierende Einblick in die Finite-Elemente-Methode.

In kleinen Übungen - insbesondere am Rechner unter Anwendung von ComputerMathe-Programmen - muss der Studierende selbst ein FEM-Programm für ebene Balkenstrukturen schreiben.

Er lernt so die Details und die Probleme der FEM-Analyse kennen.

In der Fortsetzung der Vorlesung - Teil II - wird das FEM-Programm ANSYS vorgestellt und die Handhabung realer, 3D Probleme von der Eingabe bis zur Ergebnisinterpretation studiert.

### **Voraussetzungen:**

‡ Technische Mechanik (Statik, **Elastostatik**), Schwingungen

‡ **Matrizenrechnung**, Integralrechnung

# Inhaltsverzeichnis

## Seitenangaben kapitelweise

### Kap

<b>1</b>	<b>Einleitung.....</b>	<b>1 - 1</b>
1.1	Problemstellung.....	1
1.2	Beispiele aus der Strukturmechanik.....	3
<b>2</b>	<b>Modelle der Elastizitätstheorie.....</b>	<b>2 - 1</b>
2.1	Definitionen.....	1
2.2	Modellannahmen des Kontinuums.....	3
<b>3</b>	<b>Grundgleichungen des klassischen Kontinuums.....</b>	<b>3 - 1</b>
3.1	Prinzip der virtuellen Leistung.....	1
3.2	Definition der Spannung.....	2
3.2.1	Beispiel zur Normalspannung.....	4
3.3	Definition der Verzerrung.....	5
3.3.1	Beispiel zur Dehnung.....	7
3.4	Verzerrung und Spannung des klassischen 3D-Kontinuums.....	8
3.5	Materialgesetz.....	9
3.5.1	Der Zugversuch.....	10
<b>4</b>	<b>Grundgleichungen des Euler-Bernoulli-Balkens.....</b>	<b>4 - 1</b>
4.1	Modellannahmen.....	1
4.2	Verzerrungsmaße.....	3
4.3	Modellparameter.....	4
4.4	Elastisches Potential und Schnittgrößen.....	5
d		
<b>5</b>	<b>Ritzansatz und Finite-Elemente-Approximation.....</b>	<b>5 - 1</b>
5.1	Ansatzfunktionen.....	1
5.2	Finite Elemente und Interpolationsfunktionen.....	3
5.3	FE-Ansatz für das ebene Balkenelement.....	7
5.4	FE-Ansatz für das räumliche Balkenelement.....	9
<b>6</b>	<b>FE-Struktur und Bewegungsgleichungen.....</b>	<b>6 - 1</b>
6.1	Die FE-Struktur.....	1
6.2	Herleitung der Bewegungsgleichungen.....	3
6.3	Problemklassen und Lösungsansätze.....	5
6.4	Die Elementmatrizen ebener Balkenelemente.....	6
6.5	FEM-Analyse einer ebenen Balkenstruktur.....	7

# Rechenregeln

## 1. Allgemein:

**Skalare** beliebige Buchstaben einschließlich griechische Buchstaben, z.B.  $a, b, P, x_i, \alpha, \beta, \gamma, \lambda$

**Indizes** mit kleinen Buchstaben, z.B.  $i, j, k, l$

**Matrizen und Vektoren** sind Felder mit Skalare. Ein Vektor ist die Spalte einer Matrix.

unabhängig vom speziellen Vektorraum und unabhängig von einer speziellen Basis

**Vektoren** sind Kleinbuchstaben, im Manuskript Fettdruck, z. B.

$$(1) \quad \mathbf{x} = (x_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n), \quad (x_j), \quad j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

beim Handschreiben (an der Tafel) wird der Buchstabe unterstrichen z.B.  $\underline{x} = (x_j)$ ,

**Vektornorm** (2)  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

**Matrizen** sind Großbuchstaben im Manuskript Fettdruck z.B.

$$(3) \quad \mathbf{M} = (M_{ij}), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad j = 1, 2, 3, \dots, m$$

beim Handschreiben (an der Tafel) wird der Buchstabe doppelt unterstrichen  $\underline{\underline{M}} = (M_{ij})$ .

## 2. "Physikalische Vektoren" im Raum $\mathfrak{R}^2$ oder $\mathfrak{R}^3$ nach Hamel

unabhängig von einer speziellen Basis

**Vektoren** mit Klein- oder Großbuchstaben, mit Pfeil oben, z.B.

$$\vec{v}, \vec{F}$$

**Betrag** oder Länge eines Vektors, z. B.

$$(4a) \quad v = |\vec{v}|; \quad F = |\vec{F}|;$$

**Richtung** eines Vektors, z. B. Richtungsvektor  $\vec{e}_v$  mit  $|\vec{e}_v| = 1$ :

$$(4b) \quad \vec{e}_v = \frac{\vec{v}}{v} \Rightarrow \vec{v} = v \vec{e}_v$$

## 3. Darstellung eines Vektors im Koordinatensystem

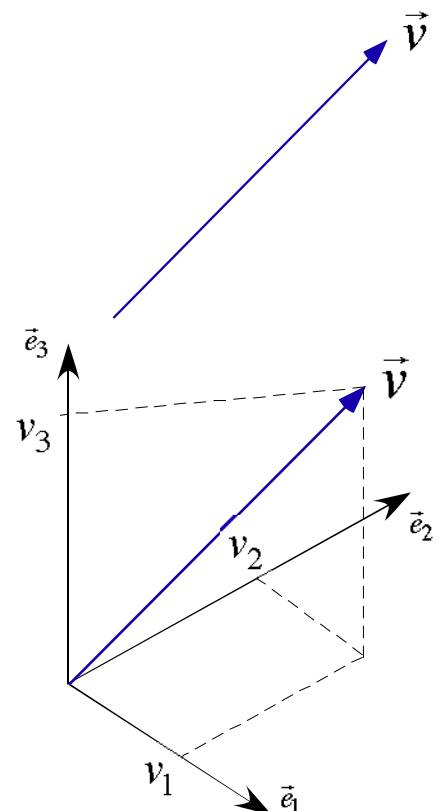
mit den Basisvektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  (3D oder 2D),

wo  $|\vec{e}_i| = 1$ , z.B.

$$(5) \quad \vec{v} = \vec{e}_1 v_1 + \vec{e}_2 v_2 + \vec{e}_3 v_3 \equiv \vec{e}^T \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \vec{e}$$

$$\text{wo} \quad \mathbf{v} = (v_i) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = (\vec{e}_i) = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

und  $v_1, v_2, v_3$  sind die Koordinaten oder Komponenten des Vektors  $\vec{v}$ .

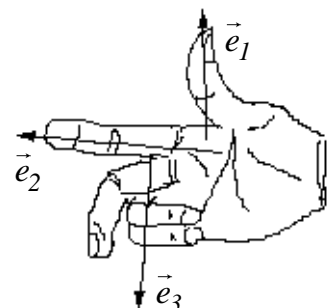


Speziell: **kartesisches Rechtshandsystem**

$$(6) \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad \text{bzw.} \quad \vec{e} \cdot \vec{e}^T = \mathbf{E}$$

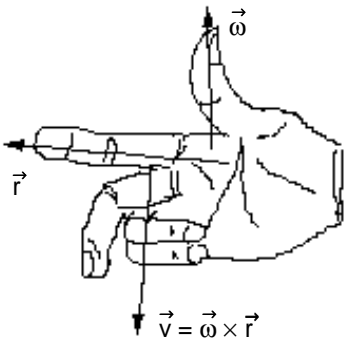
$$\text{also } \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1 \quad \text{und} \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$(7) \quad \vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k \quad \text{bzw.} \quad \vec{e} \times \vec{e}^T = \begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_3 & -\vec{e}_2 \\ -\vec{e}_3 & 0 & \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 & -\vec{e}_1 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{\vec{e}}^T$$



wo  $\mathbf{E}$  die Einheitsmatrix,  $\varepsilon_{ijk}$  der Permutationstensor,  $\sim$  der Tilde-Operator für  $\varepsilon_{ijk}$

#### 4. Zuordnung Vektorrechnung und Matrizenrechnung

Vektor- (Tensor-) Rechnung	Matrizenrechnung mit den Komponenten bez. Basisrichtungen $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$
Vektor $\vec{v}$	$\mathbf{v} = (v_i) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3$
Betrag (Länge) $v =  \vec{v} $	$v =  \mathbf{v}  = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$
Addition $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$	$\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_i) + (b_i) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$
Subtraktion $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b} = -\vec{b} + \vec{a}$	$\mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_i) - (b_i) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$
Produkt Skalar mit Vektor $\vec{v} = \lambda \vec{a} = \lambda a \vec{e}_a$	$\mathbf{v} = \lambda \mathbf{a} = (a_i) + (b_i) = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix} = \lambda a \begin{pmatrix} e_{v1} \\ e_{v2} \\ e_{v3} \end{pmatrix}$
Skalarprodukt $\mu = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ $= ab \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$	$\mu = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{a} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
Kreuzprodukt $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ $v =  \vec{v}  = ab \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$	$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b} = -\tilde{\mathbf{b}} \mathbf{a} \quad (\text{auch } \tilde{\mathbf{a}} \equiv \tilde{\mathbf{A}} \text{ möglich})$ $= \begin{pmatrix} -a_3 b_2 + a_2 b_3 \\ +a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ -a_2 b_1 + a_1 b_2 \end{pmatrix} \quad \text{wo} \quad \tilde{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$
Beachte: $\vec{a} \times \vec{a} = 0$	$\tilde{\mathbf{a}} \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{a}}^T = -\tilde{\mathbf{a}}$
Beispiel Kinematik $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$	 $\mathbf{v} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r} = \begin{pmatrix} -\omega_z r_y + \omega_y r_z \\ +\omega_z r_x - \omega_x r_z \\ -\omega_y r_x + \omega_x r_y \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
Beispiel Statik $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$	$\text{aber } \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} -\omega_y^2 - \omega_z^2 & \omega_x \omega_y & \omega_x \omega_z \\ \cdot & -\omega_x^2 - \omega_z^2 & \omega_y \omega_z \\ \text{symm.} & \cdot & -\omega_x^2 - \omega_y^2 \end{pmatrix}$
Diadisches Produkt $\vec{\vec{I}} = \vec{a} \circ \vec{b}$  = Tensor 2. Stufe	$\mathbf{I} = (I_{ij}) = \mathbf{a} \mathbf{b}^T, \quad \mathbf{I}^T = \mathbf{b} \mathbf{a}^T$ $= \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$

## 5. Koordinatensystem, Ortsvektor und Drehmatrix

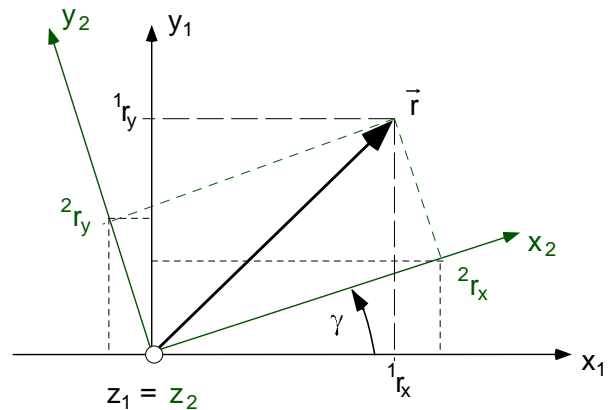
Koordinatensysteme:  $K_1 (x_1, y_1, z_1)$ ,  $K_2 (x_2, y_2, z_2)$ :

Ortsvektor:  $\vec{r} = \vec{e}_{x1}^1 r_x + \vec{e}_{y1}^1 r_y + \vec{e}_{z1}^1 r_z = \vec{e}_1^T \mathbf{r} \equiv \vec{e}_{x2}^2 r_x + \vec{e}_{y2}^2 r_y + \vec{e}_{z2}^2 r_z = \vec{e}_2^T \mathbf{r}$

Die Koordinaten oder Komponenten sind

$$\mathbf{r}^1 = \begin{pmatrix} r_x^1 \\ r_y^1 \\ r_z^1 \end{pmatrix} \text{ in } K_1$$

$$\mathbf{r}^2 = \begin{pmatrix} r_x^2 \\ r_y^2 \\ r_z^2 \end{pmatrix} \text{ in } K_2 \neq \mathbf{r}^1$$



Drehung zweier Koordinatensysteme

Betrag von  $\vec{r}$ :  $r = \sqrt{{r_x^1}^2 + {r_y^1}^2 + {r_z^1}^2} = \sqrt{{r_x^2}^2 + {r_y^2}^2 + {r_z^2}^2}$

Transformation in der x-y-Ebene bei Drehung um z:

$$\begin{pmatrix} r_x^1 \\ r_y^1 \\ r_z^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_x^2 \\ r_y^2 \\ r_z^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}^1 = \mathbf{A}^{12}(\gamma) \mathbf{r}^2$$

☞  $\mathbf{A}^{12}$  ist **Dreh- oder Orientierungsmatrix** von Basis  $K_2$  gegenüber  $K_1$

☞ Drehung um **z**-Achse mit Drehwinkel  $\gamma$ :  $\mathbf{A}^{12}(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , ebenso  $\vec{e}_1 = \mathbf{A}^{12} \vec{e}_2$

$\gamma$  ist positiv, wenn man  $x_1$ -Achse in Deckung mit  $x_2$ -Achse bringt, also eine positive Drehung um z-Achse ausführt.

☞ **Eigenschaften:**  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ ,  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{E}$ , weil  $\mathbf{A}$  eine orthogonale Matrix

☞ **Umkehrung:**  $\vec{e}_2 = \mathbf{A}^{21} \vec{e}_1 = (\mathbf{A}^{12})^T \vec{e}_1$  oder  $\mathbf{r}^2 = (\mathbf{A}^{12})^T \mathbf{r}^1$

☞ **falls**  $\vec{e}_1 \equiv \vec{e}_2$ :  $\mathbf{A}^{12} = \mathbf{E}$ ;  $\mathbf{r}^1 = \mathbf{r}^2$

☞ **Linearisierung** von  $\mathbf{A}^{12}$  (kleine Drehwinkel  $\gamma \ll 1$ ):  $\cos \gamma \approx 1$ ,  $\sin \gamma \approx \gamma$

$$\text{in x-y-Ebene mit Drehwinkel } \gamma: \mathbf{A}^{12} = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Transformation im Raum**, siehe z.B. (Roberson and Schwertassek 1988)

☞ Eine allgemeine Drehung kann durch drei Einzeldrehungen erzeugt werden:

a) Kardanwinkel mit den Drehkoordinaten  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ ,  $\gamma(t)$  in der Drehfolge 1-2-3

Drehung der Basis  $K_1$  gegenüber Basis  $K_2$  mit 3 Elementardrehungen:

1. um  $x_1$  - Achse mit Winkel  $\alpha$ , -> neue Achsen  $y'$ ,  $z'$  und  $x' = x_1$
2. um  $y'$  - Achse mit Winkel  $\beta$ , -> neue Achsen  $x''$ ,  $z''$  und  $y'' = y'$
3. um  $z''$  - Achse mit Winkel  $\gamma$ , -> neue Achsen  $x_2$ ,  $y_2$  und  $z_2 = z''$

$$\text{Transformation } \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{e}_2 \quad \text{wo } c \equiv \cos, s \equiv \sin$$

$$\vec{e}_1 = \mathbf{A}(\alpha) \mathbf{A}(\beta) \mathbf{A}(\gamma) \vec{e}_2 = \mathbf{A}^{12} \vec{e}_2$$

$$\text{mit der Drehmatrix } \mathbf{A}^{12} = \begin{pmatrix} c\beta c\gamma & -c\beta s\gamma & s\beta \\ c\alpha s\gamma + s\alpha s\beta c\gamma & c\alpha c\gamma - s\alpha s\beta s\gamma & -s\alpha c\beta \\ s\alpha s\gamma - c\alpha s\beta c\gamma & s\alpha c\gamma + c\alpha s\beta s\gamma & c\alpha c\beta \end{pmatrix}$$

☞ **Linearisierung** von  $\mathbf{A}^{12}$  für kleine Drehwinkel  $\alpha, \beta, \gamma$ : (Für  $\sim$  siehe Rechenregeln–Tilde-Operator)

$$\mathbf{A}^{12} = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E} + \tilde{\boldsymbol{\vartheta}} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\vartheta} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

b) Andere Drehbeschreibungen:

Kardanwinkel der Drehfolge z-y-x;

Eulerwinkel mit Drehfolge z-x-z;

Drehzeiger, Eulerparameter, Rodriguesparameter

## 6. Differentiation von Funktionen (Kettenregel):

$$\text{Funktion } a(\varphi(t)): \quad \frac{da}{dt} = \dot{a} = \frac{\partial a}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial a}{\partial \varphi} \dot{\varphi}$$

$$\text{Funktion } a(\varphi(t), \gamma(t)): \quad \frac{da}{dt} = \dot{a} = \frac{\partial a}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial a}{\partial \gamma} \dot{\gamma}$$

# Häufig verwendete Buchstaben



# Referenzen

Bathe, K. J. (1986). Finite-Elemente-Methoden. Berlin, Springer-Verlag.

Kakad, Y. P. (1992). Dynamics And Control of Flexible Multi-Body Space Systems. Dynamics of Flexible Multibody Systems: Theory and Experiment. S. C. Sinha, H. B. Waites and W. J. Book. New York: 23-33.

Knothe, K. and H. Wessels (1999). Finite Elemente. Berlin, Springer-Verlag.

Schwertassek, R. and O. Wallrapp (1999). Dynamik flexibler Mehrkörpersysteme. Braunschweig, Friedr. Vieweg Verlag.

Zienkiewicz, O. C. (1984). Methode der finiten Elemente. München, Carl Hanser Verlag.

# 1 Einleitung

## 1.1 Problemstellung

In der Technischen Mechanik wurden Modell besprochen, die es erlauben, die Spannungen und Verformungen eines Bauteils infolge äußerer Lasten analytisch zu berechnen. Das war aber nur für einfache Modelle möglich, wie den homogenen Zugstab oder den homogenen Balken.

Wir erinnern uns: Für den einseitig eingespannten Zugstab mit der Kraft  $F$  am Ende gilt:

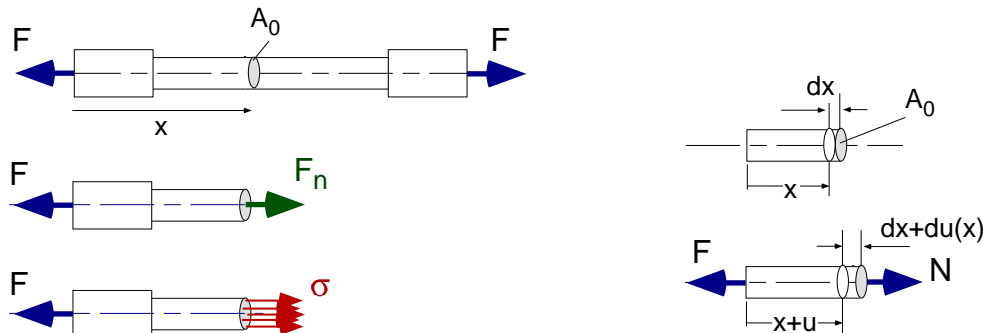


Bild 1.1: Zugstab mit Normalkraft  $F_n$  und Normalspannung  $\sigma$  und Stabdehnung

Für die Dehnung von geraden Stäben oder Balken werden folgende **Annahmen** getroffen:, dass

1. Der Querschnitt ist symmetrisch
2. Die Belastung greift im Flächenschwerpunkt der Stabachse an und wirkt nur in x-Richtung. Die Normalspannung ist für die gesamte Fläche gleich.
3. Der Belastungszustand ist von allen anderen Belastungen entkoppelt und liefert nur eine Normalkraft  $F_n = N$ .
4. Die Querschnitte bleiben eben und parallel zu einander. Sie verschieben sich nur in x-Richtung.

Die Normalkraft  $F_n(x) = N(x)$  am Ort  $x$  kann auf die Fläche  $A_0$  im Referenzzustand des Körpers (Fläche im unverformten Zustand) bezogen werden. Somit gilt für die

$$\text{Normalspannung } \sigma(x) = \frac{N(x)}{A_0(x)} \quad (1.1)$$

Für ein Element der Referenzlänge  $dx$  und der aktuellen Länge  $dx+du(x)$  (Bild 1.1), wo  $u$  die Verlängerung des Stabes an der Stelle  $x$  sein soll, findet man bei kleinen Dehnungen

$$\text{Dehnung } \varepsilon_x = \frac{(dx + du) - dx}{dx} = \frac{\partial u(x)}{\partial x} = u'(x) \quad (1.2)$$

$$\text{Dehnungsgleichung } \sigma(x) = E \varepsilon_x \Rightarrow \boxed{E A_0 u'(x) = N(x)} \quad (1.3)$$

$u_0 = u(x=0)$  ist die **Randauslenkung** in x-Richtung an der Stelle  $x = 0$ . Ist der Stab eingespannt, gilt  $u_0 = 0$ .

Glg. (1.3) stellt eine partielle Dgl. dar, da wir bez. dem Ort  $x$  differenzieren.

Nun nehmen wir die Massenträgheit des Stabes mit der Dichte  $\rho$  hinzu und fragen, wie schwingt der Stab. Die **Bewegungsgleichung** für den eingespannten Stab lautet

$$E A_0 u''(x,t) - \rho A_0 \ddot{u}(x,t) = 0 \quad \text{mit den Randbedgn. } u(0,t) = 0, \quad u'(L,t) = 0. \quad (1.4)$$

Das liefert nun eine Dgl. bezüglich Ort  $x$  und Zeit  $t$ . Wie löst man solche Probleme?

Nun machen wir einen **Separationsansatz** der Art

$$u(x,t) = U(x) q(t) \quad (1.5)$$

mit  $U(x)$  als Ortsfunktion und  $q(t)$  als Zeitfunktion, den wir als Faktor für die Ortsfunktion ansehen können. Glg. (1.5) in (1.4) eingesetzt liefert zwei Gleichungen, die durch einen Faktor  $\omega$  gekoppelt sind:

$$\frac{E A_0 U''(x)}{U(x)} = \frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = -\omega^2 \Rightarrow \beta^2 = \omega^2 \frac{\rho A_0}{E A_0} \quad \text{als Eigenwerte} \quad (1.6)$$

$$E A_0 U''(x) + \beta^2 U(x) = 0 \quad \text{und} \quad \ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0$$

Die Gleichung in  $U(x)$  kann gelöst werden und liefert die Eigenwerte  $\beta_r = (2r - 1) \pi / (2L)$  und die Eigenfunktionen  $U_r(x) = A_r \sin(2r - 1) \pi x / (2L)$ , für  $r = 1 \dots \infty$ .  $\omega_r$  sind die Eigenfrequenzen in rad/s.

Den Weg der Separation können wir einschlagen, wenn der Körper homogen ist, das heisst, über die gesamte Länge keine Änderungen aufweist und gerade ist. Weiter wird gefordert, dass die Belastung eine Separation erlaubt und die Randbedingungen ein lösbares Eigenwertproblem liefern. Das ist aber in der Regel nicht der Fall. Was kann man dann tun?

Antwort: Aufteilen in Bereiche, die näherungsweise konstant sind

=> Die **finiten Elemente** (endlich große Elemente) sind geboren!

Für sie wird ein Separationsansatz aufgestellt, wobei die Ortsfunktionen  $U(x)$  als bekannte Ansatzfunktionen eingebracht werden.  $q(t)$  sind dann die Gewichtungsfunktionen.

Die Methode der Aufteilung ist sehr alt (Courant / Hilbert 1922), nur fehlten damals die Computer, die daraus resultierenden großen Gleichungssysteme zu lösen. Das wurde in den 60 Jahren nachgeholt. Die FEM-Programme wurden entwickelt.

Was wir hier für Festigkeitsprobleme (Berechnung von Spannungen und Verformungen fester Körper) in folge Belastungen (Kräfte und Momente) aufgezeichnet haben, lässt sich auch für andere ortsabhängige Probleme übertragen, wie z.B.

Temperaturfluss in Bauteilen

Strömungen von Medien (Gase und Flüssigkeiten)

Magnetfluss in Motoren.

Was werden wir besprechen -

### Teil 1: Einführung in die FEM

Modelle der Elastizitätstheorie (Kap 2)

Grundgleichungen des klassischen Kontinuums der Strukturmechanik (Kap 3)

Beispiel Balken: Grundgleichungen des Euler-Bernoulli-Balkens (Kap 4)

Ritzansatz und Finite-Elemente-Approximation (Kap 5)

FE-Struktur und Bewegungsgleichungen (Kap 6)

Selber ein FEM-Programm schreiben für ebene Balkensysteme mittels Maple oder Mathematica.

### Teil 2: Unter Anwendung von ANSYS komplexe Probleme aufstellen und lösen.

## 1.2 Beispiele aus der Strukturmechanik

**Finite-Elemente-Systeme** erhält man durch Aufteilung eines **Kontinuums**  $\mathcal{K}$  in geometrisch einfache Teilkörper, die **finiten Elemente**.

Bild 1.2 zeigt das Finite-Elemente-Modell einer halben Hüftendoprothese, in Bild 1.3 ist das Finite-Elemente-Modell eines Femurknochen zu sehen.

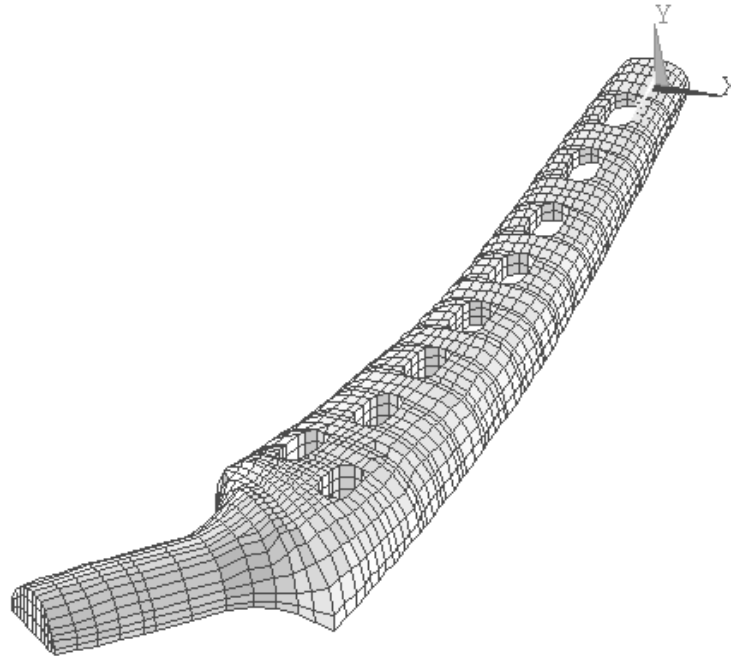


Bild 1.2: Finite-Elemente-Modell einer halben Hüftendoprothese.

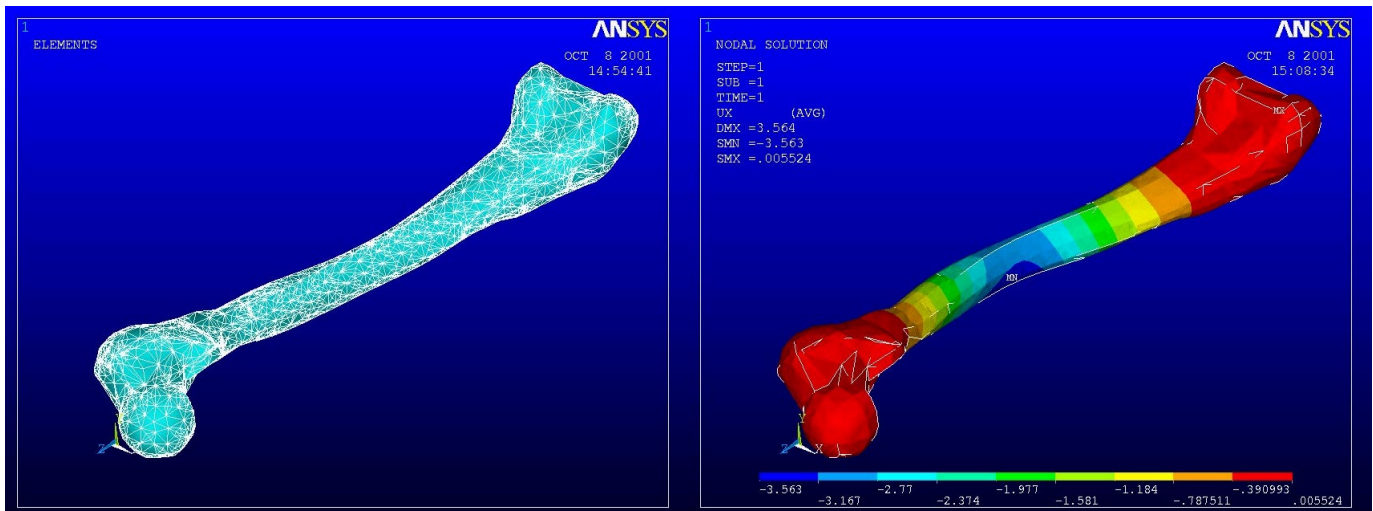


Bild 1.3: Finite-Elemente-Modell eines Femurknochen. (links FE-Netz, rechts Durchbiegung infolge mittiger Last)

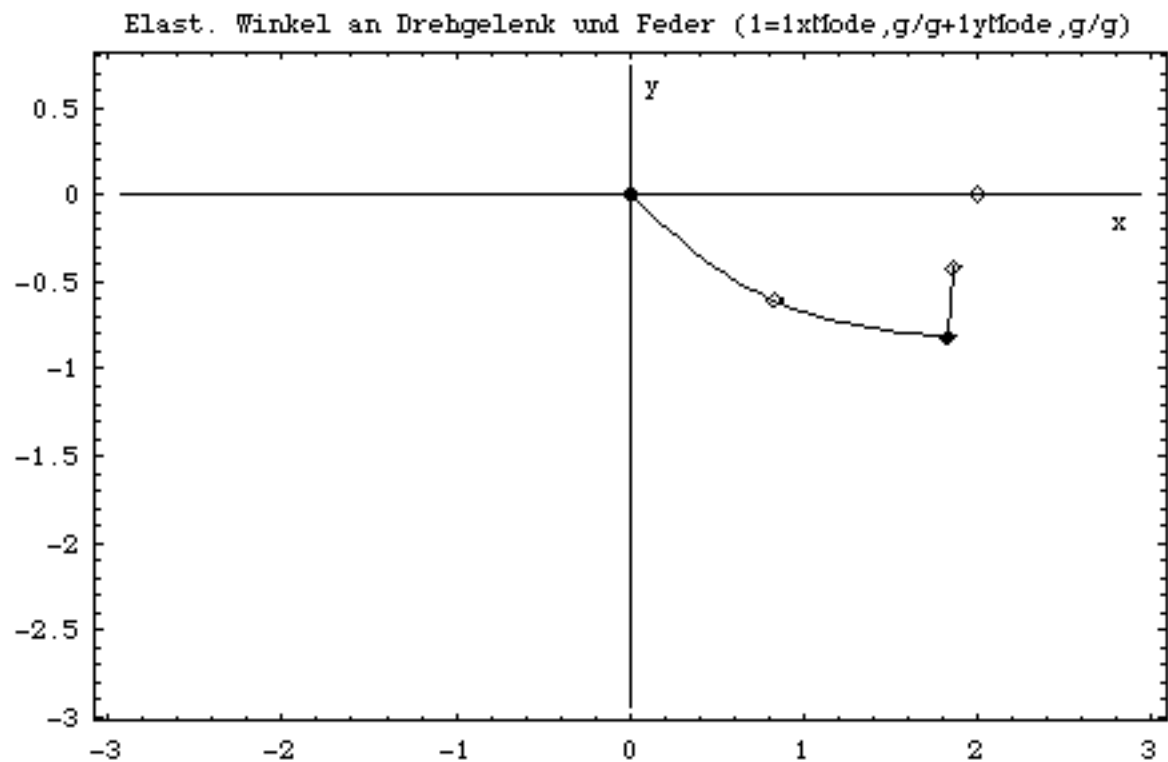


Bild 1.4: Elastischer Winkel im Schwerfeld, aus (Schwertassek and Wallrapp 1999)

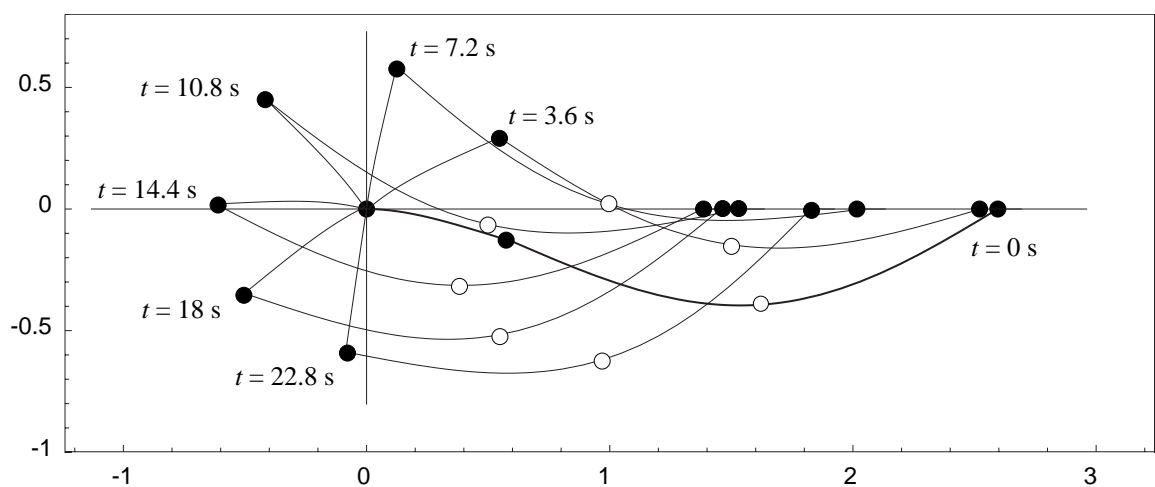


Bild 1.5: Schubkurbel mit elastischer Kurbel und Koppel, aus (Schwertassek and Wallrapp 1999)

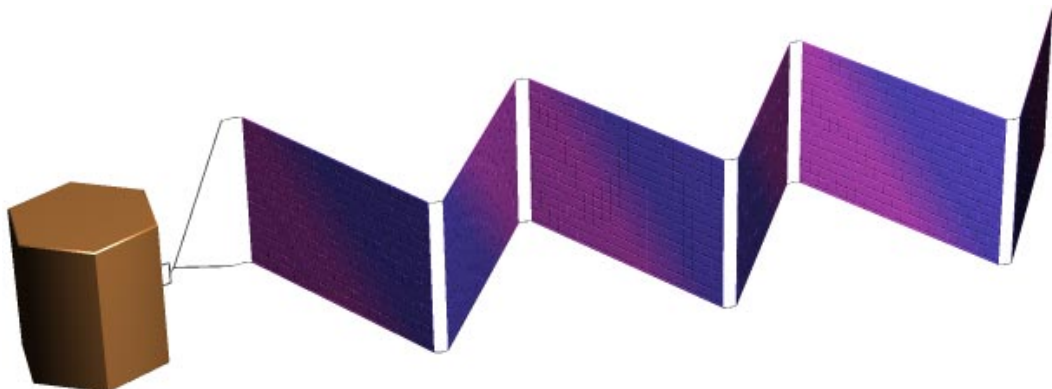


Bild 1.6: Satellit mit Joch und 6 Solarpanels [Wallrapp, 2002 #489]

## 2 Modelle der Elastizitätstheorie

### 2.1 Definitionen

In der **Elastizitätstheorie** [Schwertassek, 1999 #448; Bathe, 1986 #397; Zienkiewicz, 1984 #249] wurden Modelle zur Beschreibung der Bewegungen eines verformbaren Körpers entwickelt, die eine analytische Lösung der partiellen (ortsabhängigen) Differentialgleichungen erlauben. In allen Modellen geht man von **Partikeln** (Körperteilchen) aus, deren Bewegung man bez. dem unverformten Zustand, dem sogenannten **Referenzzustand** betrachtet.

Als Beispiel sei hier die Balkentheorie aus der Vorlesung TM - Elastostatik genannt.

Bild 2.1 zeigt einen allgemeinen Körper im Referenzzustand und in **aktueller Konfiguration**, also in der verformten Konfiguration. Durch Kräfte etc. wurde der **materielle Punkt**  $P$  eines Partikels am Ort (**materielle Koordinaten**)  $R$  um das Maß  $u$  (**Verschiebungsvektor**) verschoben.

Insgesamt wird als sich der Körper gegenüber dem Inertialsystem bewegen, also sich als starrer Körper bewegen, je nachdem die Lagerungen des Körpers (**Randbedingungen**) angebracht sind und sich zusätzlich verformen.

Zusammenfassend kann man sagen: Ein elastischer Körper - häufig auch als elastische **Struktur** genannt, erfährt **Starrkörperbewegungen** und **Verformungen**.

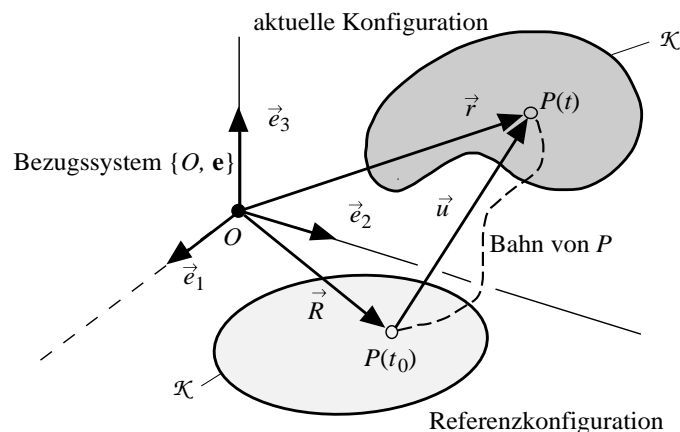


Bild 2.1: Beschreibung der Bewegung der Punkte  $P$  eines deformierbarer Körpers  $K$ .

Merke: Erfahren alle Punkte die gleiche Verschiebung, so liegt eine Starrkörperbewegung vor. Es entstehen keine Verformungen. Bild 2.2 zeigt eine Verzerrung und eine Drehung,

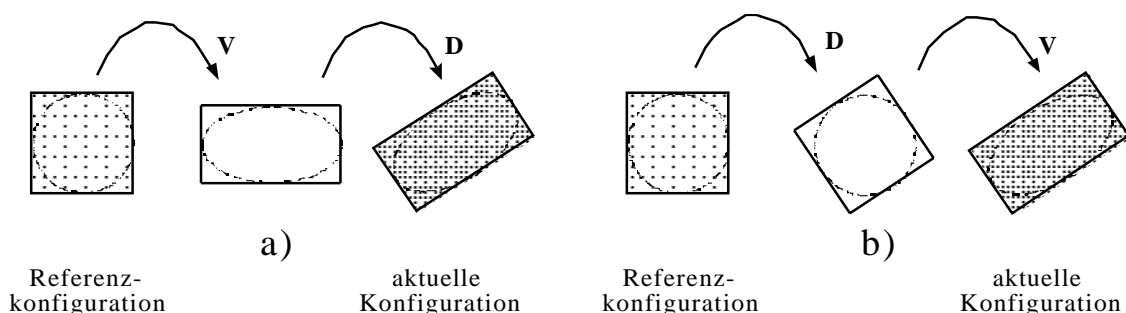


Bild 2.2: Der Körper erfährt eine Starrkörperdrehung und eine Verzerrung. Die Zerlegung der Bewegung kann a) als Verzerrung und Rotation oder b) als Rotation und Verzerrung angesehen werden.

Strukturen sind in der Regel so gelagert (also mit **Randbedingungen** am Rand  $A_u^i$  versehen), dass keine Starrkörperbewegungen auftreten können. In der Mehrkörperdynamik kann ein einzelner Körper verformbar sein und sich aufgrund von Gelenken gleichzeitig global bewegen (motion of the floating frame of reference). Bild 2.2 zeigt einen elastischen Körper  $K^i$ , dessen Körperbezugssystem  $\{O^i, \mathbf{e}^i\}$  sich bezüglich dem Inertialsystem mit  $\bar{\mathbf{r}}^i(t), \mathbf{A}^i(t)$  bewegt.

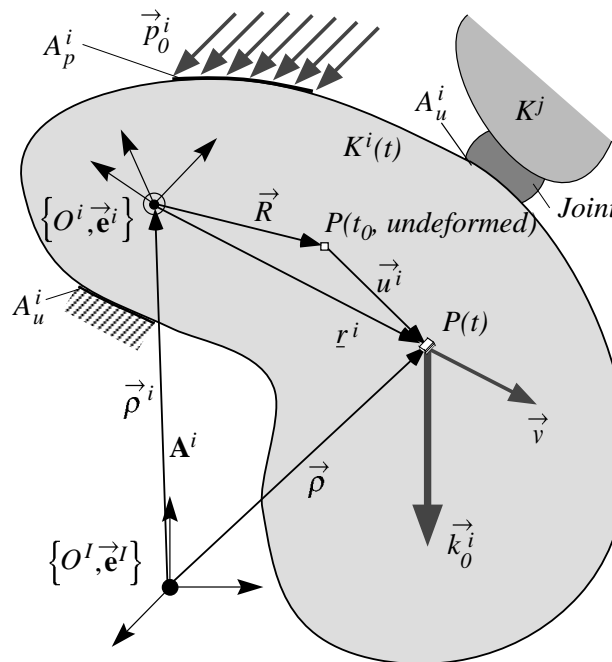


Bild 2.2: Der deformierbare Körper  $K^i$  mit Partikel  $P$  und seine Bewegungen und Belastungen.

Die Koordinaten  $\mathbf{r}^i(t) = \begin{pmatrix} r_1^i & r_2^i & r_3^i \end{pmatrix}^T$  sind die drei Koordinaten in den Richtungen x, y, z (oder 1, 2, 3) eines Koordinatensystems für den Körper  $i$ .  $\mathbf{A}^i(t)$  ist eine 3x3 Drehmatrix zur Beschreibung der Rotation, vgl. Rechenregeln oder Kap. 2 aus Manuskript Biomechanik II.

Es gilt für die Orientierung der beiden Koordinatensysteme

$$\vec{\mathbf{e}}^i = \mathbf{A}^i \vec{\mathbf{e}}^I \quad (2.1)$$

## Übung 2.1:

- a) Gebe die absolute aktuelle Position des Punktes P in Bild 2.2 an.
- b) Welche Bewegung führen Punkte an Rand  $A_\mu^i$  aus?

## 2.2 Modellannahmen des Kontinuums

Alle Kontinuumsmodelle gehen von folgenden Annahmen aus:

- Homogenität:** Der Körper weist längs seiner Achsen konstanten Querschnitt (Profil) sowie konstantes Materialverhalten auf.
- Linear-elastisches Material:** Eine Dehnung  $\epsilon$  liefert eine Spannung  $S$  unabhängig von Zeit und Ort. Zwischen Spannung und Dehnung besteht ein linearer Zusammenhang  
=> (**Hooke'sche Gesetz**).
- Isotropie:** Das Materialgesetz ist unabhängig von der Wirkrichtung.
- Die Lösungsansätze müssen die Bewegungsgleichungen bzw. **Gleichgewichtsbedingungen** im Inneren wie am Rande (Kompatibilitätsbedingungen) erfüllen.

Hier seien einige wichtige Modelle der Kontinuumsmechanik genannt:

- Balkenmodell** in der Ebene oder im Raum mit den Verformungsmöglichkeiten Dehnung, Biegung in 2 Richtungen und Torsion.  
Der Balken besteht aus starren Scheibenelementchen entlang der Längsachse und hat somit **nur eine materielle Koordinate – die x-Achse längs der neutralen Faser**, Bild 2.3. Die genannten Verformungen sind über den Querschnitt konstant und können einzeln oder gesamt betrachtet werden.
- Die **Platte** hat wie der Balken die Verformungen Längsdehnung und Biegung, aber jetzt mit **zwei materielle Koordinaten – die x- und y-Achse längs der neutralen Ebene**.
- Beim **Klassisches Kontinuum** besteht der 3D-Körper aus Partikeln (Punkt  $P$  in Bild 2.2) mit dem Volumen  $dV$  bzw. Masse  $dm$ . Wir beschreiben deren Position durch **drei materielle Koordinaten**  $(R_1, R_2, R_3)^T = \mathbf{R}$ . Am Partikel werden nur äußere Kräfte betrachtet, die mit den inneren Kräften, den Spannungen, im Gleichgewicht stehen (Kräftegleichgewicht am Partikel). Die Momentenbilanz am Partikel liefert nur die Symmetrie des Spannungstensors.

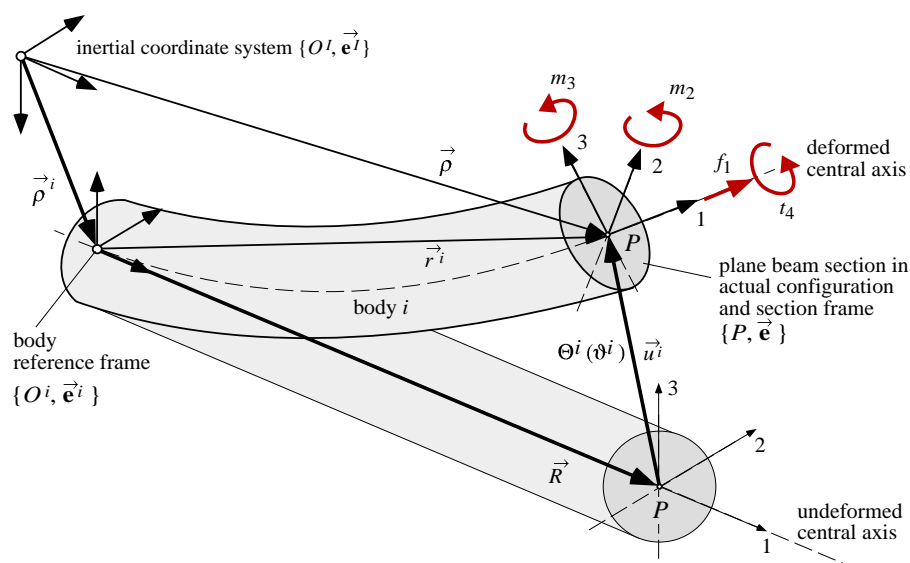


Bild 2.3 Der verformbare Balken (Körper  $i$ ) und seine Verschiebungen  $\mathbf{u}^i$  und Verdrehungen  $\mathbf{J}^i$  am Ort  $\mathbf{R}$  infolge der Schnittgrößen  $f_1, m_2, m_3, t_4$ .



## 3 Grundgleichungen des klassischen Kontinuums

### 3.1 Prinzip der virtuellen Leistung

Ähnlich wie in der Starrkörperdynamik kann man für das Kontinuum die Newton'schen Bewegungsgleichungen am Partikel aufstellen (dann aber im Inneren und am Rande) oder die Prinzipie der Mechanik nutzen, die immer von integralen Betrachtungen über den gesamten Körper, also im Inneren wie am Rande, ausgehen. Die integrale Betrachtung bietet Vorteile, weil sie für den Übergang auf die FEM als Approximationsmethode besonders gut geeignet ist, wie in Kap. 4 zu sehen ist.

Desweiteren kann man die Gleichgewichtsbetrachtungen am unverformten Partikel (bez. Referenzkonfiguration – **Lagrangesche Beschreibung**) oder am verformten Partikel (aktuelle Konfiguration – **Euler'sche Beschreibung**) vornehmen. Hier verwenden wir die Lagrangesche Beschreibung, da das Volumen  $V = V_0$  in der Referenz- oder Ausgangskonfiguration bekannt ist.

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen eignen sich das d'Alembertsche Prinzip (**Prinzip der virtuellen Arbeiten**) oder das Jourdain'sche Prinzip (**Prinzip der virtuellen Leistungen**) (Schwertassek und Wallrapp 1999), Kap. 3:

**Das Prinzip der virtuellen Leistungen lautet:**

$$\delta P_t + \delta' P = 0 \quad \text{mit}$$

$$\text{virtuelle Leistung der Trägheitskräfte} \quad \delta P_t = - \int_{V_0} \delta \mathbf{v}^T \mathbf{a} \rho_0 dV_0$$

$$\text{virtuelle Leistung der eingepprägten Kräfte} \quad \delta' P = \delta P_i + \delta' P_a \quad (3.1)$$

$$\text{virtuelle Leistung der äußeren Kräfte} \quad \delta' P_a = \int_{V_0} \delta \mathbf{v}^T \mathbf{k}_0 dV_0 + \int_{A_0} \delta \mathbf{v}^T \mathbf{p}_0 dA_0$$

$$\text{virtuelle Leistung der inneren Kräfte} \quad \delta P_i$$

Hierin sind:

$\mathbf{a}$  ist absolute Beschleunigung ( $\text{m/s}^2$ ) des Partikels  $P$

$\mathbf{k}_0$  ist die Volumenkraftdichte ( $\text{N/m}^3$ ) an  $dV_0$  und

$\mathbf{p}_0$  ist die Oberflächenkraftdichte ( $\text{N/m}^2$ ) an  $dA_0$

$\delta \mathbf{v}$  ist die absolute virtuelle Geschwindigkeit der Partikels  $P$  (Bild 2.2).

$\rho_0$  ist die Massendichte ( $\text{kg/m}^3$ )

$A_0$  ist die Oberfläche ( $\text{m}^2$ ) und

$V_0$  ist das Volumen ( $\text{m}^3$ ) in der Referenzkonfiguration (Index 0).

Wir definieren als eingepprägte Kräfte und Momente am Körper die in Bild 2.2 gezeigten Volumenkräfte  $\mathbf{k}_0$  (im Volumen  $V_0$ ) und die Oberflächenkräfte  $\mathbf{p}_0$  (am Rand  $A_{p0}$ ). Daraus ergibt sich die in (3.1) dargestellte virtuelle Leistung  $\delta' P_a$ .

Die virtuelle Leistung wird hier bevorzugt, weil sich virtuelle Rotationen mit virtuellen Winkelgeschwindigkeiten leichter beschreiben als mit virtuellen Verdrehungen!

## 3.2 Definition der Spannung

Die äußeren Belastungen auf einen Körper werden über innere Kräfte zu den Lagern geleitet. Schneiden wir einen im Gleichgewicht befindlichen Körper, so muss auch jedes Teilsystem mit seiner Belastung und mit den in den Schnittflächen verteilten inneren Kräften und Momenten im Gleichgewicht sein, siehe Bild 3.1.

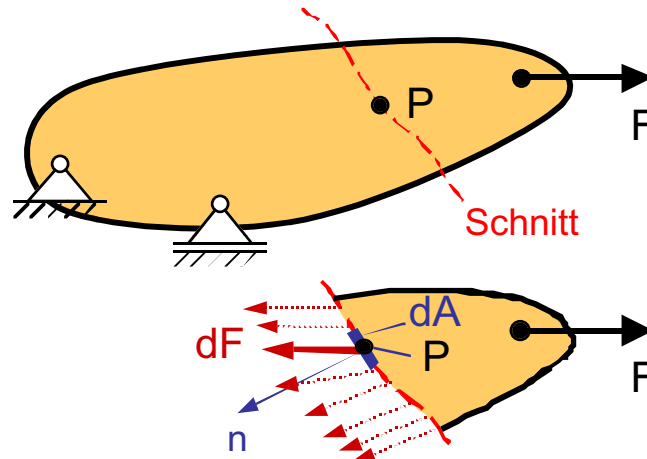


Bild 3.1: Schnittfläche und Schnittkräfte am Teilkörper infolge Last F.

Definition des **Spannungsvektors** an der Schnittfläche  $dA$  im Punkt  $P$  am Ort  $R$  zur Zeit  $t$ :

$$\vec{\sigma}(\vec{R}, t) = \frac{d\vec{F}(\vec{R}, t)}{dA}, \quad (3.2)$$

dabei ist  $d\vec{F}$  die an der Schnittfläche  $dA$  mit der Normalen  $\vec{n}$  wirksame Schnittkraft.

$\vec{\sigma}$  ist ein Vektor. Er steht im Allgemeinen nicht normal zur Fläche  $dA$ , siehe Bild 3.1 und Bild 3.2.

**Einheiten:**  $[\sigma] = \text{Kraft} / \text{Fläche}$ ;  $[\sigma] = 1 \text{ N/mm}^2 = 1 \text{ MPa}$ ,  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ Pascal} = 1 \text{ N/m}^2$ .

Wir definieren ein Dreibein in der Fläche  $dA$  mit der x-Achse als Normalenvektor  $\vec{n}$ , so kann der Vektor  $\vec{\sigma}$  in drei Spannungskomponenten zerlegt werden: (Bild 3.2)

**Normalspannung  $\sigma_n = \sigma_{xx}$**

**Tangential- oder Schubspannungen  $\tau_{xy}$  und  $\tau_{xz}$**

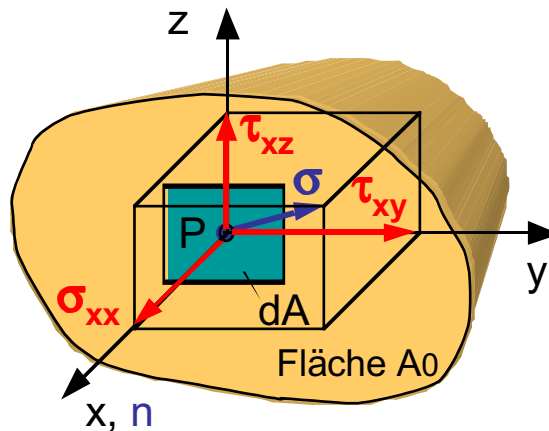


Bild 3.2: Die Spannungskomponenten des Spannungsvektors  $\vec{\sigma}$  zur Schnittfläche  $dA$  am positivem Schnittufer.

**Beachte:**

1. **Bezugsfläche** : Spannungen so definiert, dass sie auf die **unverformte Schnittfläche  $A_0$**  (Referenzzustand des Körpers) beziehen
2. **Indizierung der Spannungen**: Der erste Index gibt an, in welche Richtung die Flächennormale  $\vec{n}$  zeigt und der zweite Index beschreibt die Richtung des Spannungsvektors.  
(Bei der Normalspannung kann der Index auch wegfallen, da es nur eine Normalspannung für eine Fläche  $dA$  gibt). Statt  $x, y, z$  wird auch  $1,2,3$  benutzt.
3. **Definition Schnittufer**: Ein positiven Schnittufers liegt vor, wenn der Normalenvektor  $\vec{n}$  aus der Schnittfläche heraus zeigt. Am Gegenufer zeigt er dann in die Fläche hinein, ist also negativ.  
Am positivem Schnittufer sind immer die Spannungen positiv anzusehen. Das in Bild 2.5 gezeigt Schnittufer ist somit positiv.  
Wir wählen im Allgemeinen in  $\vec{n}$  -Richtung auch die x-Achse des Schnittflächen-Dreibeins.

### 3.2.1 Beispiel zur Normalspannung

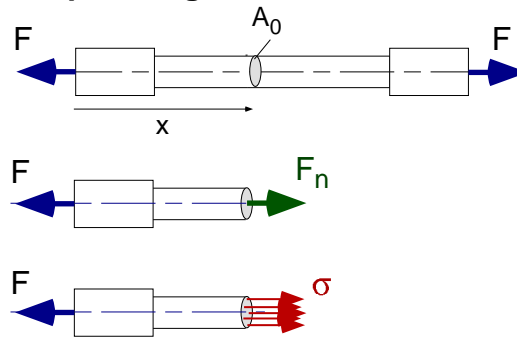


Bild 3.3: Zugstab mit Normalkraft  $F_n$  und Normalspannung  $\sigma$

Auf den Stab wirken die Kräfte  $F$ . Die Normalkraft  $F_n(x) = N(x)$  am Ort  $x$  kann auf die Fläche  $A_0$  im Referenzzustand des Körpers (Fläche im unverformten Zustand) bezogen werden.

Wir nehmen an, sie sei gleichmäßig über den Querschnitt verteilt:

$$\text{Normalspannung } \sigma(x) = \frac{F_n(x)}{A_0(x)} \quad (3.3)$$

**Vorzeichen:**  $\sigma > 0 \Rightarrow$  Zugspannung,  $\sigma < 0 \Rightarrow$  Druckspannung

#### Übung 3.1

An einem homogenen Seil der Länge  $l = 50 \text{ m}$  hängt ein Bergsteiger mit  $m = 85 \text{ kg}$  Masse. Das Seil hat einen Durchmesser von  $8 \text{ mm}$ .

Berechne die Normalspannung. (Zug oder Druck?)

### 3.3 Definition der Verzerrung

Die Änderung der Gestalt und der Größe eines Körpers infolge äußerer Belastungen und Temperatureinwirkungen wird Formänderung oder **Deformation** oder **Verzerrung** genannt.

Wir betrachten einen Körper mit dem Punkt  $P_0(\mathbf{R})$  im **Referenzzustand** (unverformter Zustand) und im **verformtem Zustand**  $P(\mathbf{r})$ , (Bild 3.4)

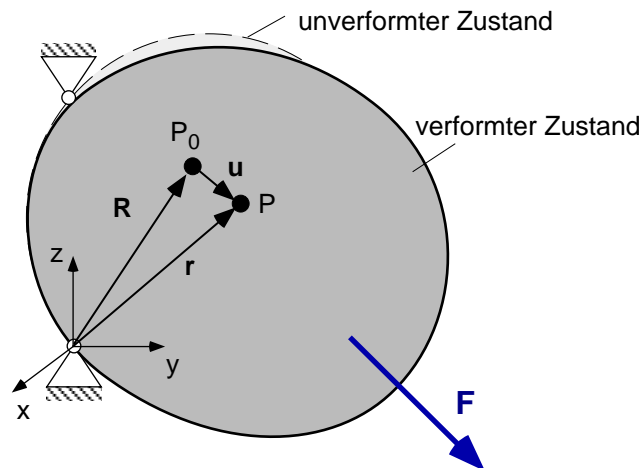


Bild 3.4: Deformation eines Körpers mit dem Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}$  in x, y, z-Richtung.

Zwei Verformungsmaße haben sich technisch bewährt, Bild 3.5:

<b>Dehnung <math>\epsilon</math></b>	als Verlängerung einer Körperlinie bezogen auf die Referenzlänge
<b>Scherung <math>\gamma</math></b>	als Winkeländerung eines Körperwinkels bezogen auf die Referenzlage

In der Ebene kann man ein rechteckiges Flächenelement  $dA_0$  im Referenzzustand der Länge  $dx$  und  $dy$  betrachten, das sich infolge Belastungen dehnt und schert mit der neuen Fläche  $dA$ . Die Eckpunkte des  $P_{01}$ ,  $P_{02}$ , und  $P_{03}$  sind die Punkte im Referenzzustand. Somit gilt  $dx = P_{01}P_{02}$ ,  $dy = P_{01}P_{03}$ .

Die **Dehnung** bewirkt eine Verlängerung der Kanten  $dx$  und  $dy$  in  $dx+du(x) = P_1P_2$  und  $dy+dv(y) = P_1P_3$ .

Die **Scherung** bewirkt eine Verformung des rechten Winkels der 3 Punkte  $P_{01}$ ,  $P_{02}$ ,  $P_{03}$  in  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ .

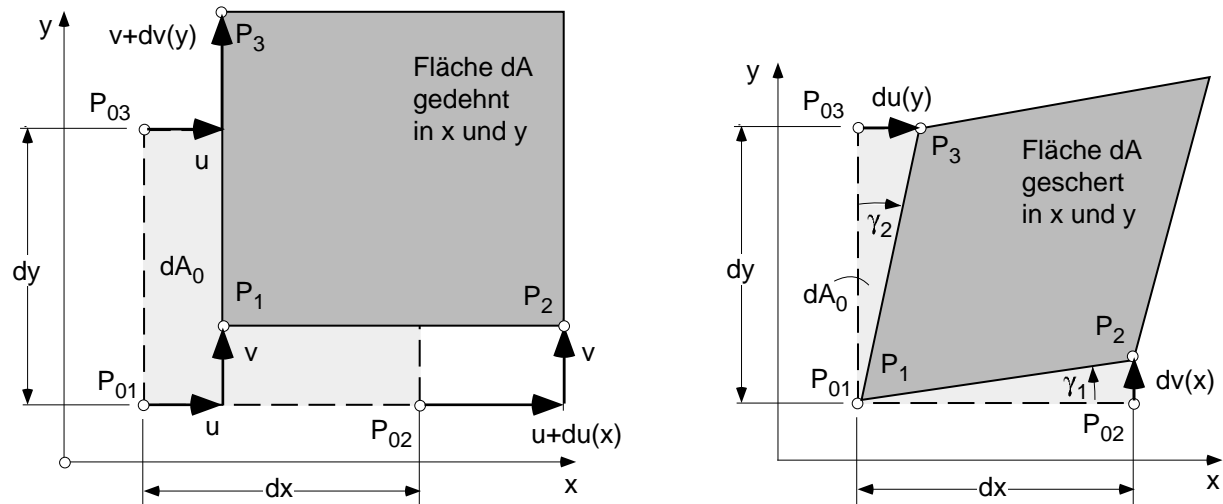


Bild 3.5: Dehnung (links) und Scherung (rechts) eines Flächenelements  $dA_0$ .

$$\text{Hierbei gilt: } du(x) = \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad du(y) = \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad dv(x) = \frac{\partial v}{\partial x} dx, \quad dv(y) = \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

**Für kleine Verformungen (lineare Theorie)** entnimmt man aus Bild 3.5:

$$\text{Dehnung in x-Richtung} \quad \varepsilon_x = \frac{P_1P_2 - P_{01}P_{02}}{P_{01}P_{02}} = \frac{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx - dx}{dx} \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.4)$$

$$\text{Dehnung in y-Richtung} \quad \varepsilon_y = \frac{P_1P_3 - P_{01}P_{03}}{P_{01}P_{03}} = \frac{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy - dy}{dy} \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.5)$$

$$\text{Scherung in x-y-Ebene} \quad \gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy} \Rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.6)$$

**Einheiten:**  $[\varepsilon] = \text{Länge} / \text{Länge} = \text{dimensionslos}$ ,  $[\gamma] = \text{Länge} / \text{Länge} = \text{dimensionslos}$ .

### 3.3.1 Beispiel zur Dehnung

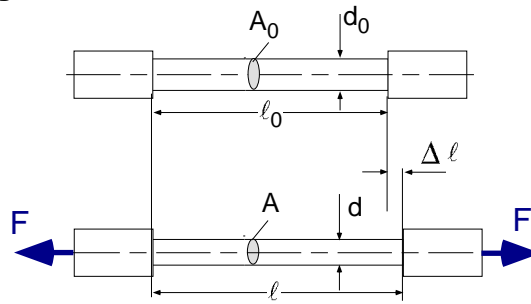


Bild 3.6: Dehnung eines Zugstabes

Auf den Stab wirken die Kräfte  $F$ . Der homogene Bereich der Referenzlänge  $\ell_0$  und mit dem Durchmesser  $d_0$  dehnt sich in Längsrichtung und verjüngt sich in Querrichtung.

Wir machen den Übergang in (3.4) von  $dx$  auf die Länge  $\ell_0$  und von  $du$  auf die Längenänderung  $\Delta \ell$ . Gleichzeitig wird eine Verjüngung des Stabes festgestellt:

Für einen homogenen Stab gilt

$$\text{Dehnung in Längsrichtung} \quad \varepsilon = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} = \frac{\Delta \ell}{\ell_0} \quad (3.7)$$

$$\text{Dehnung in Querrichtung} \quad \varepsilon_q = \frac{d - d_0}{d_0} = -\mu \varepsilon \quad (3.8)$$

mit  $\mu$  als Querkontraktions- oder Poissonszahl, siehe auch Abschnitt 2.4.

#### Übung 3.2

An einem homogenen Stab der Länge  $\ell_0 = 12 \text{ m}$  hängt ein Gewicht der Masse  $m = 1500 \text{ kg}$ . Der Stab hat einen Durchmesser von  $8 \text{ mm}$ . Die Dehnung sei  $\varepsilon = 0.25 \text{ \%}$  und  $\mu = 0.3$ .

Berechne die Längenänderung, aktuelle Länge und Durchmesser und Querdehnung.

### 3.4 Verzerrung und Spannung des klassischen 3D-Kontinuums

In der Elastizitätstheorie wurden eine Vielzahl von Verzerrungsmaßen (**Verzerrungstensoren**) und Spannungsmaßen (**Spannungstensoren**) entwickelt. Hier verwenden wir den **symmetrischen Green'schen Verzerrungstensor**  $G_{\alpha\beta}$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ , sowie den **symmetrischen 2. Piola'sche Spannungstensor**  $S_{\alpha\beta}$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ , weil mit ihnen das lineare Materialgesetz und das elastische Potential gut formulierbar sind.

Die Elemente des Green'schen Verzerrungstensors ergeben sich als örtliche Ableitungen der Verschiebungen  $\mathbf{u}$  nach den Koordinaten  $\mathbf{R}$ . Allgemein gilt mit dem Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + \Delta\mathbf{F} \quad \text{mit} \quad \Delta\mathbf{F} = [\Delta F_{\alpha\beta}], \quad \Delta F_{\alpha\beta} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial R_\beta} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{G} = [G_{\alpha\beta}] = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{E}) = \frac{1}{2}(\Delta\mathbf{F} + \Delta\mathbf{F}^T + \Delta\mathbf{F}^T \Delta\mathbf{F}) \quad (3.9)$$

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial R_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial R_\alpha} + \sum_{\gamma=1}^3 \frac{\partial u_\gamma}{\partial R_\alpha} \frac{\partial u_\gamma}{\partial R_\beta} \right) = G_{\beta\alpha}. \quad (3.10)$$

Wir definieren nun die  $6 \times 1$  - Matrix der Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , (Zienkiewicz 1984; Bathe 1986; Kakad 1992; Knothe und Wessels 1999),

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (G_{11}, G_{22}, G_{33}, 2G_{12}, 2G_{23}, 2G_{31})^T. \quad (3.11)$$

Diese Darstellung ist für die weitere Matrizenrechnung sehr nützlich.

**Geometrische Linearität** heißt, dass in (3.10) **nur lineare Elemente** beachtet werden,

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial R_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial R_\alpha} \right) \quad \text{und somit} \quad \boxed{\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u}}. \quad (3.12)$$

$$\text{Matrix } \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & \partial_1 \end{bmatrix} \quad \text{ist eine lineare Operatormatrix mit } \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial R_\alpha} \quad (3.13)$$

Für die Elemente des Green'schen Verzerrungstensors gilt der Zusammenhang zur Dehnung und Scherung aus Abschn. 3.3:

$$\text{Dehnung } G_{\alpha\alpha} = \varepsilon_\alpha = \frac{ds_\alpha - ds_{0\alpha}}{ds_{0\alpha}}; \quad \text{Scherung } G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} \quad (3.14)$$

$$\text{also } \boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31})^T.$$



### 3.5 Materialgesetz

Das einfachste lineare Materialgesetz für feste Körper des klassischen Kontinuums – das **Hooke'sche Gesetz** – lautet:

$$S_{\lambda\mu} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} a_{\lambda\mu\alpha\beta} G_{\alpha\beta} \Rightarrow \mathbf{S} = 2\mathcal{G} \left( \mathbf{G} + \frac{\mu}{1-2\mu} sp \mathbf{G} \mathbf{E} \right) \quad \text{wo} \quad sp \mathbf{G} = G_{11} + G_{22} + G_{33} \quad (3.15)$$

für  $\alpha, \beta, \lambda, \mu = 1, 2, 3$ ,

mit den **Materialparametern**:

$$\text{Elastizitätsmodul } \mathcal{E} = 2\mathcal{G}(1+\mu) \quad (3.16)$$

$$\text{Schermodul } \mathcal{G} = \frac{\mathcal{E}}{2(1+\mu)} \quad (3.17)$$

$$\text{Poissonzahl } \mu = \frac{\mathcal{E}}{2\mathcal{G}} - 1 \quad (3.18)$$

Es ist aus dem Zugversuch abzuleiten, siehe Abschn. 3.5.1.

Wie bereits bemerkt, der Spannungstensor ist symmetrisch, d.h.  $S_{\beta\alpha} = S_{\alpha\beta}$ .

Wir definieren die  $6 \times 1$  - Matrix der Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  und schreiben das Materialgesetz neu:

$$\boldsymbol{\sigma} = (S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{12}, S_{23}, S_{31})^T \quad (3.19)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{H} \boldsymbol{\epsilon}}, \quad (3.20)$$

mit der symmetrischen  $6 \times 6$ -Material- oder **Elastizitätsmatrix**

$$\mathbf{H} = \frac{\mathcal{E}}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1-\mu & \mu & \mu & & & \\ \mu & 1-\mu & \mu & & & \\ \mu & \mu & 1-\mu & & & \\ \hline & & & \frac{1}{2}(1-2\mu) & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1}{2}(1-2\mu) & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\mu) \end{array} \right] \quad (3.21)$$

Das elastische Potential ergibt sich zu

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_0} \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV_0 = \frac{1}{2} \int_{V_0} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\epsilon} dV_0 \quad (3.22)$$

und die innere virtuelle Arbeit und Leistung des elastischen Körpers

$$\delta W_i = - \int_{V_0} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV_0 = - \int_{V_0} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\epsilon} dV_0, \quad (3.23)$$

$$\boxed{\delta P_i = - \int_{V_0} \delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} dV_0 = - \int_{V_0} \delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\epsilon} dV_0.} \quad (3.24)$$

### 3.5.1 Der Zugversuch

Mittels eines Zugversuches läßt sich ein Zusammenhang zwischen der Spannung und der Dehnung herstellen. Im Zugversuch (vgl. Werkstofftechnik) wird ein genormter Zugstab (Bild 3.7) mit Kreisquerschnitt  $d_0$ , festgelegter Messlänge  $\ell_0$  und einer bestimmten Oberflächenbeschaffenheit belastet und dabei das Spannungs-Dehnungs-Diagramm (Bild 3.8) aufgezeichnet.

$$\text{Nennspannung } \sigma = \frac{F}{A_0} \text{ mit Dehnung } \varepsilon = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} = \frac{\Delta \ell}{\ell_0} \quad (3.25)$$

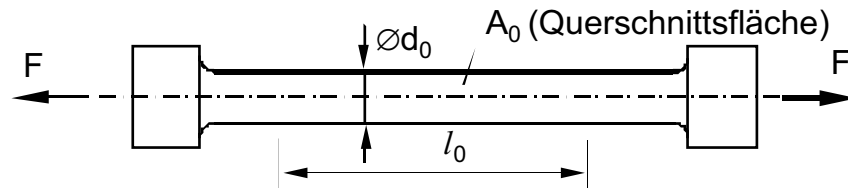


Bild 3.7: Der genormte Zugstab (DIN 50145) zur Bestimmung des Spannungs-Dehnungs-Diagramms

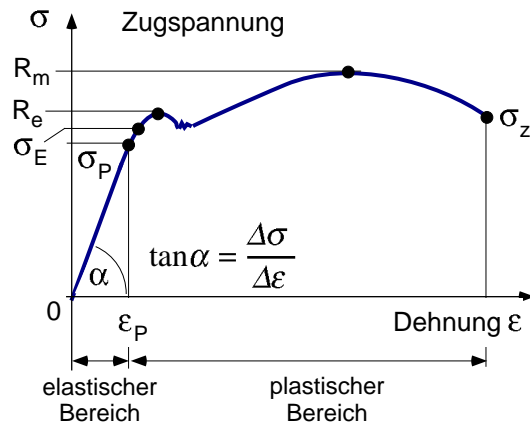


Bild 3.8: Spannungs-Dehnungs-Diagramm für Baustahl

Hierin bedeuten:

$\sigma_P$ : Spannung der Proportionalgrenze

mit Proportionaldehnung  $\varepsilon_P$

Hieraus entnimmt man das Hooke'sche Gesetz.

$\sigma_E$ : Spannung der Elastizitätsgrenze

Rücknahme der Belastungen ergibt wieder den Referenzzustand des Bauteils (elastischer Bereich)

$R_e$ : Streckgrenze

Wird zur Beurteilung der Tragfähigkeit einer Konstruktion verwendet. Wenn Wert nicht auffindbar, nehme  $R_{P,0.2}$  - bei 0.2% plastischer Dehnung.

$R_m$ : Zugfestigkeitswert (Kaltfestigkeit).

Sie bezeichnet z.B. die Baustähle.

(St37 hat  $R_m = 370 \text{ N/mm}^2$  bei  $R_e = 240 \text{ N/mm}^2$ )

$\sigma_Z$ : Bruchnennspannung mit Bruchdehnung  $\varepsilon_Z$

Aus  $\sigma_P$  in Bild 3.8 bestimmt man den **Elastizitätsmodul E**.

Somit gilt für das (lineare)

<b>Hooke'sche Gesetz</b> $\sigma = E \varepsilon \quad \text{oder} \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$	(3.26)
--	--------

Es beschreibt den einachsigen Spannungszustand, vgl. Abschn. 3.2.1 und 3.3.1.

Im der englischen Literatur wird E als Young's modulus bezeichnet.

Der **Elastizitätsmodul E** ist eine wichtige Materialkenngröße. In Tabellenbüchern kann man Werte für E nachlesen. Tabelle 3.1 zeigt einige Richtwerte, vgl. Vorlesung Werkstofftechnik.

Die **Querkontraktionszahl  $\mu$**  ist neben E die zweite wichtige Materialgröße, vgl. (2.8). Hierfür gelten die Grenzwerte:  $\mu = 0$  bedeutet keine Querdehnung,  $\mu = 0.5$  bedeutet inkompressibles Material.

Werkstoff	Elastizitätsmodul <b>E</b> (N/mm <sup>2</sup> )	Gleitmodul <b>G</b> (N/mm <sup>2</sup> )	Querkontraktions- zahl <b><math>\mu</math></b> (-)	Wärmeausdehnungs- koeff. <b><math>\alpha</math></b> (K <sup>-1</sup> )
Stahl / Stahlguss	$2.1 \cdot 10^5$		0.3	$12 \cdot 10^{-6}$
Grauguss	$0.8 \cdot 10^5$		0.1 ... 0.2	$9 \cdot 10^{-6}$
Kupfer	$1.2 \cdot 10^5$		0.3	$16 \cdot 10^{-6}$
Messing	$0.9 \cdot 10^5$		0.3	
Aluminium	$0.7 \cdot 10^5$		0.3	$23 \cdot 10^{-6}$
Stahlbeton	$0.4 \cdot 10^5$		0 ... 0.16	
Buchenholz	$0.16 \cdot 10^5$		0	
Gummi	2 ... 3		0.5	
Glas	$0.72 \cdot 10^5$		0	

Tabelle 3.1: Materialeigenschaften technisch wichtiger Werkstoffe

Für die Scherung in Bild 3.5 gilt ein ähnliches Gesetz wie für die Dehnung. Der lineare Zusammenhang von Schubspannung  $\tau$  und Scherung  $\gamma$  lautet

$$\tau = G \gamma \quad \text{oder} \quad \gamma = \frac{\tau}{G} \quad \text{mit} \quad \text{Schubmodul} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.27)$$

Mit der Beziehung (3.17) kann mittels Elastizitätsmodul E und Querkontraktionszahl  $\mu$  der **Schubmodul (oder Gleitmodul) G** berechnet werden.

**Übung 3.3::** Bestimme den Schubmodul G für Stahl und Aluminium. Trage die Werte in Tab. 2.1 ein.

**Übung 3.4:** Ergänzen Sie die Tabelle durch weitere Werte aus der Literatur, z.B. Hütte.

**Übung 3.5:** Bestimme aus (3.20) die Elemente  $\sigma_{11}$  und  $\sigma_{12}$  der Spannungsmatrix  $\sigma$ .

## 4 Grundgleichungen des Euler-Bernoulli-Balkens

### 4.1 Modellannahmen

Das Balkenmodell (Bild 4.1) nach Euler-Bernoulli (um 1700) ist ein besonderes Modell der Kontinuumsmechanik. Im Sinne der klassischen Kontinuumsmechanik weist es anisotropisches Verhalten auf, da im Querschnitt keine Verformungen zugelassen werden, jedoch senkrecht dazu. Dann entspricht es einem Cosserat-Kontinuum, da wir Momente am Partikel berücksichtigen. Für schlanke Körper (Balken) ist dieses Modell zulässig.

Der Balken besteht aus starren Scheibenelementchen, die elastisch verbunden sind (Bild 4.2), und hat somit nur eine materielle Koordinate – die 1 oder  $x$ -Achse längs der neutralen Faser. Die vier zulässigen Verformungen sind Dehnung in Längsrichtung, Biegung in 2 Querrichtungen und Torsion um die Längsachse.

Weiter müssen wir **für eine reine Biegung in  $z$ -Richtung** folgendes annehmen:

1. Der Querschnitt ist symmetrisch bezüglich der  $z$ -Achse.
2. Die Belastungen greifen im Flächenschwerpunkt  $S$  der Stabachse an, in Form von Lasten in  $z$ -Richtung und Momente um die  $y$ -Achse.
3. Der Belastungszustand ist von allen anderen Belastungen entkoppelt und liefert nur die Schnittgrößen: Biegemoment  $M_b = M$  und Querkraft  $F_q = Q$ .  $\Rightarrow$  keine Dehnung, keine Torsion.
4. Die Querschnitte des Balkens sind sehr dünn im Vergleich zu der Balkenlänge.  
 $\Rightarrow$  Die Scherung infolge der Querkraften wird vernachlässigt  $\Rightarrow$  schubstarrer Balken.
6. Die Querschnitte bleiben eben und verformen sich nicht ( $A = A_0$ ). Sie stehen immer senkrecht zur Balkenachse. Jedes Scheibe der Länge  $\Delta x$  des Balkens wird nur in der  $x$ - $z$ -Ebene verschoben und verdreht. (Bernoulli-Hypothese um 1700).
7. Die Balkenachse erfährt infolge der Biegung somit keine Dehnung  $\Rightarrow$  neutrale Faser.

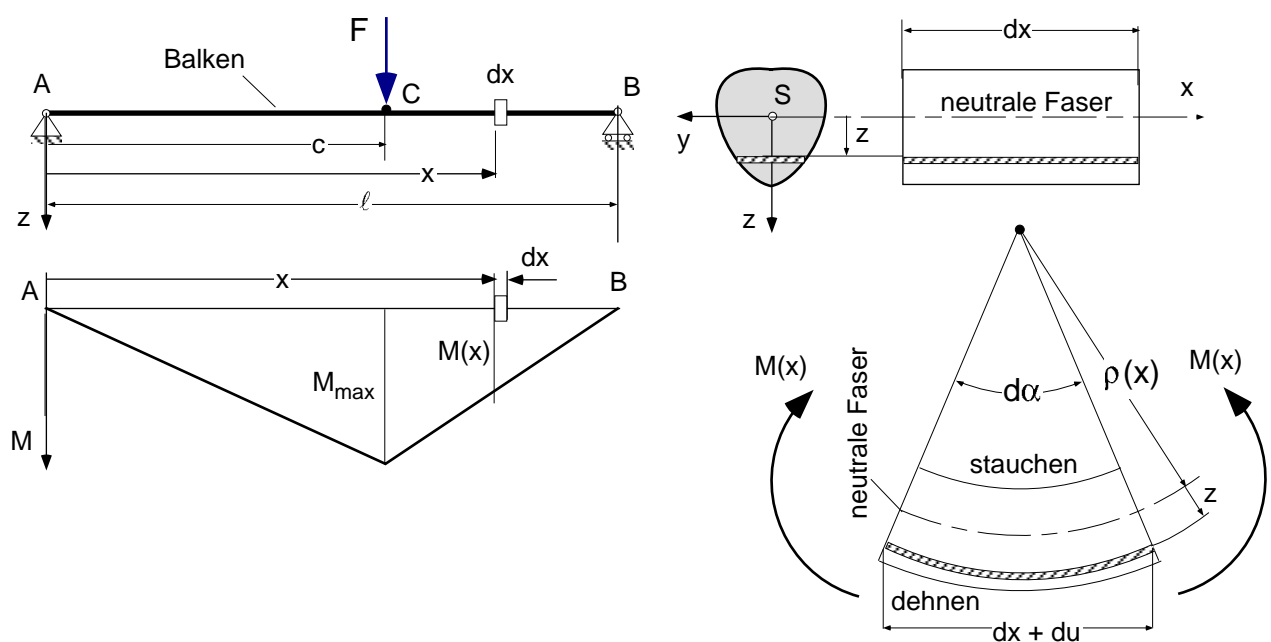


Bild 4.1: Der Biegebalken und seine Modellannahmen.

Im 3D-Fall muss die Bewegung der Scheibenelemente zunächst geometrisch nichtlinear beschrieben werden. Sie erlauben Berechnungen für Knicken, Kippen, gekoppelte Biegungen etc. In den linearen Gleichungen können dann aber alle Verformungen entkoppelt betrachtet werden und zwar einzeln oder gesamt.

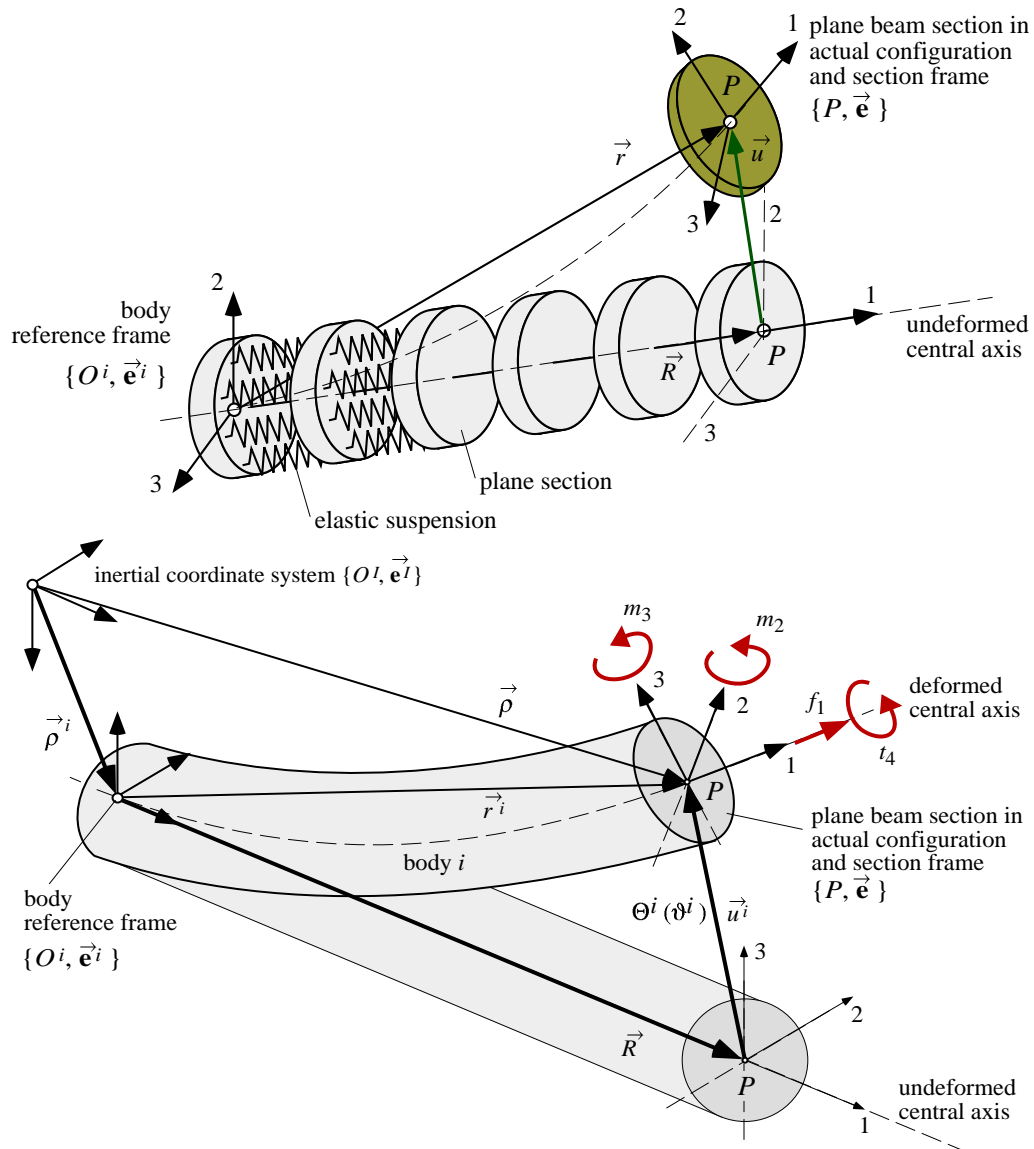


Bild 4.2: Das Scheibenmodell des Euler-Bernoulli-Balkens.

Seine Verschiebungen  $\mathbf{u}^i$  und Verdrehungen  $\vartheta^i$  am Ort  $\mathbf{R}$  infolge der Schnittgrößen  $f_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ ,  $t_4$ .

Wir definieren folgende Verschiebungen und Verdrehungen eines Scheibenelements am Ort  $R_1 = x$  im Punkt  $P$  der neutralen Faser:

$$\text{Verschiebung } \mathbf{u}(x) = (u_1 \quad u_2 \quad u_3)^T \quad (4.1)$$

$$\text{Verdrehung } \vartheta(x) = (\vartheta_1 \quad \vartheta_2 \quad \vartheta_3)^T \quad (4.2)$$

als Drehwinkel der Orientierung von  $\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{\Theta}(\vartheta) \bar{\mathbf{e}}^i$  in der Drehfolge 1, 2, 3. mit  $\mathbf{\Theta}(\vartheta)$  als 3x3 Drehmatrix.

Für den schubstarren Balken sind  
die drei Verschiebungen  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  und die Verdrehung  $\vartheta_1$  **unabhängige** Verformungsgrößen.  
Die Drehwinkel  $\vartheta_2$ ,  $\vartheta_3$  sind von  $u_2$ ,  $u_3$  **abhängige** Größen.

## 4.2 Verzerrungsmaße

Als Verzerrungsmaße werden verwendet:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = (\varepsilon_1 \quad \kappa_3 \quad -\kappa_2 \quad \kappa_1)^T. \quad (4.4)$$

Die Längsdehnung  $\varepsilon_1$  ergibt sich aus der Änderung der

$$\text{Bogenlänge } s(x) = \int_0^{R_1} s'(x) dx \quad \text{with} \quad s'(x) = \sqrt{(r'_1(x))^2 + (r'_2(x))^2 + (r'_3(x))^2}, \quad (..) = \frac{\partial(..)}{\partial x}$$

$$\text{zu } \varepsilon_1 = s'(x) - 1$$

$$\text{Für die Krümmungen gilt } \boldsymbol{\kappa} = \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \vartheta_2 \\ 0 & \cos \vartheta_1 & \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \\ 0 & -\sin \vartheta_1 & \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \end{pmatrix} \frac{d\boldsymbol{\vartheta}}{ds}.$$

Vielfach können wir nehmen, dass die Verformungen klein sind (Bild 4.3), d.h. **lineare Balkentheorie**.

=> Gleichgewicht kann am unverformten System aufgestellt werden (Theorie 1. Ordnung).

Ausnahme: Stabilitätsuntersuchungen; dort wird das Gleichgewicht am verformten System aufgeschrieben.

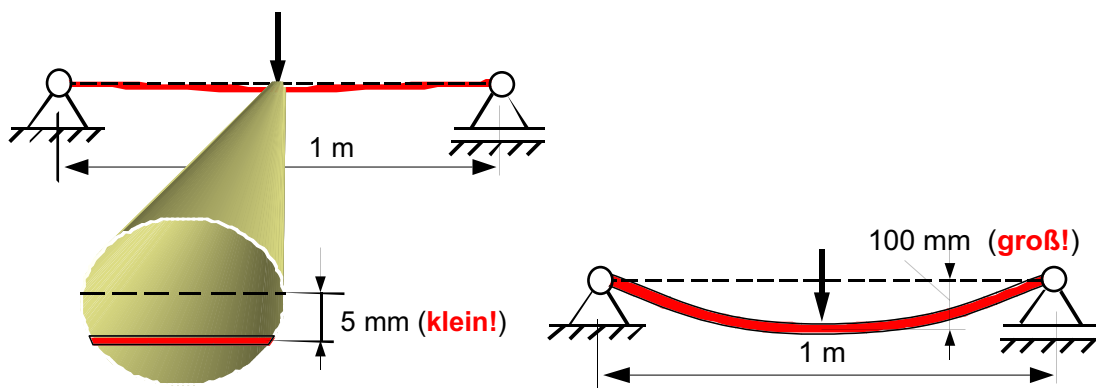


Bild 4.3: Was bedeuten kleine Verformungen (nur ein Anhaltswert)

Nach **linearer Balkentheorie** schreibt man:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \kappa_3 \\ -\kappa_2 \\ \kappa_1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} u'_1 \\ u''_2 \\ u''_3 \\ \vartheta'_1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad (..) = \frac{\partial(..)}{\partial x} \quad (4.5)$$

und findet für die drei Drehwinkel in linearer Theorie

$$\boldsymbol{\vartheta}(x) = \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ -u'_3 \\ u'_2 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

### 4.3 Modellparameter

Um das elastische Potential anzugeben sind neben den Materialparametern in Abschn. 3.5 folgende **Parameter der Balkengeometrie** erforderlich:

Die Länge des Balkens  $\ell$  (m)

Querschnitt  $A = \int_{A_0} dR_2 dR_3 = \int_{A_0} dA \quad (\text{m}^2) \quad (4.7)$

Flächenträgheitsmomente um 2- und 3-Achse  $J_{33} = \int_{A_0} R_2^2 dA$ ,  $J_{22} = \int_{A_0} R_3^2 dA \quad (\text{m}^4) \quad (4.8)$

gemischtes Flächenträgheitsmoment  $J_{23} = \int_{A_0} R_2 R_3 dA = 0 \quad (\text{m}^4) \quad (4.9)$

für Profile, deren Koordinatensysteme nicht parallel zu Symmetrieachsen liegen.

Flächenmoment der Torsion  $J_T \quad (\text{m}^4)$ .

**Übung 4.1** Bestimme die Geometrieparameter eines Balkens mit Vollkreisquerschnitt bei  $d = 12 \text{ mm}$ .

**Übung 4.2** Bestimme die Geometrieparameter eines Balkens mit Rechteck-Vollquerschnitt der Höhe  $h = 3 \text{ cm}$  (y-Achse) und Breite  $b = 1 \text{ cm}$  (z-Achse).

## 4.4 Elastisches Potential und Schnittgrößen

Das elastische Potential (3.22) und die innere virtuelle Leistung in (3.24) des Balkens lauten mit (3.20)

$$U = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left( \mathcal{E} A \varepsilon_1^2 + \mathcal{G} J_T \kappa_1^2 + \mathcal{E} J_{33} \kappa_3^2 + \mathcal{E} J_{22} \kappa_2^2 \right) dx \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \delta P_i &= - \int_0^\ell \left( \delta \dot{\varepsilon}_1 \mathcal{E} A \varepsilon_1 + \delta \dot{\kappa}_1 \mathcal{G} J_T \kappa_1 + \delta \dot{\kappa}_3 \mathcal{E} J_{33} \kappa_3 + \delta \dot{\kappa}_2 \mathcal{E} J_{22} \kappa_2 \right) dx \\ &= - \int_0^\ell (\mathcal{L} \delta \dot{\mathbf{v}})^T \mathbf{H} (\mathcal{L} \mathbf{v}) dx \end{aligned} \quad (4.11)$$

mit der Matrix der Verformungskoodinaten  $\mathbf{v}$ , der Material-Matrix  $\mathbf{H}$  und der linearen Operatormatrix  $\mathbf{L}$ :

$$\mathbf{v}(x) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vartheta_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E} J_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E} J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{G} J_T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_1 \end{pmatrix}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}. \quad (4.12)$$

Die Schnittgrößen des Balkens am Ort  $x$  in Bild 4.2 erhält man aus der Spannungsbeziehung (3.20) zu

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ m_3(x) \\ -m_2(x) \\ t_4(x) \end{pmatrix} = \mathbf{H} (\mathbf{L} \mathbf{v}(x)) = \begin{pmatrix} \mathcal{E} A u_1' \text{ (N)} \\ \mathcal{E} J_{33} u_2'' \text{ (Nm)} \\ \mathcal{E} J_{22} u_3'' \text{ (Nm)} \\ \mathcal{E} J_T \vartheta_1' \text{ (Nm)} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}(x). \quad (4.13)$$

**Übung 4.3** Stelle die Biegegleichungen für die x-y-Ebene auf.



## 5 Ritzansatz und Finite-Elemente-Approximation

### 5.1 Ansatzfunktionen

Die Variationsgleichung der virtuellen Leistungen (3.1) beinhaltet Ableitungen nach der Zeit  $t$  (wegen der Beschleunigung  $\mathbf{a}$  der Partikel am Ort  $P$ ) sowie Ableitungen nach dem Ort  $\mathbf{R}$  (wegen der Berechnung der Verzerrungen  $\mathbf{e}$ , siehe (3.12) mit (3.13)).

Eine analytische Lösung solcher partieller Differentialgleichungen ist für einfache Fälle mit Hilfe des Separationsansatzes möglich, vgl. Abschn. 1.1. Dabei wird die Gleichung in eine zeitabhängige und eine ortsabhängige Gleichung getrennt, (Schwertassek und Wallrapp 1999), Abschn. 5.1.

Anstelle der exakten Lösung der ortsabhängigen Gleichung kann man einen **Ritzansatz** anwenden, (Schwertassek und Wallrapp 1999), Abschn. 5.1. Stellt der Ansatz ein vollständiges Funktionensystem dar und erfüllt dieser die Randbedingungen, so konvergiert die Lösung gegen die wahre Lösung. Für den gesamten Körper könnte man sich z.B. Funktionen  $\mathbf{F}(\mathbf{R})$ , gewichtet mit noch unbekannten Faktoren  $\mathbf{q}$ , ausdenken, die die statischen und dynamischen Verformungen hinreichend genau beschreiben.  $\mathbf{q}$  sind somit die neuen Unbekannten, die **Zustandsgrößen** des Systems.

Folglich gilt für die Verschiebung  $\mathbf{u}$  und Verzerrung  $\mathbf{e}$ , bzw. virtuelle Verzerrungsgeschwindigkeiten (mit linearem **Ritzansatz**)

$$\mathbf{u}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{R}) \mathbf{q}(t), \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{R}) \dot{\mathbf{q}}(t), \quad (5.1)$$

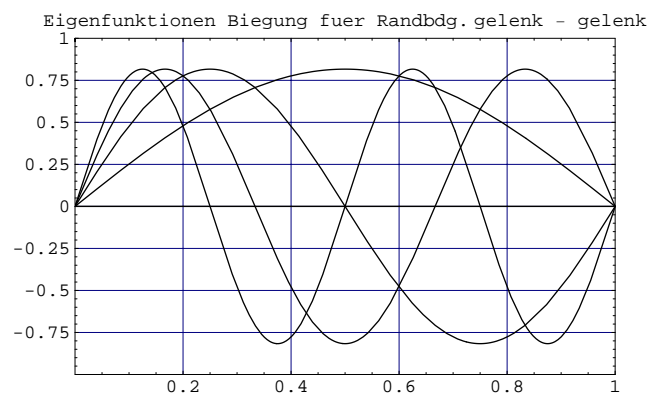
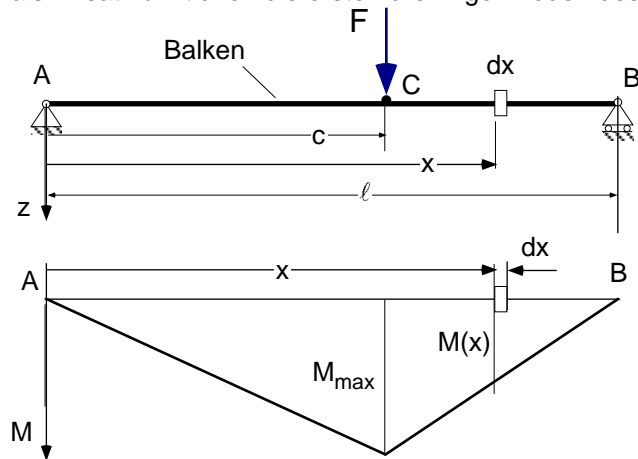
$$\mathbf{e}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{L} \mathbf{u}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{L} \mathbf{F}(\mathbf{R}) \mathbf{q}(t) = \mathbf{B}(\mathbf{R}) \mathbf{q}(t), \quad d\mathbf{e}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{R}) d\mathbf{q}(t). \quad (5.2)$$

$\mathbf{B}(\mathbf{R}) = \mathbf{L} \mathbf{F}(\mathbf{R})$  wird als Verzerrungsmatrix bezeichnet.

Von den Ansatzfunktionen wird gefordert, daß sie den kinematischen Randbedingungen genügen.  
Die Integraldarstellung garantiert, daß auch die kinetischen Randbedingungen im Rahmen der durch die Wahl der Ansatzfunktionen gegebenen Freiheiten erfüllt werden!  
Jeder Ansatz stellt eine Näherung der Lösung des Problems dar!

Wird für  $\mathbf{u}$  ein Ritzansatz eingebracht, so spricht man von der **Verschiebungsmethode**.  
Man könnte auch für die Spannungen einen Ansatz liefern, dann nennt man das **Kraftmethode**.  
Verwenden wir als Ansatzfunktionen eine endlich Zahl von Eigenfunktionen, vgl. Abschn. 1.1, so spricht man von der **Modalapproximation**

**Übung 5.1:** Die Durchbiegung eines Balkens soll mittels Ansatzfunktionen berechnet werden. Wir wählen als Ansatzfunktionen die ersten drei Eigenmoden des beiderseitig gelenkig gelagerten Balkens.



Werte:

$$\ell = 1 \text{ m}, c = 0.6 \text{ m},$$

$$\text{Querschnitt: } h = 0.02 \text{ m}, b = 0.05 \text{ m},$$

$$\text{Material Alu.: } r = 3000 \text{ kg/m}^3.$$

$$F = 200 \text{ N}.$$

Funktionen:

$$W_1 = 0.816497 \sin[3.14159 x]$$

$$W_2 = 0.816497 \sin[6.28319 x]$$

$$W_3 = 0.816497 \sin[9.42478 x]$$

$$W_4 = 0.816497 \sin[12.5664 x]$$

$$W_5 = 0.816497 \sin[15.708 x]$$

Vergleiche die Lösung mit der analytischen Lösung.

## 5.2 Finite Elemente und Interpolationsfunktionen

Für beliebig geformte Körper und Strukturen sind aber geeignete Funktionen nicht auffindbar. Deshalb der Gedanke, den Körper in eine endliche Zahl kleiner Elemente mit dem Volumen  $V_0^e$  – die **finiten Elemente** – zu unterteilen, für die ein einfacher Polynomansatz über den kleinen Bereich das Verformungsverhalten hinreichend genau beschreibt.

In Bild 5.1 ist ein Winkel dargestellt. Für den gesamten Winkel analytische Funktionen zu finden ist nicht möglich. Da der Winkel sehr schlank ist, könnte man ihn durch Balkenelemente modellieren und ihn unterteilen. Es werden 3 finite Balkenelemente mit 4 globalen Knoten gewählt.

Andere wichtige finite Elemente sind in Tabelle 5.1 dargestellt. Darüber hinaus bieten FEM-Programme, wie z.B. ANSYS ein Fülle von Elementen, deren Einsatz aber auch gelernt werden muss. Nicht jede Elementbeschreibung führt zu einem guten Ergebnis.

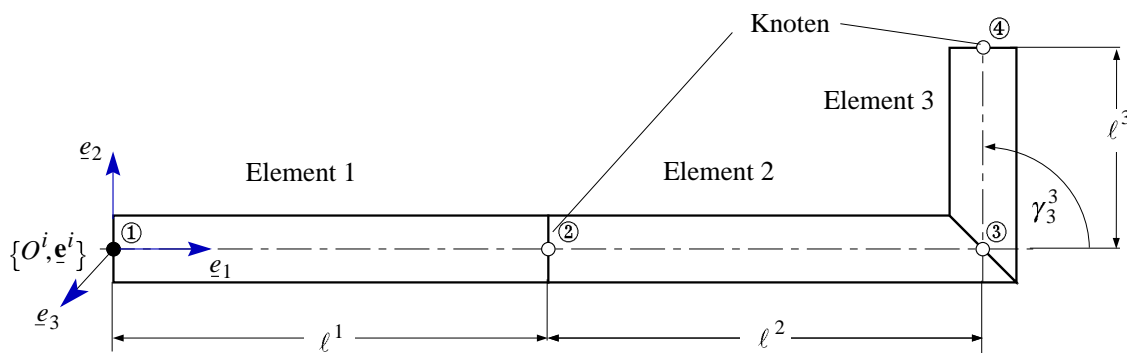


Bild 5.1: Winkelstruktur mit 3 Elementen vom Typ *Balken* und 4 Knoten.

Zur Beschreibung der Partikelbewegung (Punkt  $P$ ) im Element  $e$  sei auf Bild 5.2 verwiesen: Mit der Orientierungsmatrix (Drehmatrix)  $\mathbf{G}^e(g^e)$  und der Position  $\mathbf{R}^e$  des Element-Koordinatensystems bezüglich dem Körperbezugssystem und den materiellen Koordinaten  $\mathbf{x}$  im Element findet man

$$\text{Position von } P \quad \mathbf{r}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{R} + \mathbf{u}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{R}^e + \mathbf{G}^{eT} \mathbf{x} + \mathbf{G}^{eT} \mathbf{e}^e \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad (5.3)$$

mit  $\mathbf{e}^e = \mathbf{G}^e \mathbf{e}$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^e + \mathbf{G}^{eT} \mathbf{x}$  als die Position des Punktes im Referenzzustand und  $\mathbf{e}^e \mathbf{u}$  als die Verschiebungen im Elementsystem.

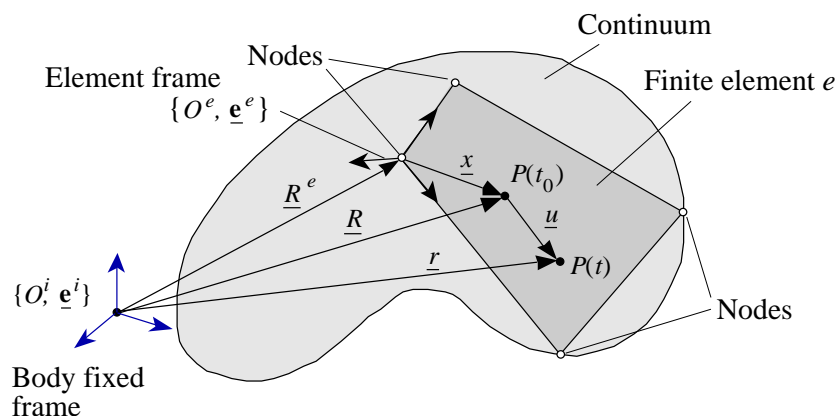


Bild 5.2: Allgemeine Definitionen eines finiten Elementes im elastischen Körper.

(Unterstrichungen bedeuten hier physikalische Vektoren)

Tragwerkstyp	Verschiebungsvektor	Belastungsvektor	Schnittkraftvektor	Verzerrungsvektor
Integrationsbereich	$\mathbf{u}$	$\bar{\mathbf{p}}$	$\boldsymbol{\sigma}$	$\boldsymbol{\epsilon}$
Bezeichnung(en)	Bezeichnung(en)	Bezeichnung(en)	Bezeichnung(en)	Bezeichnung(en)
Einheit	Einheit(en)	Einheit(en)	Einheit(en)	Einheit(en)
Dreidimensionales Kontinuum	$\{u, v, w\}$	$\{\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}\}$	$\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}$	$\{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}$
Volumen	Verschiebungen	Volumenlasten	Normalspannungen Schubspannungen	Dehnungen Schubverzerrungen
$\text{m}^3$	$\text{m}$	$\text{N}/\text{m}^3$	$\text{N}/\text{m}^2$	1
Scheibe	$\{u, v\}$	$\{\bar{p}_x, \bar{p}_y\}$	$\{n_x, n_y, n_{xy}\}$	$\{\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}\}$
Fläche	Verschiebungen in der Bezugsfläche	Flächenlasten in der Bezugsfläche	Normalkräfte Schub	Dehnungen Schubverzerrung in der Bezugsfläche
$\text{m}^2$	$\text{m}$	$\text{N}/\text{m}^2$	$\text{N}/\text{m}$	1
Dehnstab	$\{u\}$	$\{\bar{p}\}$	$\{N\}$	$\{\epsilon\}$
Länge	Längsverschiebung	Längsbelastung	Normalkraft	Dehnung
$\text{m}$	$\text{m}$	$\text{N}/\text{m}$	$\text{N}$	1
Schubweiche Platte	$\{w, \beta_x, \beta_y\}$	$\{\bar{p}_z, \bar{p}_{mx}, \bar{p}_{my}\}$	$\{m_x, m_y, m_{xy}, q_x, q_y\}$	$\{\kappa_x, \kappa_y, 2\kappa_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}$
Fläche	Querver-schiebung Querschnitts-neigungen	Querbe-lastung Momenten-belastungen	Biege-momente Drill-moment Quer-kräfte	Krümmungen Verwindung Schubver-zerrungen
$\text{m}^2$	$\text{m}$ 1	$\text{N}/\text{m}^2$ $\text{Nm}/\text{m}^2$	$\text{Nm}/\text{m}$ $\text{Nm}/\text{m}$ $\text{N}/\text{m}$	1/m 1/m 1
Schubstarre Platte	$\{w\}$	$\{\bar{p}_z\}$	$\{m_x, m_y, m_{xy}\}$	$\{\kappa_x, \kappa_y, 2\kappa_{xy}\}$
Fläche	Querver-schiebung	Querbelastung	Biege-momente Drill-moment	Krümmungen Verwindung
$\text{m}^2$	$\text{m}$	$\text{N}/\text{m}^2$	$\text{Nm}/\text{m}$ $\text{Nm}/\text{m}$	1/m 1/m
Schubweicher Balken	$\{w, \beta\}$	$\{\bar{p}_z, \bar{p}_m\}$	$\{M, Q\}$	$\{\kappa, \gamma\}$
Länge	Querver-schiebung Querschnitts-neigung	Querbe-lastung Momenten-belastung	Biege-moment Quer-kraft	Krümmung Schubver-zerrung
$\text{m}$	$\text{m}$ 1	$\text{N}/\text{m}$ $\text{Nm}/\text{m}$	$\text{Nm}$ $\text{N}$	1/m 1
Schubstarrer Balken	$\{w\}$	$\{\bar{p}_z\}$	$\{M\}$	$\{\kappa\}$
Länge	Querver-schiebung	Querbe-lastung	Biege-moment	Krümmung
$\text{m}$	$\text{m}$	$\text{N}/\text{m}$	$\text{Nm}$	1/m

Tabelle 5.1: Typen von Elementen und ihre spezifischen Größen. (Knothe und Wessels 1999)

Die Ansatz- oder Interpolationsfunktionen für die Verschiebungen und Verdrehungen innerhalb eines Elements sind in der Regel lineare Polynome für Dehnungen und Scherungen bzw. kubische Polynome für Biegungen. Die Koeffizienten der Polynome (ähnlich den Gewichtungsfaktoren  $\mathbf{q}$  in (5.1)) kann man so ansetzen, dass sie eine physikalische Bedeutung erlangen, nämlich die Bewegungen der Elemente an den Knoten. Je nach Ansatz sind somit bestimmte Knotenbewegungen (Verschiebungsvektor in Tab. 5.1) zulässig.

Beispiel Dehnung des Stabes: Ein Polynom 1. Ordnung hat zwei Parameter, die durch die zwei Knotenbewegungen,  $u^A$  und  $u^B$  an den Knoten  $A$  und  $B$  gewichtet werden.

Mit  $\mathbf{N}^e(\mathbf{x})$  als Interpolationsmatrix findet man für die

Verschiebungen im Element  $e$  :  ${}^e\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{z}^e(t)$ , (5.4)  
 wo  $\mathbf{z}^e$  die Knotenverschiebungen/-drehungen am Element  $e$  sind.  
 Die Dimension von  $\mathbf{N}^e$  ist  $3 \times n_F^e$ . Der Index  $e$  sagt, dass die Koordinaten von  $\mathbf{z}^e$  und  ${}^e\mathbf{u}$  in der Elementbasis gesehen werden.

Jedes Element hat Ränder, deren Bewegungen mit den Bewegungen des Nachbarelements übereinstimmen müssen – sogenannte Übergangs- oder Kompatibilitätsbedingungen. In der FE-Beschreibung werden diese Bedingungen nur an den Knoten gewährleistet. Ob Verschiebungen und Verdrehungen erfüllt werden, ist von der Interpolationsfunktion – und somit vom Elementtyp – abhängig.

Die Spannungen hingegen sind bei einem Ansatz (5.4) abgeleitete Größen und können somit am Übergang von einem Element zum nächsten nicht die gleichen Werte ausweisen. Es werden sich je nach Belastung an den Rändern Spannungssprünge ergeben.

Man sagt: die Spannungen werden nur im integralen Mittel erfüllt.

**Merke:**  
**Je feiner das FE-Netz, desto besser werden die Übergangsbedingungen erfüllt und desto besser können Spannungssprünge reduziert werden.**

Die Verzerrungen im Element  $e$  findet man, indem man (5.4) in (3.12) einsetzt:

$$\mathbf{e}^e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{L} \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{z}^e(t) = \mathbf{B}^e(\mathbf{x}) \mathbf{z}^e(t), \text{ mit } \mathbf{B}^e = \mathbf{L} \mathbf{N}^e \text{ als Verzerrungsmatrix.} \quad (5.5)$$

Entsprechend gilt dann für die Spannungen

$$\mathbf{S}^e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}^e \mathbf{e}^e = \mathbf{H}^e \mathbf{L} \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{z}^e(t) = \mathbf{H}^e \mathbf{B}^e(\mathbf{x}) \mathbf{z}^e(t), \quad (5.6)$$

mit  $\mathbf{H}^e$  als Element-Materialmatrix, meist konstant im Bereich des Elements.

Die Interpolationsfunktionen sind so gewählt, dass sie auch zur Beschreibung von Starrkörperbewegungen geeignet sind. Eine Vorgabe der Knotenkoordinaten als z.B. translatorische Starrkörperbewegung muss alle inneren materiellen Punkte des Elements translatorisch bewegen. Gleichzeitig müssen die Verzerrungen im Element  $e$  null sein.

**Zusammenfassung:** Die Güte der FE-Approximation ist abhängig

**1. von der Wahl der finiten Elemente und**

**2. von der Dichte der Elemente,**

die das reale Verschiebungs- und Spannungsfeld eines Körpers beschreiben.

Das Elementmodell legt die möglichen Verformungen (Verschiebungen  $\mathbf{u}$  und Verdrehungen  $\mathbf{J}$ ), die Interpolationsfunktionen (Matrix  $\mathbf{N}^e$ ), Verzerrungen  $\mathbf{e}^e$  und Spannungen  $\mathbf{s}^e$ , die Materialmatrix  $\mathbf{H}^e$  und die Elementkoordinaten  $\mathbf{z}^e$  fest.

Besitzt das Element auch Drehfreiheitsgrade, ist ein zu (5.4) ähnlicher Ansatz anzugeben.

### 5.3 FE-Ansatz für das ebene Balkenelement

Das ebene Balkenelement mit der Länge  $\ell$  hat die zwei Knoten  $A$  und  $B$  und sechs Knotenbewegungen: die zwei Verschiebungen  $u$  und  $v$  in 1- und 2-Richtung sowie die Verdrehung  $J$  um die 3-Achse je Knoten, siehe Bild 5.3.  $n_F^e$  ist somit 6. Für  $\mathbf{x}$  gilt  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$

Die ebene Verschiebung im Inneren des Elements ist  ${}^e\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ .

Die Interpolationsfunktion ist kubisch für die Biegung und linear für die Dehnung. Somit lautet die 2  $\times$  6-

Interpolationsmatrix mit der dimensionslosen Länge  $x = \frac{x}{\ell}$ ,  $x \in [0, 1]$ :

$$\mathbf{N}^e(x) = \begin{bmatrix} 1-x & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1-3x^2+2x^3 & \ell(x-2x^2+x^3) & 0 & 3x^2-2x^3 & \ell(-x^2+x^3) \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$\text{für } {}^e\mathbf{u}(x,t) = \begin{bmatrix} u_1(x,t) \\ u_2(x,t) \end{bmatrix} = \mathbf{N}^e(x) \mathbf{z}^e(t) \text{ mit } \mathbf{z}^e = \begin{pmatrix} u_A & v_A & J_A & u_B & v_B & J_B \end{pmatrix}^T. \quad (5.8)$$

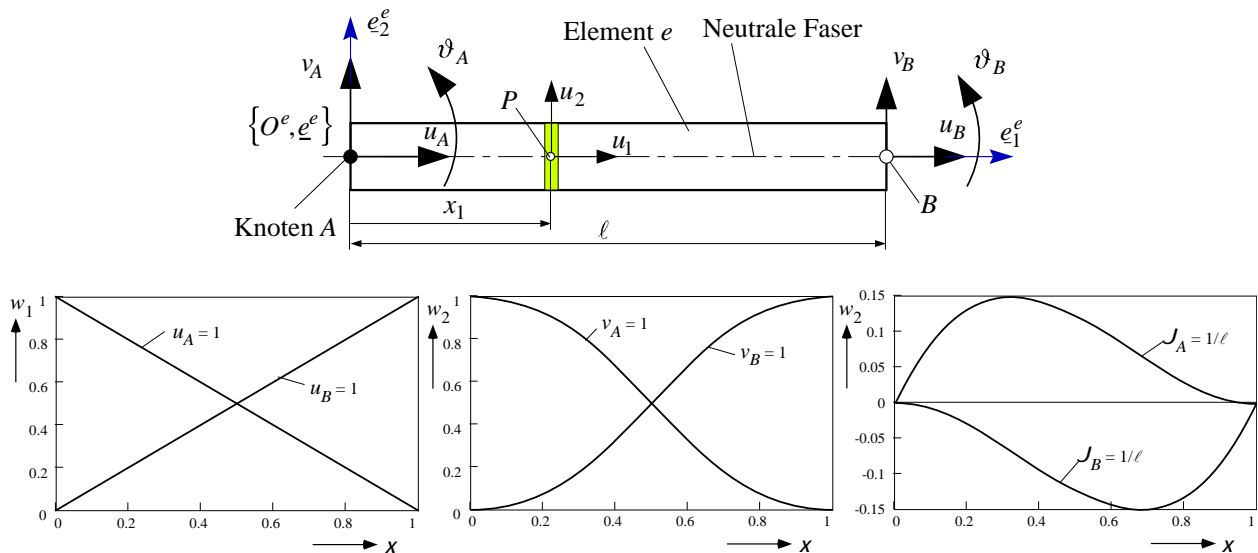


Bild 5.3: Ein 2D-Balkenelement und seine Knotenkoordinaten und Interpolationsfunktionen.

(Hinweis: Ersetze hierin  $u_i$  durch  $u_1$  )

**Übung 5.2:** Bestimme die Interpolationsfunktion für die Neigung ( $u'_2 = \text{Winkel } J_3$ ).

**Übung 5.3:** Bestimme die lineare 2 × 6-Verzerrungsmatrix  $\mathbf{B}^e$  für die Verzerrungen

$\mathbf{e}^e = \begin{pmatrix} e_1 & k_3 \end{pmatrix}^T = \mathbf{B}^e \mathbf{z}^e$  des ebenen Balkenelements  $e$ .

**Übung 5.4:** Gebe die Spannungsmatrix  $\mathbf{s}^e$  und Hooke-Matrix  $\mathbf{H}^e$  des ebenen Balkenelements  $e$  an.



## 5.4 FE-Ansatz für das räumliche Balkenelement

Das räumliche Balkenelement mit der Länge  $\ell$  hat die zwei Knoten  $A$  und  $B$  und 12 Knotenbewegungen: drei Verschiebungen und drei Verdrehungen je Knoten, siehe Bild 6.11.  $n_F^e$  ist somit 12.

Für  $\mathbf{x}$  gilt  $\mathbf{x} = (x \ 0 \ 0)^T$ . Das Verschiebungsfeld ist  ${}^e\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ . Zusätzlich ist der Drehwinkel  $J_1$  um die Längsachse zur Beschreibung der Torsion erforderlich:

Wir definieren hier den Vektor  ${}^e\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, J_1)^T$ . Er hat also nun vier Elemente.

Die Interpolationsfunktion ist kubisch für die beiden Biegungen und linear für Dehnung und Torsion, definiert in (4.21). Somit lautet die  $4 \times 12$ -Interpolationsmatrix mit der dimensionslosen Länge

$$\xi = \frac{x}{\ell}, \quad \xi \in [0, 1]:$$

$${}^e\mathbf{n}(\xi, t) = \mathbf{N}^e(\xi) \mathbf{z}^e(t), \quad (5.9)$$

$$\mathbf{N}^e(\xi) = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi & 1-3\xi^2+2\xi^3 & 0 & 0 & 0 & \ell\xi-2\ell\xi^2+\ell\xi^3 \\ 0 & 0 & 1-3\xi^2+2\xi^3 & 0 & -\ell\xi+2\ell\xi^2-\ell\xi^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\xi & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 \end{bmatrix}$$

Der Vektor der Knotenkoordinaten lautet

$$\mathbf{z}^e(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^A \\ \mathbf{J}^A \\ \mathbf{u}^B \\ \mathbf{J}^B \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{u}^A = \begin{pmatrix} u_1^A \\ u_2^A \\ u_3^A \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^A = \begin{pmatrix} J_1^A \\ J_2^A \\ J_3^A \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^B = \begin{pmatrix} u_1^B \\ u_2^B \\ u_3^B \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^B = \begin{pmatrix} J_1^B \\ J_2^B \\ J_3^B \end{pmatrix}, \quad a = 1, 2, 3. \quad (5.10)$$

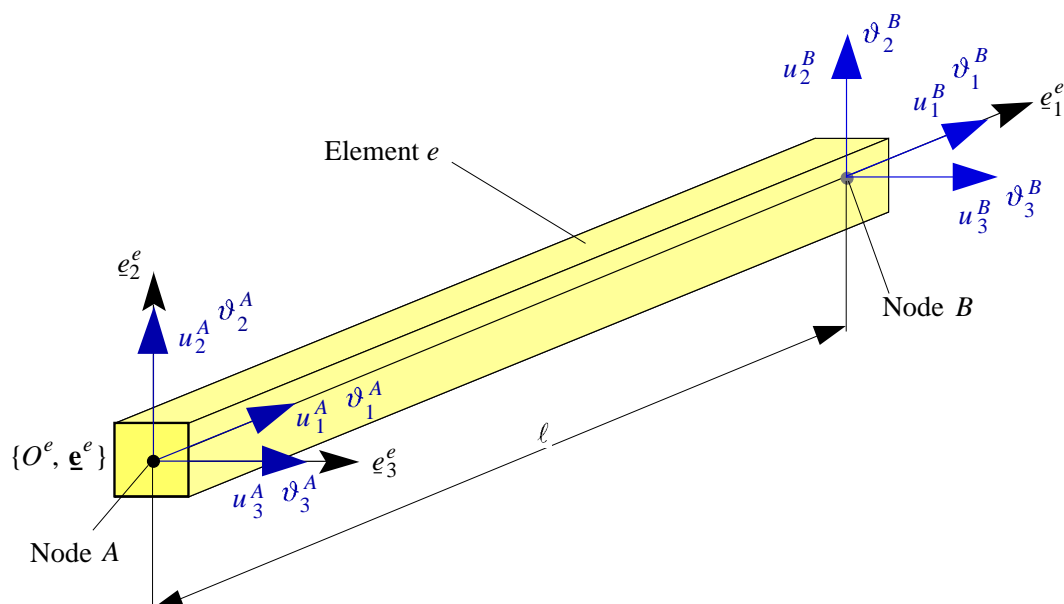


Bild 5.4: Ein 3D-Balkenelement und seine Knotenkoordinaten.



## 6 FE-Struktur und deren Bewegungsgleichungen

### 6.1 Die FE-Struktur

Alle Elemente,  $e = 1, \dots, n_E$ , bilden die finite Elemente-Struktur (FE-Struktur) des elastischen Körpers.

Die Bewegung der FE-Struktur wird durch die Bewegung der Knoten  $k = 1, \dots, n_K$  des Körpers beschrieben, siehe Bild 6.1.

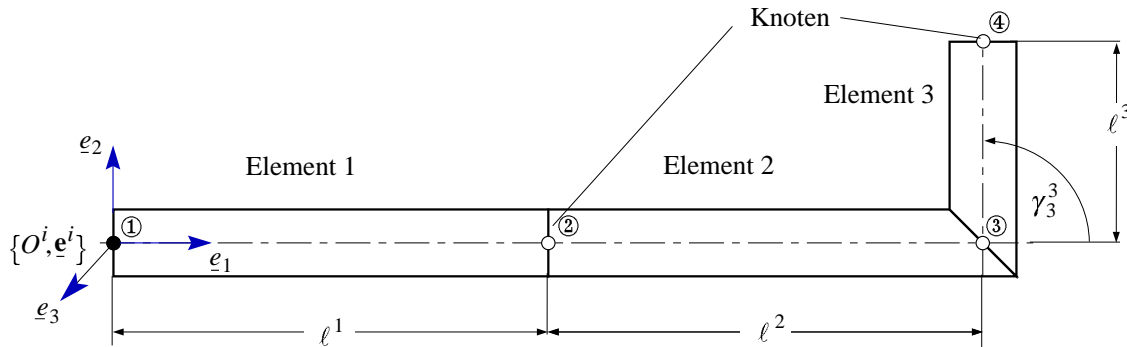


Bild 6.1: Struktur mit 3 Elementen vom Typ *2D-Balken* und 4 Knoten.

Die Elemente 1 und 2 sind parallel zur Körperbasis, Element 3 ist um  $\gamma_3^3 = +90^\circ$  gedreht. (Index unten gibt die Drehrichtung vor, Index oben ist der Elementindex)

Die Gesamtheit aller Knotenbewegungen liefert den **Zustandsvektor der freien FE-Struktur**:

$$\text{Zustandsvektor der freien Struktur } \mathbf{z}_F = \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{z}_F^k \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{z}_F^k = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^k \\ \boldsymbol{\vartheta}^k \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

und der Dimension  $n_F = n_F^k n_K$ .

$n_F^k$  ist die Dimension von  $\mathbf{z}_F^k$ , deren Verschiebungen und Verdrehungen bez. der Körperbasis definiert werden.

Mit einer **Transformationsmatrix**  $\mathbf{T}^e$  lassen sich die Element-Knotenkoordinaten  $\mathbf{z}^e$  aus dem Zustandsvektor berechnen.  $\mathbf{T}^e$  beinhaltet somit die Zuordnung und die Drehung des Elements. Es gilt

$$\text{Element-Transformation } \mathbf{z}^e(t) = \mathbf{T}^e \mathbf{z}_F(t) \quad (6.2)$$

mit der Dimension für  $\mathbf{T}^e = n_F^e \times n_F$ . Daraus folgt

$$\boxed{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\Gamma}^{eT} \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{T}^e \mathbf{z}_F(t)} \quad \text{wo} \quad \mathbf{x} = \boldsymbol{\Gamma}^e (\mathbf{R} - \mathbf{R}^e) \quad (6.3)$$

Die Verschiebung aller Punkte  $\mathbf{R}$  ist gegeben in (5.1) zu  $\mathbf{u}(\mathbf{R}, t) = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{R}) \mathbf{q}(t)$ . womit nun gilt

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{R}) = \sum_{e=1}^{n_E} \boldsymbol{\Gamma}^{eT} \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{T}^e \quad \text{und} \quad \mathbf{q}(t) = \mathbf{z}_F(t)$$

**Merke:** Die Knotenbewegungen der freien FE-Struktur ( Zustandsvektor  $\mathbf{z}_F$  )  
müssen mit den Knotenbewegungen der finiten Elemente ( $\mathbf{z}^e$ ) verträglich sein.

Außerdem müssen die Randbedingungen erfüllt werden, vgl. Bild 2.2.

**Kinematische Bedingungen auf dem Rand  $A_U$**  (Rand- oder Lagerbedingungen) bei vorgegeben Verschiebungen  $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{R}, t)$  lauten

$$\mathbf{u}(\mathbf{R}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{R}, t) \Rightarrow \text{Bedingungen am Knoten } k : \mathbf{z}_F^k = \bar{\mathbf{z}}_F^k = \begin{cases} 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{z}_F = \mathbf{J}_F \mathbf{y}_F + \bar{\mathbf{J}}_F \bar{\mathbf{z}}_F} \quad (6.4)$$

mit  $\mathbf{y}_F$  Lage-Zustandsgrößen der gelagerten FE-Struktur der Dimension  $f = n_F - n_C$

**Kinetische Bedingungen auf  $A_P$**  (Belastungen am Rand) bei vorgegebenen Randlasten  $\bar{\mathbf{dP}}_n$  sind

$$\mathbf{dP}_n(\mathbf{R}, t) = \bar{\mathbf{dP}}_n(\mathbf{R}, t) \Rightarrow \text{Kräfte/Momente am Knoten } k : \mathbf{h}_{Ff} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{h}}_F^k \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

**Übung 6.1:** Bestimme Größen zur ebenen Winkelstruktur (Bild 6.1 und 6.2).

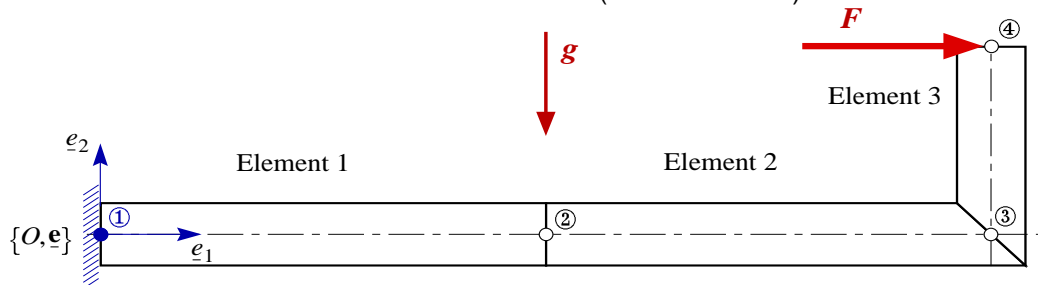


Bild 6.2: Eingespannte ebene Winkelstruktur mit 3 Elementen und 4 Knoten unter Belastungen.

Verwendete finite Elemente: .....

Zahl der FHG pro Knoten  $n_F^k = \dots$  Dimension der Balkenstruktur  $n_F = \dots$

Bedingungen der Lagerung ..... mit  $n_C = \dots$

Dimension der Zustandsgrößen  $\mathbf{y}_F$  mit  $f = \dots$

Jakobimatrizen  $\mathbf{J}_F$

$\bar{\mathbf{J}}_F$

Lastvektor  $\mathbf{h}_{Ff}$  infolge  $F$  an  $k = 4$ :

Volumenkräfte  $\mathbf{k}_0^e$  infolge Erdbeschleunigung  $\mathbf{g}$ :

## 6.2 Herleitung der Bewegungsgleichungen

Aus dem Prinzip der virtuellen Leistungen (3.1) lassen sich für beliebige virtuelle Geschwindigkeiten die Bewegungsgleichungen ableiten. Dazu setzen wir die FE-modellabhängiger Gesetze ein, wie

die Interpolationsvorschrift für die Verschiebungen (5.4)  ${}^e\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{z}^e(t)$ ,

das Materialgesetz (5.6) für das Element,  $\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{H}^e \boldsymbol{\epsilon}^e$ , mit der Verzerrungsbeziehung

$$\boldsymbol{\epsilon}^e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}^e(\mathbf{x}) \mathbf{z}^e(t)$$

die Volumenkraftdichte  $\mathbf{k}_0^e$  infolge Gravitation  $\mathbf{g}$  und Oberflächen- / Knotenkräfte  $\mathbf{h}_{Ff}$ ,

sowie die Strukturdaten  $\mathbf{R}^e$ ,  $\boldsymbol{\Gamma}^e$ ,  $\mathbf{z}_F$ ,  $\mathbf{h}_F$ ,  $\mathbf{J}_F$ ,  $\bar{\mathbf{J}}_F$  aller Element und den Lagerbedingungen.

Das Volumenintegral in (3.1) und (3.24) ergibt sich bei  $n_E$  finiten Elementen zu

$$\int dV_0 = \sum_{e=1}^{n_E} \int dV_0^e \quad (6.6)$$

Man erhält somit aus (3.1) mit den Lagerbedingungen (6.4) und Randbelastungen (6.5)

$$\delta \dot{\mathbf{z}}_F^T \left( \underbrace{\sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \int_{V_0^e} \mathbf{N}^{eT} \rho_0^e \mathbf{N}^e dV \mathbf{T}^e}_{\mathbf{M}_F} \ddot{\mathbf{z}}_F + \underbrace{\sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \int_{V_0^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{H}^e \mathbf{B}^e dV \mathbf{T}^e}_{\mathbf{K}_F} \mathbf{z}_F - \underbrace{\sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \int_{V_0^e} \mathbf{N}^{eT} \rho_0^e dV \boldsymbol{\Gamma}^e \mathbf{g} + \mathbf{h}_{Ff}}_{\mathbf{h}_F} \right) = 0 \quad (6.7)$$

unter Beachtung der Nebenbedingung  $\mathbf{z}_F = \mathbf{J}_F \mathbf{y}_F + \bar{\mathbf{J}}_F \bar{\mathbf{z}}_F$

Daraus folgen die **Bewegungsgleichungen der gelagerten Struktur in den Koordinaten  $\mathbf{z}_F$**

$$\mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{z}}_F + \mathbf{K}_F \mathbf{z}_F = \mathbf{h}_F + \bar{\mathbf{h}}_F \quad \text{wo} \quad \mathbf{z}_F = \mathbf{J}_F \mathbf{y}_F + \bar{\mathbf{J}}_F \bar{\mathbf{z}}_F \quad (6.8)$$

$\bar{\mathbf{h}}_F$  sind die zu  $\mathbf{z}_F$  gehörenden Reaktionskräfte der Lagerung.

Die **reduzierten Bewegungsgleichungen** lauten

$$\boxed{\mathbf{M}_{Fy} \ddot{\mathbf{y}}_F + \mathbf{K}_{Fy} \mathbf{y}_F = \mathbf{h}_{Fy} \quad \text{mit} \quad \mathbf{M}_{Fy} = \mathbf{J}_F^T \mathbf{M}_F \mathbf{J}_F, \quad \mathbf{K}_{Fy} = \mathbf{J}_F^T \mathbf{K}_F \mathbf{J}_F, \quad \mathbf{h}_{Fy} = \mathbf{J}_F^T \mathbf{h}_F} \quad (6.9)$$

$$\text{Für die } \mathbf{f} = \bar{\mathbf{J}}_F^T \bar{\mathbf{h}}_F = \bar{\mathbf{J}}_F^T \mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{z}}_F + \bar{\mathbf{J}}_F^T \mathbf{K}_F (\mathbf{z}_F) \mathbf{z}_F - \bar{\mathbf{J}}_F^T \mathbf{h}_F \quad (6.10)$$

Einfache Dämpfungsmodelle werden hinzugefügt mit  $+\mathbf{D}_F \dot{\mathbf{z}}_F$ .

Die **Elementmatrizen** lauten somit

$$\begin{aligned} \text{Massenmatrix } \mathbf{M}^e &= \int_{V_0^e} \mathbf{N}^{eT} \rho_0^e \mathbf{N}^e dV, & \text{Steifigkeitsmatrix } \mathbf{K}^e &= \int_{V_0^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{H}^e \mathbf{B}^e dV \\ \text{Einflussmatrix bei Erdbeschleunigung } \mathbf{C}_t^e &= \int_{V_0^e} \mathbf{N}^{eT} \rho_0^e dV \end{aligned} \quad (6.11)$$

Die **linearen Systemmatrizen der gesamten freien Struktur** (ohne Randbedingungen) berechnet man aus:

$$\begin{aligned} \text{Massenmatrix } \mathbf{M}_F &= \sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \mathbf{M}^e \mathbf{T}^e, & \text{Steifigkeitsmatrix } \mathbf{K}_F &= \sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{T}^e \\ \text{Einflussmatrix bei Erdbeschleunigung } \mathbf{C}_{Ft} &= \sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \mathbf{C}_t^e \mathbf{T}^e \\ \text{Gesamt - Lastvektor } \mathbf{h}_F &= \mathbf{C}_{Ft} \mathbf{g} + \mathbf{h}_{Ff} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Beachte: Erdbeschleunigung  $\mathbf{g}$  ist eine negative Linearbeschleunigung  $\mathbf{a}_{\text{Ref}}$  des Referenzsystems.

Man könnte noch weitere Lasten sich vorstellen, z.B. Fliehkräfte infolge Rotationen, Drucklasten an der Oberfläche, Vorspannungen, Vordehnungen etc.. Letztendlich müssen alle Lasten auf den Knotenlastvektor  $\mathbf{h}_F$  umgerechnet und dort aufsummiert werden.

Würde man die **geometrische Nichtlinearität** der Verzerrungen in (3.10) beachten, erhält man nichtlineare Gleichungen, die für große Verformungen brauchbar sind. Das Materialgesetz (3.20) ist dabei immer noch linear. Auch könnte man ein nichtlineares Materialgesetz (**physikalische Nichtlinearität**) beachten, was für plastisches Verhalten und z.B. für Kunststoffe notwendig ist. In diesen Fällen ergibt sich eine Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_F(\mathbf{z}_F)$ .

**Übung 6.2:** Zeige auf, wie sich die lineare Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_F$  berechnet.

## 6.3 Problemklassen und Lösungsansätze

Problemklasse	Gleichungen	Lösungsverfahren
• Lineare Statik	lineare, gewöhnliche Gleichungen $\mathbf{K}_F \mathbf{z}_F = \mathbf{h}_F + \bar{\mathbf{h}}_F,$ $\mathbf{z}_F = \mathbf{J}_F \mathbf{y}_F + \bar{\mathbf{J}}_F \bar{\mathbf{z}}_F$	Linearer Gleichungslöser wie Cholesky Verfahren
• Lineare Dynamik	lineare Differentialgleichungen, homogen oder inhomogen $\mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{z}}_F + \mathbf{D}_F \dot{\mathbf{z}}_F + \mathbf{K}_F \mathbf{z}_F = \mathbf{h}_F + \bar{\mathbf{h}}_F,$ $\mathbf{z}_F = \mathbf{J}_F \mathbf{y}_F + \bar{\mathbf{J}}_F \bar{\mathbf{z}}_F$	Eigenwertberechnung nach Housholder Numerische Integration nach Newmark
• Nichtlineare Statik	nichtlineare, gewöhnliche Gln. $\mathbf{K}_F(\mathbf{z}_F) \mathbf{z}_F = \mathbf{h}_F + \bar{\mathbf{h}}_F,$ $\mathbf{z}_F = \mathbf{J}_F \mathbf{y}_F + \bar{\mathbf{J}}_F \bar{\mathbf{z}}_F$	Newton-Raphson Iteration mit Cholesky Verfahren
• Nichtlineare Dynamik	nichtlineare Differentialgleichungen $\mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{z}}_F + \mathbf{D}_F \dot{\mathbf{z}}_F + \mathbf{K}_F(\mathbf{z}_F) \mathbf{z}_F = \mathbf{h}_F + \bar{\mathbf{h}}_F,$ $\mathbf{z}_F = \mathbf{J}_F \mathbf{y}_F + \bar{\mathbf{J}}_F \bar{\mathbf{z}}_F$	Numerische Integration nach Newmark mit Iteration

### Merke:

1. Statiklösungen sind so gut, wie die Elemente den exakten Verzerrungsverlauf und damit den Spannungsverlauf beschreiben.
2. Eigenfrequenzen sind i.a. nur im ersten Drittel zu verwenden, die oberen sind zu hoch.  
Die Eigenfrequenzen werden von oben her an die wahren Werte angenähert.

Mit diesen Angaben können Sie in Maple / Mathematica / Matlab  
ein FEM-Programm für ebene Balkenstrukturen schreiben!

Setzen Sie ein kommerzielles FEM-Programm (z. B.. ANSYS) ein und prüfen Sie die Ergebnisse  
nach.

Wählen Sie andere finite Elemente und vergleichen Sie die Resultate.

## 6.4 Die Elementmatrizen ebener Balkenelemente

Wir benutzen die Verformungsgrößen, Element-Knotenkoordinaten und Interpolationsmatrix aus Abschnitt 5.3. Es gelten somit (5.7) und (5.8) als

$${}^e \mathbf{u}(\xi, t) = \begin{pmatrix} u_1(\xi, t) \\ u_2(\xi, t) \end{pmatrix} = \mathbf{N}^e(\xi) \mathbf{z}^e(t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{z}^e = (u_A \quad v_A \quad \vartheta_A \quad u_B \quad v_B \quad \vartheta_B)^T, \quad \xi = \frac{x}{\ell}, \quad \xi \in \{0, 1\}$$

Ist  $\ell^e$  (m) die Länge eines Elements,

$A^e$  (m<sup>2</sup>) der Querschnitt und

$\rho_0^e$  (kg/m<sup>3</sup>) die Massendichte im Referenzzustand,

so gilt mit (6.6) für das Massenintegral in (6.11)

$$\int_{V_0^e} \rho_0^e(\dots) dV = \rho_0^e A^e \int_0^{\ell^e} (\dots) dx = \rho_0^e A^e \ell^e \int_0^1 (\dots) d\xi = m^e \int_0^1 (\dots) d\xi, \quad \text{wo} \quad (6.13)$$

$$\rho_0^e A^e \ell^e = m^e \quad \text{die Elementmasse ist.} \quad (6.14)$$

Aus (6.11) mit (6.13), (6.14) berechnet man die **Element-Massenmatrix**

$$\mathbf{M}^e = m^e \int_0^1 \mathbf{N}^{eT}(\xi) \mathbf{N}^e(\xi) d\xi = \frac{m^e}{420} \begin{bmatrix} 140 & & & & & \\ 0 & 156 & & & & \\ 0 & 22\ell^e & 4\ell^{e2} & & & \\ 70 & 0 & 0 & 140 & & \\ 0 & 54 & 13\ell^e & 0 & 156 & \\ 0 & -13\ell^e & -3\ell^{e2} & 0 & -22\ell^e & 4\ell^{e2} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (6.15)$$

$$\mathbf{C}_t^{eT} = m^e \int_0^1 \mathbf{N}^e(\xi) d\xi = \frac{m^e}{12} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & \ell^e & 0 & 6 & -\ell^e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Mit der Verzerrungsmatrix  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  und Spannungsmatrix  $\boldsymbol{\sigma}^e$  sowie der Hooke-Matrix  $\mathbf{H}^e$ , (5.5), (5.6)

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^e \\ \kappa_3^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2'' \end{pmatrix} = \mathbf{B}^e \mathbf{z}^e, \quad \mathbf{B}^e(\xi) = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{1*}'(\xi) \\ \mathbf{N}_{2*}''(\xi) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}^e = \begin{pmatrix} f_1^e \\ m_3^e \end{pmatrix} = \mathbf{H}^e \boldsymbol{\varepsilon}^e, \quad \mathbf{H}^e = \begin{pmatrix} \mathcal{E}A & 0 \\ 0 & \mathcal{E}J_{33} \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

findet man die **lineare Element-Steifigkeitsmatrix**

$$\mathbf{K}^e = \int_{V_0^e} \mathbf{B}^{eT}(\xi) \mathbf{H}^e \mathbf{B}^e(\xi) dV = \frac{\mathcal{E}^e}{\ell^{e3}} \begin{bmatrix} A^e \ell^{e2} & & & & & \\ 0 & 12J_{33}^e & & & & \\ 0 & 6J_{33}^e \ell^e & 4J_{33}^e \ell^{e2} & & & \\ -A^e \ell^{e2} & 0 & 0 & A^e \ell^{e2} & & \\ 0 & -12J_{33}^e & -6J_{33}^e \ell^e & 0 & 12J_{33}^e & \\ 0 & 6J_{33}^e \ell^e & 2J_{33}^e \ell^{e2} & 0 & -6J_{33}^e \ell^e & 4J_{33}^e \ell^{e2} \end{bmatrix} \quad \text{sym.} \quad (6.18)$$

**Übung 6.3:** Schreibe ein Programm zur Berechnung der Elementmatrizen des 2D-Balkenelements.



## 6.5 FEM-Analyse einer ebenen Balkenstruktur

Für die in Bild 6.13 gezeigten Winkelstruktur sollen die Bewegungsgleichungen aufgestellt und die lineare Statik sowie die Eigenfrequenzen berechnet werden.

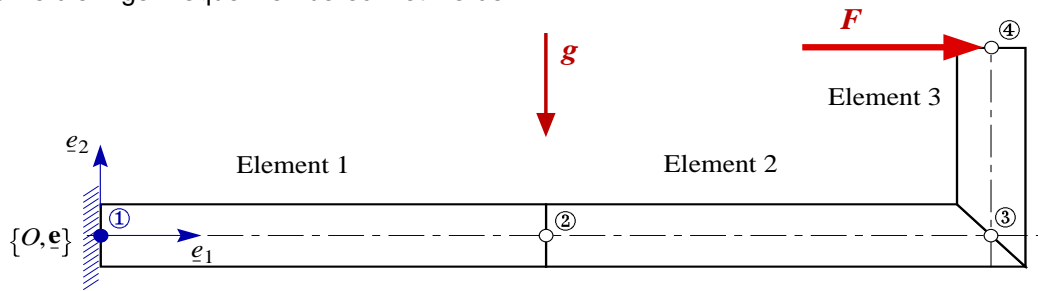


Bild 6.13: Eingespante ebene Winkelstruktur mit 3 Elementen und 4 Knoten unter Belastungen.

Der Zustandsvektor der freien Struktur, (6.36), hat die 12 Elemente,

$$\mathbf{z}_F = \left[ u^{(1)} \quad v^{(1)} \quad \vartheta^{(1)} \mid u^{(2)} \quad v^{(2)} \quad \vartheta^{(2)} \mid u^{(3)} \quad v^{(3)} \quad \vartheta^{(3)} \mid u^{(4)} \quad v^{(4)} \quad \vartheta^{(4)} \right]^T,$$

der Zustandsvektor der gelagerten Struktur

$$\mathbf{y}_F = \left[ u^{(2)} \quad v^{(2)} \quad \vartheta^{(2)} \mid u^{(3)} \quad v^{(3)} \quad \vartheta^{(3)} \mid u^{(4)} \quad v^{(4)} \quad \vartheta^{(4)} \right]^T, \text{ da } \bar{\mathbf{z}}_F = \left[ u^{(1)} \quad v^{(1)} \quad \vartheta^{(1)} \right]^T = \mathbf{0}.$$

**Übung 6.4:** Aufbauend auf die Ergebnisse in Übung 6.3 bestimme die drei Transformationsmatrizen  $\mathbf{T}^e$  sowie die Systemmatrizen

$$\mathbf{M}_F = \sum_{e=1}^4 \mathbf{T}^{eT} \mathbf{M}^e \mathbf{T}^e, \quad \mathbf{K}_F = \sum_{e=1}^4 \mathbf{T}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{T}^e, \quad \mathbf{C}_{Ft} = \sum_{e=1}^4 \mathbf{T}^{eT} \mathbf{C}_t^e, \quad \mathbf{h}_F$$

unter Verwendung eines ComputerMathe-Programms.

Die Geometriedaten und Materialdaten sind:

Element 1 und 2:

Länge = 1 m, Höhe = 0.009 m, Breite(z) = 0.2 m, Dichte  $\rho = 3000 \text{ kg/m}^3$ ,  $E = 7 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ .

Element 3:

Länge = 0.4 m, Höhe = 0.0095 m, Breite(z) = 0.2 m, Dichte  $\rho = 7895 \text{ kg/m}^3$ ,  $E = 21 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ .

**Übung 6.6:** Mit Hilfe der in Übung 6.5 ermittelten Systemmatrizen berechne aus der linearen Statik die Verformungen infolge  $\mathbf{g} = (0 \quad -9.81 \quad 0)^T \text{ m/s}^2$  und  $F = -200 \text{ N}$ .

Ermittle außerdem die Lagerreaktionen

$$\bar{\mathbf{h}}_F = \left[ F_1^{(1)} \quad F_2^{(1)} \quad L_3^{(1)} \mid 0 \quad 0 \quad 0 \mid 0 \quad 0 \quad 0 \mid 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T \quad \text{bzw.} \quad \bar{\mathbf{f}} = \left[ F_1^{(1)} \quad F_2^{(1)} \quad L_3^{(1)} \right]^T$$

und die Schnittgrößen im Winkel (Spannungen elementweise  $\boldsymbol{\sigma}^e = \begin{pmatrix} f_1^e \\ m_3^e \end{pmatrix} = \mathbf{H}^e \boldsymbol{\epsilon}^e$ ).

**Übung 6.7:** Mit Hilfe der in Übung 6.4 ermittelten Systemmatrizen berechne aus der linearen Dynamik die Eigenfrequenzen und Eigenformen des Winkels.