

Skriptum zur Vorlesung

Modellbildung und Simulation mit Praktikum

Teil III

—

Einführung in die Finite Elemente Methode

Prof. Dr. Oskar Wallrapp



Fakultät Feinwerk- und Mikrotechnik, Physikalische Technik

Version SS 2009 – V1 – 01.06.09

Hinweise:

Dieses Skriptum dient der Ergänzung und als Nachschlagewerk, ersetzt jedoch nicht den Besuch der Vorlesung und die Bearbeitung der vorgeschlagenen und weiterer Übungsaufgaben.

Verbesserungs- und Korrekturvorschläge seitens der Leserschaft werden vom Autor stets begrüßt.

Das vorliegende Dokument unterliegt mit allen seinen Teilen dem Urheberrecht. Eine Verwendung außerhalb der durch das Urheberrecht vorgegebenen Grenzen ist strafbar. Insbesondere sind die Vervielfältigung, die Übersetzung, die Ablichtung und (Mikro-) Verfilmung sowie die Speicherung und Bearbeitung in elektronischen Systemen ohne ausdrückliche schriftliche Genehmigung des Autors unzulässig.

Inhalt Teil III: Einführung in die FEM

1	Übersicht Finite Elemente Methode	1
1.1	Problemstellung	1
1.2	Beispiele aus der Strukturmechanik	3
2	Grundgleichungen des Euler-Bernoulli-Balkens.....	5
2.1	Modellannahmen	5
2.2	Verzerrungsmaße, Spannungsmaße, Modellparameter des 2D-Balkens	7
2.3	Elastisches Potential und Jourdain'sches Prinzip	10
3	Die Finite-Elemente-Approximation.....	11
3.1	Ansatzfunktionen	11
3.2	Das Finite Elemente und Interpolationsfunktionen	12
3.3	FE-Ansatz für das ebene Balkenelement	15
4	Die FE-Struktur und deren Bewegungsgleichungen	16
4.1	Globale Koordinaten und Zustandsvektor	16
4.2	Die Bewegungsgleichungen	17
4.3	Problemklassen und Lösungsansätze	19

Quellenangaben und weiterführende Literatur

- Bathe, K. J. (1986). Finite-Elemente-Methoden. Berlin, Springer-Verlag.
- Courant, R. and D. Hilbert (1968). Methoden der mathematischen Physik. Berlin, Springer-Verlag.
- Knothe, K. and H. Wessels (1999). Finite Elemente. Berlin, Springer-Verlag.
- Link, M. (1989). Finite Elemente in der Statik und Dynamik. Stuttgart, B. G. Teubner.
- Schwertassek, R. and O. Wallrapp (1999). Dynamik flexibler Mehrkörpersysteme. Braunschweig, Friedr. Vieweg Verlag.
- Wallrapp, O. and S. Wiedemann (2002). "Simulation of Deployment of a Flexible Solar Array." Multibody System Dynamics 7: 101-125.
- Zienkiewicz, O. C. (1984). Methode der finiten Elemente. München, Carl Hanser Verlag.

1 Übersicht Finite Elemente Methode

1.1 Problemstellung

In der Technischen Mechanik wurden Modell besprochen, die es erlauben, die Spannungen und Verformungen eines Bauteils infolge äußerer Lasten analytisch zu berechnen. Das war aber nur für einfache Modelle möglich, wie den homogenen Zugstab oder den homogenen Balken.

Wir erinnern uns: Für den einseitig eingespannten Zugstab mit der Kraft F am Ende gilt Abb. 1.1.

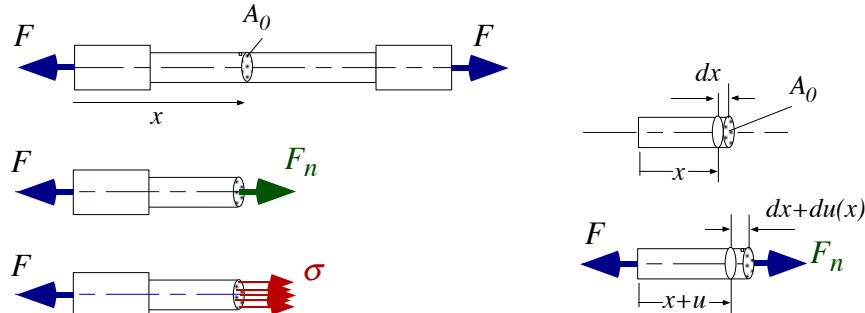


Bild 1.1: Zugstab mit Normalkraft F_n und Normalspannung σ und Stabverlängerung u .

Für die Dehnung von geraden Stäben oder Balken werden folgende **Annahmen** getroffen:

1. Der Querschnitt ist symmetrisch
2. Die Belastung greift im Flächenschwerpunkt der Stabachse an und wirkt nur in x -Richtung. Die Normalspannung ist für die gesamte Fläche gleich.
3. Der Belastungszustand ist von allen anderen Belastungen entkoppelt und liefert nur eine Normalkraft F_n .
4. Die Querschnitte bleiben eben und parallel zu einander. Sie verschieben sich nur in x -Richtung.

Die Normalkraft $F_n(x)$ am Ort x kann auf die Fläche A_0 im Referenzzustand des Körpers (Fläche im unverformten Zustand) bezogen werden. Somit gilt für die

$$\text{Normalspannung } \sigma(x) = \frac{F_n(x)}{A_0(x)} \quad (1.1)$$

Für ein Element der Referenzlänge dx und der aktuellen Länge $dx + du(x)$ (Bild 1.1), wo u die Verlängerung des Stabes an der Stelle x sein soll, findet man bei kleinen Dehnungen

$$\text{Dehnung } \varepsilon_x = \frac{(dx + du) - dx}{dx} = \frac{\partial u(x)}{\partial x} = u'(x) \quad (1.2)$$

$$\text{Dehnungsgleichung } \sigma(x) = E \varepsilon_x \Rightarrow \boxed{E A_0 u'(x) = F_n(x)} \quad (1.3)$$

$u_0 = u(x=0)$ ist die **Randauslenkung** in x -Richtung an der Stelle $x = 0$.

Ist der Stab eingespannt, gilt $u_0 = 0$.

Glg. (1.3) stellt eine partielle Dgl. dar, da wir bez. dem Ort x differenzieren.

Nun nehmen wir die Massenträgheit des Stabes mit der Dichte ρ hinzu und fragen, wie schwingt der Stab. Die **Bewegungsgleichung** für den einseitig eingespannten, homogenen Stab lautet

$$E A_0 u''(x,t) - \rho A_0 \ddot{u}(x,t) = 0 \quad \text{mit den Randbedgn. } u(0,t) = 0, \quad u'(L,t) = 0. \quad (1.4)$$

Das liefert nun eine Dgl. bezüglich Ort x und Zeit t . Wie löst man solche Probleme?

Nun machen wir einen **Separationsansatz** der Art

$$u(x,t) = U(x) q(t) \quad (1.5)$$

mit $U(x)$ als Ortsfunktion und $q(t)$ als Zeitfunktion, den wir als Faktor für die Ortsfunktion ansehen können. Glg. (1.5) in (1.4) eingesetzt liefert zwei Gleichungen, die durch einen Faktor ω gekoppelt sind:

$$\frac{E A_0 U''(x)}{\rho A_0 U(x)} = \frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = -\omega^2 \Rightarrow \beta^2 = \omega^2 \frac{\rho A_0}{E A_0} \quad \text{als Eigenwerte,} \quad (1.6)$$

$$U''(x) + \beta^2 U(x) = 0 \quad \text{und} \quad \ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0, \quad \text{Eigenfrequenz } \omega = \sqrt{\beta^2 \frac{E}{\rho}}$$

Die Gleichung in $U(x)$ kann gelöst werden und liefert die Eigenwerte $\beta_i = (2i - 1) \pi / (2L)$ und Eigenfunktionen $U_i(x) = A_i \sin(\beta_i x)$, für $i = 1 \dots \infty$. ω_i sind die Eigenfrequenzen in rad/s, $f_i = \omega_i / (2\pi)$ in Hz.

Diese Eigenfunktionen und Eigenwerte gelten genau für einen Satz von Randbedingungen (1.4)!

Den Weg der Separation können wir einschlagen, wenn der Körper homogen ist, das heisst, über die gesamte Länge keine Änderungen aufweist und gerade ist. Weiter wird gefordert, dass die Belastung eine Separation erlaubt und die Randbedingungen ein lösbares Eigenwertproblem liefern. Das ist aber in der Regel nicht der Fall. Was kann man dann tun?

Antwort: Aufteilen in Bereiche, die näherungsweise konstant sind

=> Die **finiten Elemente** (endlich große Elemente) sind geboren!

Für sie wird ein Separationsansatz aufgestellt, wobei die Ortsfunktionen $U(x)$ als bekannte Ansatzfunktionen eingebracht werden. $q(t)$ sind dann die Gewichtungsfunktionen.

Die Methode der Aufteilung ist sehr alt, (Courant, 1922), siehe (Courant and Hilbert 1968), nur fehlten damals die Computer, die daraus resultierenden großen Gleichungssysteme zu lösen. Das wurde in den 60 Jahren nachgeholt. Die FEM-Programme wurden entwickelt. Es existiert reichlich Literatur, z.B. (Zienkiewicz 1984; Bathe 1986; Link 1989; Knothe and Wessels 1999).

Was wir hier für **Festigkeitsprobleme (Berechnung von Spannungen und Verformungen fester Körper)** in folge Belastungen (Kräfte und Momente) aufgezeichnet haben, lässt sich auch für andere ortsabhängige Probleme übertragen, wie z.B.

Temperaturfluss in Bauteilen

Strömungen von Medien (Gase und Flüssigkeiten)

Magnetfluss in Motoren,

u.a.

Was werden wir besprechen:

Grundgleichungen des Euler-Bernoulli-Balkens

Ritzansatz und Finite-Elemente-Approximation

FE-Struktur und Bewegungsgleichungen

Kleines FEM-Programm für ebene Balkensysteme mittels Maple oder Mathematica.

1.2 Beispiele aus der Strukturmechanik

Finite-Elemente-Systeme erhält man durch Aufteilung eines **Kontinuums** \mathcal{K} in geometrisch einfache Teilkörper, die **finiten Elemente**.

Bild 1.2 zeigt das Finite-Elemente-Modell einer halben Hüftendoprothese, in Bild 1.3 ist das Finite-Elemente-Modell eines Femurknochen zu sehen.

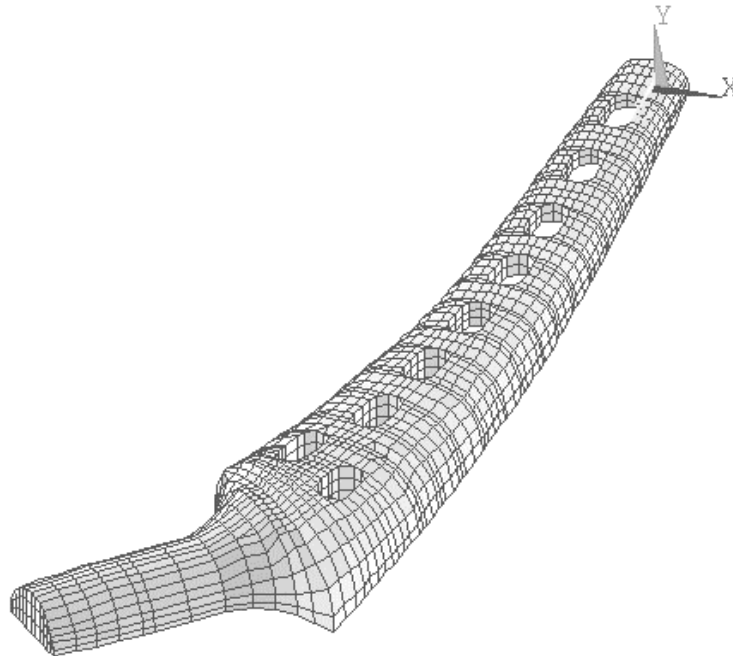


Bild 1.2: Finite-Elemente-Modell einer halben Hüftendoprothese.

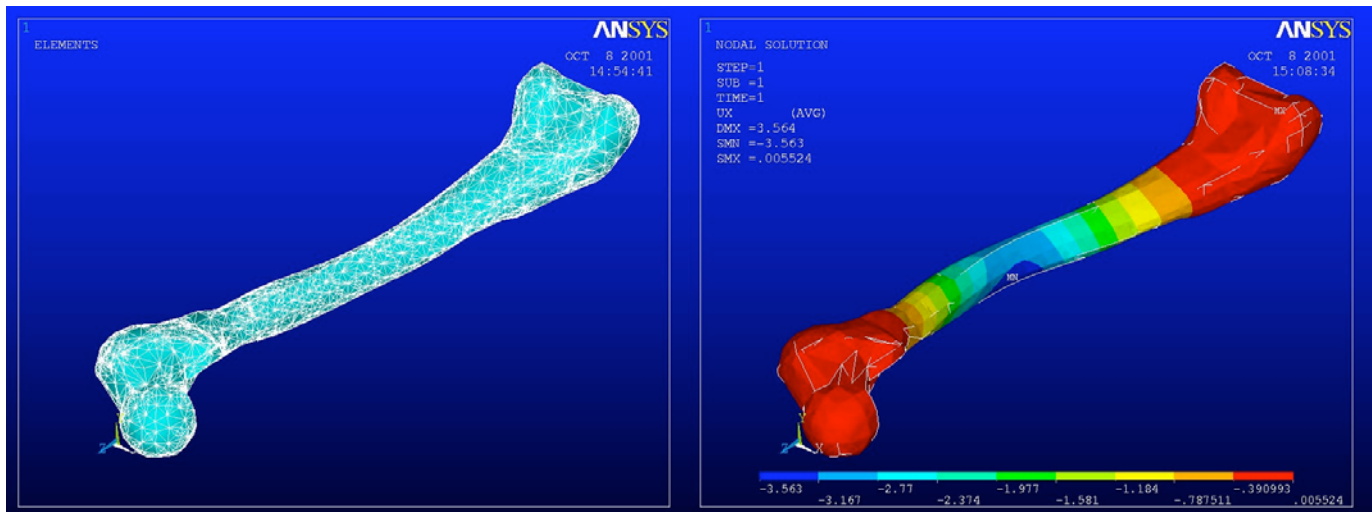


Bild 1.3: Finite-Elemente-Modell eines Femurknochen. (links FE-Netz, rechts Durchbiegung infolge mittiger Last)

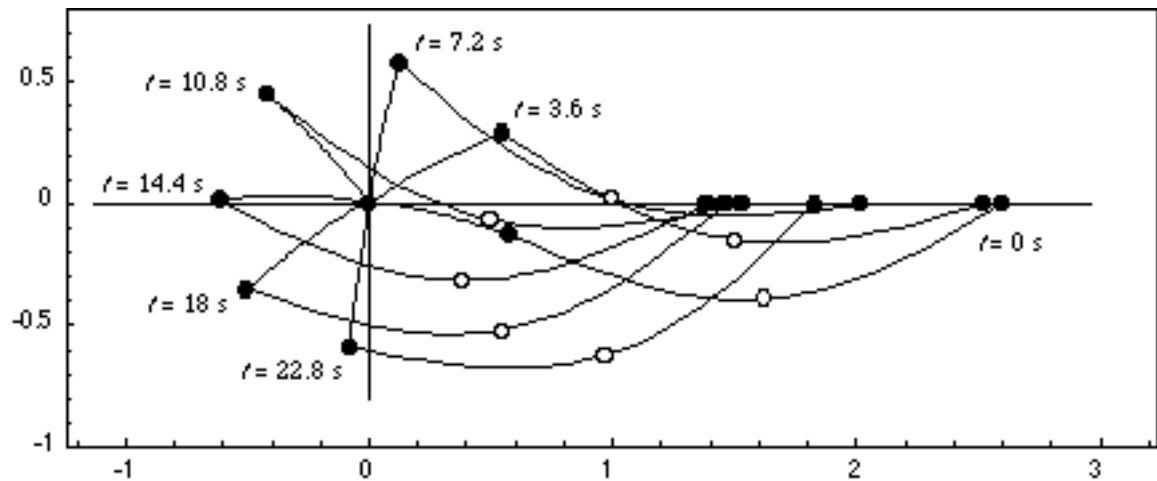


Bild 1.4: Schubkurbel mit elastischer Kurbel und Koppel, aus (Schwertassek and Wallrapp 1999)

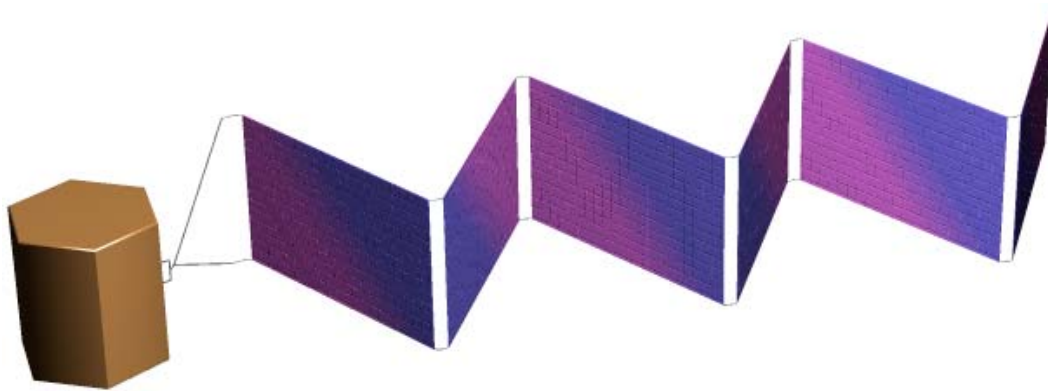


Bild 1.5: Satellit mit Joch und 6 Solar panels (Wallrapp and Wiedemann 2002)

2 Grundgleichungen des Euler-Bernoulli-Balkens

2.1 Modellannahmen

Das Balkenmodell (Bild 2.1) nach Euler-Bernoulli (um 1700) ist ein besonderes Modell der Kontinuumsmechanik. Im Sinne der klassischen Kontinuumsmechanik weist es anisotropisches Verhalten auf, da im Querschnitt keine Verformungen zugelassen werden, jedoch senkrecht dazu. Dann entspricht es einem Cosserat-Kontinuum, da wir Momente am Partikel berücksichtigen. Für schlanke Körper (Balken) ist dieses Modell zulässig.

Der Balken besteht aus starren Scheibenelementen, die elastisch verbunden sind (Bild 2.2), und hat somit nur eine materielle Koordinate – die 1 oder x -Achse längs der neutralen Faser. Die vier zulässigen Verformungen sind Dehnung in Längsrichtung, Biegung in 2 Querrichtungen und Torsion um die Längsachse.

Im 3D-Fall muss die Bewegung der Scheibenelemente zunächst geometrisch nichtlinear beschrieben werden. Sie erlauben Berechnungen für Knicken, Kippen, gekoppelte Biegungen etc. In den linearen Gleichungen können dann aber alle Verformungen entkoppelt betrachtet werden und zwar einzeln oder gesamt.

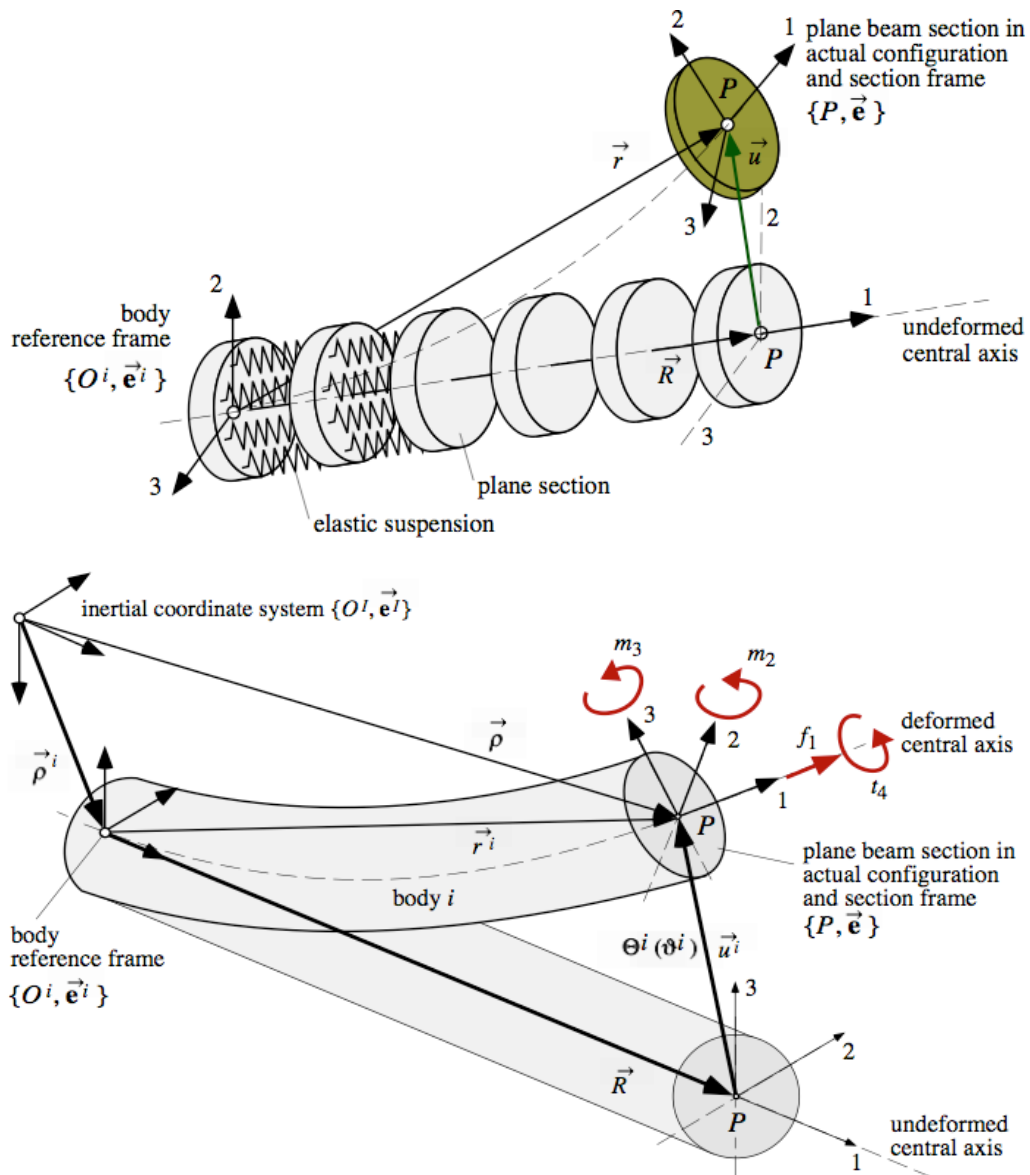


Abb 2.1: Das Scheibenmodell des Euler-Bernoulli-Balkens, mit Verschiebungen u^i und Verdrehungen ϑ^i am Ort R infolge der Schnittgrößen f_1, m_2, m_3, t_4 .

Wir definieren folgende Verschiebungen und Verdrehungen eines Scheibenelements am Ort $R_1 = x$ im Punkt P der neutralen Faser:

$$\text{Verschiebung } \mathbf{u}(x) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}^T, \quad (2.1)$$

$$\text{Verdrehung } \boldsymbol{\vartheta}(x) = \begin{pmatrix} \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 \end{pmatrix}^T, \quad (2.2)$$

als Drehwinkel der Orientierung von $\bar{\mathbf{e}} = \Theta(\boldsymbol{\vartheta}) \bar{\mathbf{e}}^i$ in der Drehfolge 1, 2, 3 mit $\Theta(\boldsymbol{\vartheta})$ als 3x3-Drehmatrix.

Für den schubstarren Balken sind die drei Verschiebungen u_1, u_2, u_3 und die Verdrehung ϑ_1 **unabhängige** Verformungsgrößen. Die Drehwinkel ϑ_2, ϑ_3 sind von u_2, u_3 **abhängige** Größen.

In der **x-y-Ebene** haben wir die Dehnung und Biegung des Balkens mit Verschiebungen u_1, u_2 . Der Drehwinkel ϑ_3 ist eine von u_2 abhängige Größe.

Weiter müssen wir **für eine reine Biegung in y-Richtung** folgendes annehmen:

1. Der Querschnitt ist symmetrisch bezüglich der y-Achse.
2. Die Belastungen greifen im Flächenschwerpunkt S der Stabachse an, in Form von Lasten in y-Richtung und Momente um die z-Achse.
3. Der Belastungszustand ist von allen anderen Belastungen entkoppelt und liefert nur die Schnittgrößen: Biegemoment $M_b = M$ und Querkraft $F_q = Q$. \Rightarrow keine Dehnung, keine Torsion.
4. Die Querschnitte des Balkens sind sehr dünn im Vergleich zu der Balkenlänge.
 \Rightarrow Die Scherung infolge der Querkraften wird vernachlässigt \Rightarrow schubstarrer Balken.
6. Die Querschnitte bleiben eben und verformen sich nicht ($A = A_0$). Sie stehen immer senkrecht zur Balkenachse. Jedes Scheibe der Länge Δx des Balkens wird nur in der x-y-Ebene verschoben und verdreht.
7. Die Balkenachse erfährt infolge der Biegung somit keine Dehnung \Rightarrow neutrale Faser.

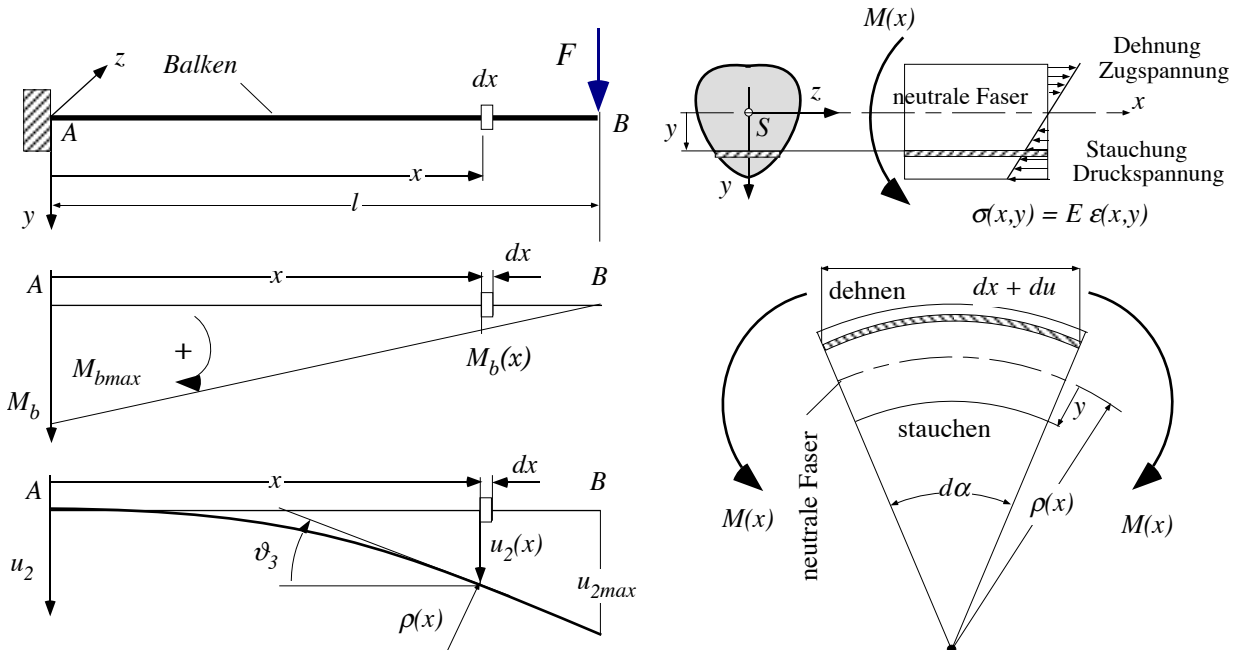


Abb. 2.2: Der 2-D-Biegebalken und seine Modellannahmen mit Krümmung $\kappa_3 = 1/\rho$.

2.2 Verzerrungsmaße, Spannungsmaße, Modellparameter des 2D-Balkens

Für Dehnung und Biegung des 2D-Balkens in der 1-2 bzw. x - y -Ebene verwenden wir die **Verzerrungsmaße**

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = (\varepsilon_1 \quad \kappa_3)^T. \quad (2.4)$$

Die Längsdehnung ε_1 ergibt sich aus der Änderung der Bogenlänge $s(x)$. Wir wenden die lineare Theorie an: (Gleichgewicht kann am unverformten System aufgestellt werden – Theorie 1. Ordnung).

$$\varepsilon_1 = s'(x) - 1, \quad \text{lin Theorie:} \quad \varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} = u_1' \quad (2.5)$$

Für die Krümmungen um die 3= z -Achse gilt

$$\kappa_3 = \vartheta_3', \quad \text{lin Theorie:} \quad \kappa_3 = u_2'' \quad (2.6)$$

Für den Drehwinkel gilt

$$\text{lin Theorie:} \quad \vartheta_3 = u_2' \quad (2.7)$$

Für kleine Verformungen (Bild 2.3) kann die **lineare Balkentheorie** angewandt werden. Ausnahme: Stabilitätsuntersuchungen; dort wird das Gleichgewicht am verformten System aufgeschrieben.

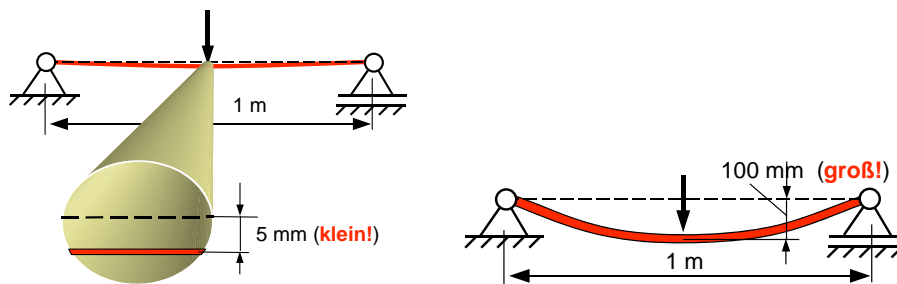


Bild 2.3: Was bedeuten kleine Verformungen (nur ein Anhaltswert)

Beim Balken verwendet man als "**Spannungsmaße**" die Schnittgrößen des Balkens. Im 2-Fall sind das die Normalkraft F_n , vgl. Abb. 1-1, und das Biegemoment M_b um die z -Achse, siehe Abb. 2-1.

Zwischen dem Verzerrungsmaßen und den Spannungsmaßen ist das **Materialgesetz** anzuwenden:

$$F_n(x) = \sigma_1(x) A, \quad \sigma_1(x) = E \varepsilon_1(x) \Rightarrow F_n(x) = E A \varepsilon_1(x) = E A u_1'(x). \quad (2.8)$$

$$M_b(x) = \int_A -y \sigma_1(x, y) dA, \quad \sigma_1(x, y) = E \varepsilon_1(x, y) = -y E \kappa_3 \Rightarrow M_b(x) = E J_{33} \kappa_3 = E J_{33} u_2''(x) \quad (2.9)$$

mit den **Materialparametern**

E den Elastizitätsmodul (N/mm^2)

A die Querschnittsfläche des Balkens (mm^2)

$J = J_{22} = \int_A y^2 dA$ das Flächenträgheitsmoment um die 3= z -Achse (mm^4)

$W_b = J/e_{\max}$ das Biege-Widerstandsmoment um die 3= z -Achse (mm^3)

Wir fassen zusammen:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{u}(x) &= \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}(x) = \begin{pmatrix} u_1'(x) \\ u_2''(x) \end{pmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{u}(x) \quad \text{where} \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_1^2 \end{pmatrix}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x} \\ \boldsymbol{\sigma}(x) &= \begin{pmatrix} F_n(x) \\ M_b(x) \end{pmatrix} = \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}(x) = \mathbf{H} \mathbf{L} \mathbf{u}(x) \quad \text{where} \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} EA & 0 \\ 0 & EJ_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}} \quad (2.10a)$$

Hierin sind: $\mathbf{u}(x)$ die Verschiebungen am Ort x , $\boldsymbol{\varepsilon}(x)$ die Verzerrungen, $\boldsymbol{\sigma}(x)$ die Schnittgrößen, \mathbf{H} die Material-Matrix und \mathbf{L} eine Operatormatrix der Ableitungen nach x .

Die Normalspannung $\sigma_n(x)$ infolge Dehnung und max. Biegespannung $\sigma_b(x)$ infolge Biegung ergibt sich dann aus

$$\sigma_n(x) = F_n(x) / A, \quad \sigma_b(x) = M_b(x) / W_b \quad (2.10b)$$

Übung 2.1 Bestimme die Geometrieparameter eines Balkens mit Vollkreisquerschnitt bei $d = 12$ mm.

Tabelle 2-1: Flächenträgheitsmoment (Flächenmomente 2. Ordnung), Einheit Länge⁴. (K. Kabus, Mechanik und Festigkeitslehre, Tabellen, Hanser Verlag, 2003)

Querschnitt	Flächenmoment 2. Grades	Widerstandsmoment
	$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{hb^3}{12}$	$W_b = \frac{bh^2}{6}$ $W_h = \frac{hb^2}{6}$
	$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64}$	$W_b = W_h = \frac{\pi d^3}{32}$
	$I_x = \frac{\pi a^3 b}{4}$ $I_y = \frac{\pi b^3 a}{4}$	$W_b = \frac{\pi a^2 b}{4}$ $W_h = \frac{\pi b^2 a}{4}$
	$I_x = I_y = \frac{\pi}{4} (D^4 - d^4)$ $\approx \frac{\pi}{4} D^4 (1 - e^4)$ where $e = \frac{d}{D}$	$W_b = W_h = \frac{\pi}{4} D^3 (1 + e^2)$
	$I_x = \frac{bh^3}{36}$	$W_b = \frac{bh^2}{24}$ $W_h = \frac{bh^2}{8}$
	$I_x = I_y = \frac{5\sqrt{3}}{16} a^4$ $= 0,5413 a^4$	$W_b = W_h = 0,5413 a^3$
	$I_x = \frac{h^3}{12} \left(\frac{a+b}{3} + \frac{ab}{h^2} \right)$	$W_b = \frac{h^2}{6} \left(\frac{a+b}{3} + \frac{ab}{h^2} \right)$

2.3 Elastisches Potential und Jourdain'sches Prinzip

Das elastische Potential U und die innere virtuelle Leistung δP_i des 2D-Balkens lauten mit (2.8), (2.9), (2.10)

$$U = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(E A \varepsilon_1^2 + E J_{33} \kappa_3^2 \right) dx, \quad (2.11)$$

$$\delta P_i = - \int_0^\ell \left(\delta \dot{\varepsilon}_1 E A \varepsilon_1 + \delta \dot{\kappa}_3 E J_{33} \kappa_3 \right) dx = - \int_0^\ell \delta \dot{\mathbf{\varepsilon}}^T \mathbf{H} \mathbf{\varepsilon} dx = - \int_0^\ell \delta \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{L}^T \mathbf{H} \mathbf{L} \mathbf{u} dx. \quad (2.12)$$

Nach dem Prinzip der virtuellen Leistungen (Jourdain'sches Prinzip) muss die Summe aller virtuellen Leistungen der eingepprägten Kräfte, Momente und Spannungen am Körper (oder am MKS) verschwinden.

Wir nehmen Volumenkräfte, z.B. die Gewichtskraft, Einzelkräfte und Momente am Punkten des Balkens, sowie die verteilten Trägheitskräfte und inneren Kräfte an. Für diese eingepprägten Kraftgrößen lautet das Jourdain'sches Prinzip

$$\begin{aligned} & \delta P_i + \delta P_t + \delta' P_a = 0 \quad \text{mit} \\ & \text{virtuelle Leistung d. Trägheitskräfte} \quad \delta P_t = - \int_{V_0} \delta \mathbf{v}^T \mathbf{a} \rho_0 dV_0 = - A_0 \int_0^\ell \delta \dot{\mathbf{u}}^T \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} dx \\ & \text{virtuelle Leistung d. äußeren Kräfte} \quad \delta' P_a = \int_{V_0} \delta \mathbf{v}^T \mathbf{k}_0 dV_0 + \int_{A_p} \delta \mathbf{v}^T \mathbf{p}_0 dA_p = A_0 \int_0^\ell \delta \dot{\mathbf{u}}^T \rho_0 \mathbf{g} dx + \sum_k \left(\delta \dot{\mathbf{u}}_k^T \mathbf{F}_k + \delta \dot{\vartheta}_k^T M_k \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Hierin sind:

$\delta \mathbf{v} = \delta \dot{\mathbf{u}}$ ist die absolute virtuelle Geschwindigkeit des Partikels P

$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{u}}$ ist absolute Beschleunigung (m/s²) des Partikels P

\mathbf{k}_0 ist die Volumenkraftdichte (N/m³) an dV_0 (z.B. infolge Erdbeschleunigung \mathbf{g})

\mathbf{p}_0 ist die Oberflächenkraftdichte (N/m²) an dA_p

ρ_0 ist die Massendichte (kg/m³) in der Referenzkonfiguration (Index 0)

A_0 ist der Balken-Querschnitt (m²)

V_0 ist das Volumen (m³)

A_p ist die Oberfläche der möglichen Belastungen (m²)

\mathbf{F}_k ist eine Einzelkraft am Ort k (N) und

M_k ist ein Einzelmoment am Ort k (Nm) .

Hinweis: Alle materiellen Größen beziehen sich auf den unverformten Zustand, deshalb Index 0!

Die virtuelle Leistung wird hier bevorzugt, weil sich hiermit Verschiebungsansätze leichter einzubringen sind, vgl. Kap. 3.

Glg. (2.13) enthält gleichzeitig die dynamischen Randbedingungen (also die Belastungen) an der Oberfläche.

Die virtuellen Geschwindigkeiten müssen den geometrischen Randbedingungen (Abschn. 1.1) genügen.

3 Die Finite-Elemente-Approximation

3.1 Ansatzfunktionen

Die Variationsgleichung der virtuellen Leistungen (2.13) beinhaltet Ableitungen nach der Zeit t (wegen der Beschleunigung \mathbf{a} der Partikel am Ort P) sowie Ableitungen nach dem Ort x (wegen der Berechnung der Verzerrungen $\boldsymbol{\epsilon}$, siehe (2.12)).

Eine analytische Lösung solcher partieller Differentialgleichungen ist für einfache Fälle mit Hilfe des Separationsansatzes möglich, vgl. Abschn. 1.1. Dabei wird die Gleichung in eine zeitabhängige und eine ortsabhängige Gleichung getrennt, (Schwertassek and Wallrapp 1999), Abschn. 5.1.

Anstelle der exakten Lösung der ortsabhängigen Gleichung kann man einen **Ritzansatz** anwenden, (Schwertassek und Wallrapp 1999), Abschn. 5.1. Stellt der Ansatz ein vollständiges Funktionensystem dar und erfüllt dieser die Randbedingungen, so konvergiert die Lösung gegen die wahre Lösung. Für den gesamten Körper könnte man sich z.B. Funktionen $\boldsymbol{\Phi}(x)$, gewichtet mit noch unbekannten Faktoren \mathbf{q} , ausdenken, die die statischen und dynamischen Verformungen hinreichend genau beschreiben. \mathbf{q} sind somit die neuen Unbekannten, die **Zustandsgrößen** des Systems.

Folglich gilt für die Verschiebung \mathbf{u} und Verzerrung $\boldsymbol{\epsilon}$, bzw. virtuelle Verzerrungsgeschwindigkeiten (mit linearem **Ritzansatz**)

$$\mathbf{u}(x,t) = \boldsymbol{\Phi}(x) \mathbf{q}(t), \quad \dot{\mathbf{u}}(x,t) = \boldsymbol{\Phi}(x) \dot{\mathbf{q}}(t), \quad (3.1)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}(x,t) = \mathbf{L} \mathbf{u}(x,t) = \mathbf{L} \boldsymbol{\Phi}(x) \mathbf{q}(t) = \mathbf{B}(x) \mathbf{q}(t), \quad \delta \boldsymbol{\epsilon}(x,t) = \mathbf{B}(x) \delta \mathbf{q}(t). \quad (3.2)$$

$\mathbf{B}(x) = \mathbf{L} \boldsymbol{\Phi}(x)$ wird als Verzerrungsmatrix bezeichnet.

Von den Ansatzfunktionen wird gefordert, dass sie den kinematischen Randbedingungen genügen.

Die Integraldarstellung garantiert, dass auch die dynamischen Randbedingungen im Rahmen der durch die Wahl der Ansatzfunktionen gegebenen Freiheiten erfüllt werden!

Jeder Ansatz stellt eine Näherung der Lösung des Problems dar!

Wird für \mathbf{u} ein Ansatz eingebracht, so spricht man von der **Verschiebungsmethode**.

Man könnte auch für die Spannungen einen Ansatz aufstellen, dann nennt man das **Kraftmethode**.

Verwenden wir als Ansatzfunktionen eine endlich Zahl von Eigenfunktionen, vgl. Abschn. 1.1, so spricht man von der **Modalapproximation**

3.2 Das Finite Elemente und Interpolationsfunktionen

Für beliebig geformte Körper und Strukturen sind aber geeignete Funktionen nicht auffindbar. Deshalb der Gedanke, den Körper in eine endliche Zahl kleiner Elemente mit dem Volumen V_0^e – die **finiten Elemente** – zu unterteilen, für die ein einfacher Ansatz in Form eines einfachen Polynoms über den kleinen Bereich das Verformungsverhalten hinreichend genau beschreibt.

In Bild 3.1 ist ein Winkel dargestellt. Für den gesamten Winkel analytische Funktionen zu finden ist nicht möglich. Da der Winkel sehr schlank ist, könnte man ihn durch Balkenelemente modellieren und ihn unterteilen. Es werden 3 finite Balkenelemente mit 4 globalen Knoten gewählt.

Andere wichtige finite Elemente sind in Tabelle 3.1 dargestellt. Darüber hinaus bieten FEM-Programme, wie z.B. ANSYS ein Fülle von Elementen, deren Einsatz aber auch gelernt werden muss. Nicht jede Elementbeschreibung führt zu einem guten Ergebnis.

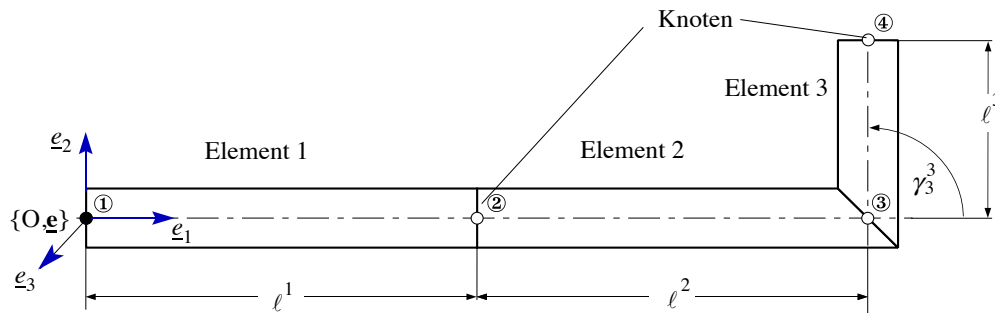


Abb. 3.1: Winkelstruktur mit 3 Elementen vom Typ *Balken* und 4 Knoten.

Zur Beschreibung der Partikelbewegung (Punkt P) im Element e sei auf Bild 3.2 verwiesen:

Mit der Orientierungsmatrix (Drehmatrix) $\Gamma^e(\gamma^e)$ und der Position \mathbf{R}^e des Element-Koordinatensystems bezüglich dem Körperbezugssystem und den materiellen Koordinaten \mathbf{x} im Element findet man

$$\text{Position von } P \quad \mathbf{r}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{R} + \mathbf{u}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{R}^e + \Gamma^{eT} \mathbf{x} + \Gamma^{eT} {}^e \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad (5.3)$$

mit $\tilde{\mathbf{e}}^e = \Gamma^e \tilde{\mathbf{e}}$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}^e + \Gamma^{eT} \mathbf{x}$ als die Position des Punktes im Referenzzustand und ${}^e \mathbf{u}$ als die Verschiebungen im Elementsystem.

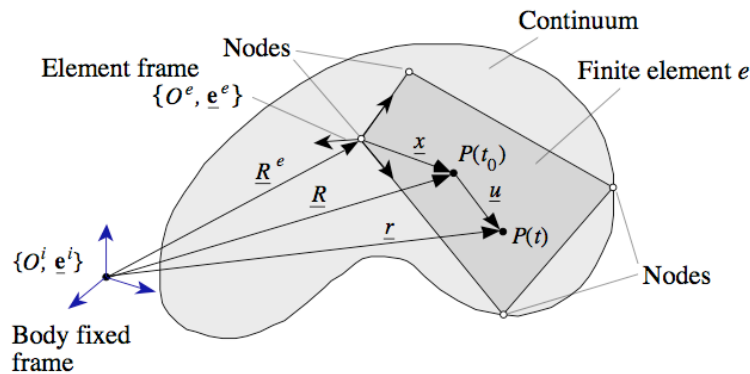


Bild 3.2: Allgemeine Definitionen eines finiten Elementes im elastischen Körper.

(Unterstrichenen bedeuten hier physikalische Vektoren)

Tabelle 3.1: Typen von Elementen und ihre spezifischen Größen. (Knothe und Wessels 1999)

Tragwerkstyp	Verschiebungsvektor \mathbf{u}	Belastungsvektor $\bar{\mathbf{p}}$	Schnittkraftvektor $\boldsymbol{\sigma}$	Verzerrungsvektor $\boldsymbol{\epsilon}$
Integrationsbereich	Bezeichnung(en)	Bezeichnung(en)	Bezeichnung(en)	Bezeichnung(en)
Einheit	Einheit(en)	Einheit(en)	Einheit(en)	Einheit(en)
Dreidimensionales Kontinuum	$\{u, v, w\}$	$\{\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}\}$	$\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}$	$\{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}$
Volumen	Verschiebungen	Volumenlasten	Normalspannungen Schubspannungen	Dehnungen Schubverzerrungen
m^3	m	N/m^3	N/m^2	1
Scheibe	$\{u, v\}$	$\{\bar{P}_x, \bar{P}_y\}$	$\{n_x, n_y, n_{xy}\}$	$\{\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}\}$
Fläche	Verschiebungen in der Bezugsfläche	Flächenlasten in der Bezugsfläche	Normalkräfte Schub	Dehnungen Schubverzerrung in der Bezugsfläche
m^2	m	N/m^2	N/m	1
Dehnstab	$\{u\}$	$\{\bar{p}\}$	$\{N\}$	$\{\epsilon\}$
Länge	Längsverschiebung	Längsbelastung	Normalkraft	Dehnung
m	m	N/m	N	1
Schubweiche Platte	$\{w, \beta_x, \beta_y\}$	$\{\bar{P}_z, \bar{P}_{nx}, \bar{P}_{ny}\}$	$\{m_x, m_y, m_{xy}, q_x, q_y\}$	$\{\kappa_x, \kappa_y, 2\kappa_{xy}, \gamma_{xx}, \gamma_{yz}\}$
Fläche	Querver-schiebung Querschnitts-neigungen	Querbe-lastung Momenten-belastungen	Biege-momente Drill-moment Quer-kräfte	Krümmungen Verwin-dung Schubver-zerrungen
m^2	m 1	N/m^2 Nm/m^2	Nm/m Nm/m N/m	1/m 1/m 1
Schubstarre Platte	$\{w\}$	$\{\bar{P}_z\}$	$\{m_x, m_y, m_{xy}\}$	$\{\kappa_x, \kappa_y, 2\kappa_{xy}\}$
Fläche	Querver-schiebung	Querbelastung	Biege-momente Drill-moment	Krümmungen Verwin-dung
m^2	m	N/m^2	Nm/m Nm/m	1/m 1/m
Schubweicher Balken	$\{w, \beta\}$	$\{\bar{P}_z, \bar{P}_m\}$	$\{M, Q\}$	$\{\kappa, \gamma\}$
Länge	Querver-schiebung Querschnitts-neigung	Querbe-lastung Momenten-belastung	Biege-moment Quer-kraft	Krümmung Schubver-zerrung
m	m 1	N/m Nm/m	Nm N	1/m 1
Schubstarrer Balken	$\{w\}$	$\{\bar{P}_z\}$	$\{M\}$	$\{\kappa\}$
Länge	Querver-schiebung	Querbe-lastung	Biege-moment	Krümmung
m	m	N/m	Nm	1/m

Die Ansatz- oder Interpolationsfunktionen für die Verschiebungen und Verdrehungen innerhalb eines Elements sind in der Regel lineare Polynome für Dehnungen und Scherungen bzw. kubische Polynome für Biegungen. Die Koeffizienten der Polynome (ähnlich den Gewichtungsfaktoren \mathbf{q} in (3.1)) kann man so ansetzen, dass sie eine physikalische Bedeutung erlangen, nämlich die Bewegungen der Elemente an den Knoten. Je nach Ansatz sind somit bestimmte Knotenbewegungen (Verschiebungsvektor in Tab. 3.1) zulässig.

Mit $\mathbf{N}^e(\mathbf{x})$ als Interpolationsmatrix findet man für die

$$\text{Verschiebungen im Element } e : \quad {}^e\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{z}^e(t), \quad (3.4)$$

wo \mathbf{z}^e die Knotenverschiebungen/-drehungen am Element e sind. Die Dimension von \mathbf{z}^e ist n_F^e . Der Index e sagt, dass die Koordinaten von \mathbf{z}^e und ${}^e\mathbf{u}$ in der Elementbasis gesehen werden.

Jedes Element hat Ränder, deren Bewegungen mit den Bewegungen des Nachbarelements übereinstimmen müssen – sogenannte Übergangs- oder Kompatibilitätsbedingungen. In der FE-Beschreibung werden diese Bedingungen nur an den Knoten gewährleistet. Ob Verschiebungen und Verdrehungen erfüllt werden, ist von der Interpolationsfunktion – und somit vom Elementtyp – abhängig.

Die Spannungen hingegen sind bei einem Ansatz (3.4) abgeleitete Größen und können somit am Übergang von einem Element zum nächsten nicht die gleichen Werte ausweisen. Es werden sich je nach Belastung an den Rändern Spannungssprünge ergeben.

Man sagt: die Spannungen werden nur im integralen Mittel erfüllt.

Merke: Je feiner das FE-Netz, desto besser werden die Übergangsbedingungen erfüllt und desto besser können Spannungssprünge reduziert werden.

Die Verzerrungen im Element e findet man, indem man (3.4) in (2.10) einsetzt:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{L} \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{z}^e(t) = \mathbf{B}^e(\mathbf{x}) \mathbf{z}^e(t), \text{ mit } \mathbf{B}^e = \mathbf{L} \mathbf{N}^e \text{ als Verzerrungsmatrix.} \quad (3.5)$$

Entsprechend gilt dann für die Spannungen

$$\boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}^e \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{H}^e \mathbf{L} \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{z}^e(t) = \mathbf{H}^e \mathbf{B}^e(\mathbf{x}) \mathbf{z}^e(t), \quad (3.6)$$

mit \mathbf{H}^e als Element-Materialmatrix, meist konstant im Bereich des Elements.

Die Interpolationsfunktionen sind so gewählt, dass sie auch zur Beschreibung von Starrkörperbewegungen geeignet sind. Eine Vorgabe der Knotenkoordinaten als z.B. translatorische Starrkörperbewegung muss alle inneren materiellen Punkte des Elements translatorisch bewegen. Gleichzeitig müssen die Verzerrungen im Element e null sein.

Zusammenfassung: Die Güte der FE-Approximation ist abhängig

1. von der Wahl der finiten Elemente und
2. von der Dichte der Elemente,

die das reale Verschiebungs- und Spannungsfeld eines Körpers beschreiben.

Das Elementmodell legt die möglichen Verformungen (Verschiebungen \mathbf{u} und Verdrehungen $\boldsymbol{\vartheta}$), die Interpolationsfunktionen (Matrix \mathbf{N}^e), Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ und Spannungen $\boldsymbol{\sigma}^e$, die Materialmatrix \mathbf{H}^e und die Elementkoordinaten \mathbf{z}^e fest.

Besitzt das Element auch Drehfreiheitsgrade (z.B. Torsion), ist ein zu (3.4) ähnlicher Ansatz anzugeben.

3.3 FE-Ansatz für das ebene Balkenelement

Das ebene Balkenelement mit der Länge ℓ hat die zwei Knoten A und B und sechs Knotenbewegungen: die zwei Verschiebungen u und v in 1- und 2-Richtung sowie die Verdrehung ϑ um die 3-Achse je Knoten, siehe Bild 3.3. n_F^e ist somit 6. Für \mathbf{x} gilt $\mathbf{x} = (x \ 0 \ 0)^T$

Die ebene Verschiebung im Inneren des Elements ist ${}^e\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$.

Die Interpolationsfunktion ist kubisch für die Biegung und linear für die Dehnung. Somit lautet die 2×6 -Interpolationsmatrix mit der dimensionslosen Länge $\xi = \frac{x}{\ell}$, $\xi \in \{0, 1\}$:

$$\mathbf{N}^e(\xi) = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1-3\xi^2+2\xi^3 & \ell(\xi-2\xi^2+\xi^3) & 0 & 3\xi^2-2\xi^3 & \ell(-\xi^2+\xi^3) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\text{für } {}^e\mathbf{u}(\xi, t) = \begin{pmatrix} u_1(\xi, t) \\ u_2(\xi, t) \end{pmatrix} = \mathbf{N}^e(\xi) \mathbf{z}^e(t) \text{ mit } \mathbf{z}^e = (u_A \ v_A \ \vartheta_A \ u_B \ v_B \ \vartheta_B)^T. \quad (3.8)$$

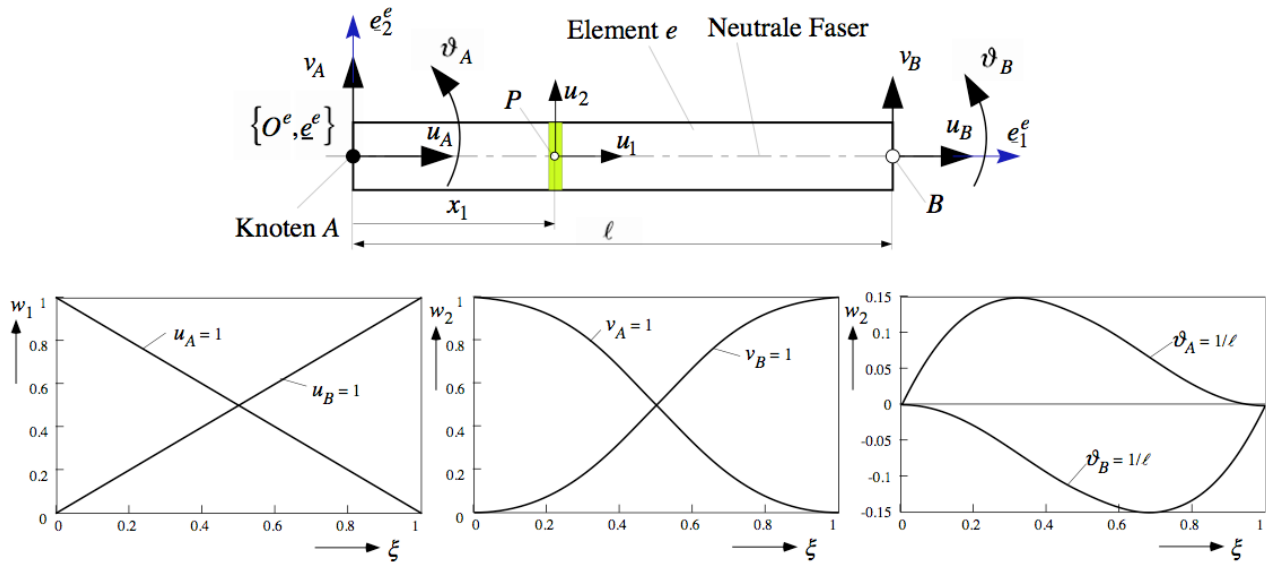


Abb. 3-3: Ein 2D-Balkenelement und seine Knotenkoordinaten und Interpolationsfunktionen. (Hinweis: Ersetze hierin w_i durch u_i)

Übung 3.2: Bestimme die Interpolationsfunktion für die Neigung ($u'_2 = \text{Winkel } \vartheta_3$).

4 Die FE-Struktur und deren Bewegungsgleichungen

4.1 Globale Koordinaten und Zustandsvektor

Alle Elemente, $e = 1, \dots, n_E$, bilden die finite Elemente-Struktur (FE-Struktur) des elastischen Körpers.

Die Bewegung der FE-Struktur wird durch die Bewegung der Knoten $k = 1, \dots, n_K$ des Körpers beschrieben, siehe Bild 4.1.

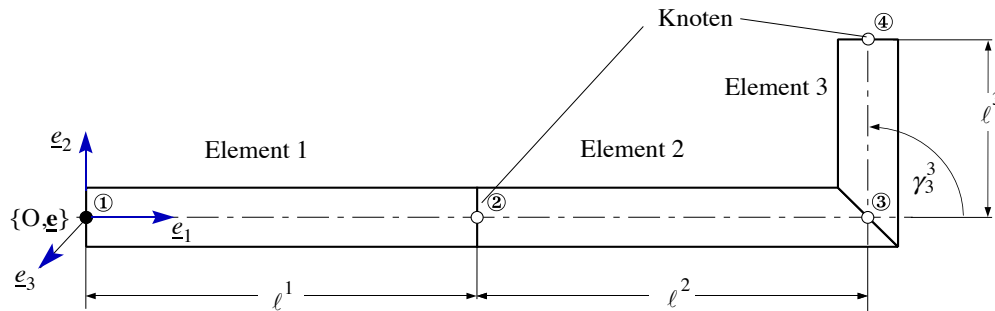


Abb. 4.1: Struktur mit 3 Elementen vom Typ *2D-Balken* und 4 Knoten.

Die Elemente 1 und 2 sind parallel zur Körperbasis, Element 3 ist um $\gamma_3^3 = +90^\circ$ gedreht.

(Index unten gibt die Drehrichtung vor, Index oben ist der Elementindex)

Die Gesamtheit aller Knotenbewegungen liefert den **Zustandsvektor der freien FE-Struktur**:

$$\text{Zustandsvektor der freien Struktur } \mathbf{z}_F = \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{z}_F^k \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{z}_F^k = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^k \\ \boldsymbol{\vartheta}^k \end{pmatrix}, \quad n_F = n_F^k n_K \quad (4.1)$$

n_F^k ist die Dimension von \mathbf{z}_F^k , deren Verschiebungen und Verdrehungen bez. der Körperbasis definiert werden.

Mit einer **Transformationsmatrix** \mathbf{T}^e lassen sich die Element-Knotenkoordinaten \mathbf{z}^e aus dem Zustandsvektor berechnen. \mathbf{T}^e beinhaltet somit die Zuordnung und die Drehung des Elements. Es gilt

$$\text{Element-Transformation } \mathbf{z}^e(t) = \mathbf{T}^e \mathbf{z}_F(t) \quad (4.2)$$

mit der Dimension für $\mathbf{T}^e = n_F^e \times n_F$. Daraus folgt

$$\boxed{\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{\Gamma}^{eT} \mathbf{N}^e(x) \mathbf{T}^e \mathbf{z}_F(t)} \quad (4.3)$$

Die Verschiebung aller Punkte x ist durch (4.3) gegeben.

Merke: Die Knotenbewegungen der freien FE-Struktur (Zustandsvektor \mathbf{z}_F) müssen mit den Knotenbewegungen der finiten Elemente (\mathbf{z}^e) verträglich sein.

Außerdem müssen die Randbedingungen erfüllt werden, vgl. Abb. 2.3.

Kinematische Bedingungen auf dem Rand A_u (Rand- oder Lagerbedingungen) bei vorgegeben Verschiebungen $\bar{\mathbf{u}}(x,t)$ lauten

$$\mathbf{u}(x,t) = \bar{\mathbf{u}}(x,t) \Rightarrow \text{Bedingungen am Knoten } k : \mathbf{z}_F^k = \bar{\mathbf{z}}_F^k = \begin{cases} 0 \\ \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mathbf{z}_F = \mathbf{J}_F \mathbf{y}_F + \bar{\mathbf{J}}_F \bar{\mathbf{z}}_F} \quad (4.4)$$

mit \mathbf{y}_F Lage-Zustandsgrößen der gelagerten FE-Struktur der Dimension $f = n_F - n_C$

Kinetische Bedingungen auf A_p (Belastungen am Rand) bei vorgegebenen Knotenlasten sind

$$\text{Kräfte/Momente am Knoten } k : \mathbf{h}_{Ff} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\mathbf{h}}_F^k \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

4.2 Die Bewegungsgleichungen

Aus dem Prinzip der virtuellen Leistungen (2.13) lassen sich für beliebige virtuelle Geschwindigkeiten die Bewegungsgleichungen ableiten. Dazu setzen wir die FE-modellabhängiger Gesetze ein, wie

die Interpolationsvorschrift für die Verschiebungen (3.4) ${}^e \mathbf{u}(x,t) = \mathbf{N}^e(x) \mathbf{z}^e(t)$,

das Materialgesetz für das Element liefert $\boldsymbol{\sigma}^e(x,t) = \mathbf{B}^e(x) \mathbf{z}^e(t)$

die Volumenkraftdichte infolge Gravitation \mathbf{g} und Oberflächen- / Knotenkräfte \mathbf{h}_{Ff}

sowie die Strukturdaten $\mathbf{R}^e, \Gamma^e, \mathbf{z}_F, \mathbf{h}_F, \mathbf{J}_F, \bar{\mathbf{J}}_F$ aller Element und den Lagerbedingungen.

Das Volumenintegral in (2.12) und (2.13) ergibt sich bei n_E finiten Elementen zu

$$\int dV_0 = \sum_{e=1}^{n_E} \int dV_0^e \quad (4.6)$$

Man erhält somit aus (2.13) mit den Lagerbedingungen (4.4) und Randbelastungen (4.5)

$$\delta \mathbf{z}_F^T \left(\underbrace{\sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \int_{V_0^e} \mathbf{N}^{eT} \rho_0^e \mathbf{N}^e dV \mathbf{T}^e \mathbf{z}_F}_{\mathbf{M}_F} + \underbrace{\sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \int_{V_0^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{H}^e \mathbf{B}^e dV \mathbf{T}^e \mathbf{z}_F}_{\mathbf{K}_F} - \underbrace{\sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \int_{V_0^e} \mathbf{N}^{eT} \rho_0^e dV \Gamma^e \mathbf{g}}_{\mathbf{C}_t^e} + \mathbf{h}_{Ff} \right) = 0 \quad (4.7)$$

unter Beachtung der Nebenbedingung $\mathbf{z}_F = \mathbf{J}_F \mathbf{y}_F + \bar{\mathbf{J}}_F \bar{\mathbf{z}}_F$.

Daraus folgen die **Bewegungsgleichungen der gelagerten Struktur in den Koordinaten \mathbf{z}_F**

$$\mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{z}}_F + \mathbf{K}_F \mathbf{z}_F = \mathbf{h}_F + \bar{\mathbf{h}}_F \quad \text{wo} \quad \mathbf{z}_F = \mathbf{J}_F \mathbf{y}_F + \bar{\mathbf{J}}_F \bar{\mathbf{z}}_F \quad (4.8)$$

$\bar{\mathbf{h}}_F$ sind die zu \mathbf{z}_F gehörenden Reaktionskräfte der Lagerung.

Die **reduzierten Bewegungsgleichungen** lauten

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{M}_{Fy} \ddot{\mathbf{y}}_F + \mathbf{K}_{Fy} \mathbf{y}_F &= \mathbf{h}_{Fy} \quad \text{mit} \\ \mathbf{M}_{Fy} &= \mathbf{J}_F^T \mathbf{M}_F \mathbf{J}_F, \quad \mathbf{K}_{Fy} = \mathbf{J}_F^T \mathbf{K}_F \mathbf{J}_F, \quad \mathbf{h}_{Fy} = \mathbf{J}_F^T \mathbf{h}_F \end{aligned}} \quad (4.9)$$

$$\text{Für die **Lagerkräfte** gilt} \quad \bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{J}}_F^T \bar{\mathbf{h}}_F = \bar{\mathbf{J}}_F^T \mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{z}}_F + \bar{\mathbf{J}}_F^T \mathbf{K}_F(\mathbf{z}_F) \mathbf{z}_F - \bar{\mathbf{J}}_F^T \mathbf{h}_F \quad (4.10)$$

Einfache Dämpfungsmodelle werden hinzugefügt mit $+\mathbf{D}_F \dot{\mathbf{z}}_F$.

Die **Elementmatrizen** lauten somit

$$\begin{aligned} \text{Massenmatrix} \quad \mathbf{M}^e &= \int_{V_0^e} \mathbf{N}^{eT} \rho_0^e \mathbf{N}^e dV, \quad \text{Steifigkeitsmatrix} \quad \mathbf{K}^e = \int_{V_0^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{H}^e \mathbf{B}^e dV \\ \text{Einflussmatrix bei Erdbeschleunigung} \quad \mathbf{C}_t^e &= \int_{V_0^e} \mathbf{N}^{eT} \rho_0^e dV \end{aligned} \quad (4.11)$$

Die **linearen Systemmatrizen der gesamten freien Struktur** (ohne Randbedingungen) berechnet man aus:

$$\begin{aligned} \text{Massenmatrix} \quad \mathbf{M}_F &= \sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \mathbf{M}^e \mathbf{T}^e, \quad \text{Steifigkeitsmatrix} \quad \mathbf{K}_F = \sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{T}^e \\ \text{Einflussmatrix bei Erdbeschleunigung} \quad \mathbf{C}_{Ft} &= \sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \mathbf{C}_t^e \mathbf{T}^e \\ \text{Gesamt – Lastvektor} \quad \mathbf{h}_F &= \mathbf{C}_{Ft} \mathbf{g} + \mathbf{h}_{Ff} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Beachte: Erdbeschleunigung \mathbf{g} ist eine negative Linearbeschleunigung \mathbf{a}_{Ref} des Referenzsystems.

Man könnte noch weitere Lasten sich vorstellen, z.B. Fliehkräfte infolge Rotationen, Drucklasten an der Oberfläche, Vorspannungen, Vordehnungen etc.. Letztendlich müssen alle Lasten auf den Knotenlastvektor \mathbf{h}_F umgerechnet und dort aufsummiert werden.

Würde man die **geometrische Nichtlinearität** der Verzerrungen in (2.8, 9) beachten, erhält man nichtlineare Gleichungen, die für große Verformungen brauchbar sind. Das Materialgesetz (2.10) ist dabei immer noch linear. Auch könnte man ein nichtlineares Materialgesetz (**physikalische Nichtlinearität**) beachten, was für plastisches Verhalten und z.B. für Kunststoffe notwendig ist. In diesen Fällen ergibt sich eine Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_F(\mathbf{z}_F)$.

4.3 Problemklassen und Lösungsansätze

Problemklasse	Gleichungen	Lösungsverfahren
• Lineare Statik	lineare, gewöhnliche Gleichungen $\mathbf{K}_F \mathbf{z}_F = \mathbf{h}_F + \bar{\mathbf{h}}_F,$ $\mathbf{z}_F = \mathbf{J}_F \mathbf{y}_F + \bar{\mathbf{J}}_F \bar{\mathbf{z}}_F$	Linearer Gleichungslöser wie Cholesky Verfahren
• Lineare Dynamik	lineare Differentialgleichungen, homogen oder inhomogen $\mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{z}}_F + \mathbf{D}_F \dot{\mathbf{z}}_F + \mathbf{K}_F \mathbf{z}_F = \mathbf{h}_F + \bar{\mathbf{h}}_F,$ $\mathbf{z}_F = \mathbf{J}_F \mathbf{y}_F + \bar{\mathbf{J}}_F \bar{\mathbf{z}}_F$	Eigenwertberechnung nach Householder Numerische Integration nach Newmark
• Nichtlineare Statik	nichtlineare, gewöhnliche Gln. $\mathbf{K}_F(\mathbf{z}_F) \mathbf{z}_F = \mathbf{h}_F + \bar{\mathbf{h}}_F,$ $\mathbf{z}_F = \mathbf{J}_F \mathbf{y}_F + \bar{\mathbf{J}}_F \bar{\mathbf{z}}_F$	Newton-Raphson Iteration mit Cholesky Verfahren
• Nichtlineare Dynamik	nichtlineare Differentialgleichungen $\mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{z}}_F + \mathbf{D}_F \dot{\mathbf{z}}_F + \mathbf{K}_F(\mathbf{z}_F) \mathbf{z}_F = \mathbf{h}_F + \bar{\mathbf{h}}_F,$ $\mathbf{z}_F = \mathbf{J}_F \mathbf{y}_F + \bar{\mathbf{J}}_F \bar{\mathbf{z}}_F$	Numerische Integration nach Newmark mit Iteration

Merke:

1. Statiklösungen sind so gut, wie die Elemente den exakten Verzerrungsverlauf und damit den Spannungsverlauf beschreiben.
2. Eigenfrequenzen sind i.a. nur im ersten Drittel zu verwenden, die oberen sind zu hoch. Die Eigenfrequenzen werden von oben her an die wahren Werte angenähert.

Mit diesen Angaben können Sie in Maple / Mathematica / Matlab ein FEM-Programm für ebene Balkenstrukturen schreiben!

Setzen Sie ein kommerzielles FEM-Programm (z. B. ANSYS) ein und prüfen Sie die Ergebnisse nach.

Wählen Sie andere finite Elemente und vergleichen Sie die Resultate.

Übung 4.1: Analysiere die gezeigte Struktur hinsichtlich statischer Verformungen und berechne die Eigenfrequenzen, siehe Maple -Skript.

Daten: Element 1 + 2: Länge=1 m, Höhe=0.009 m, Breite(z)=0.2 m, Dichte $\rho=3000 \text{ kg/m}^3$, $E=7e10 \text{ N/m}^2$.

Element 3: Länge = 0.4 m, Höhe = 0.0095 m, Breite(z) = 0.2 m, Dichte $\rho = 7895 \text{ kg/m}^3$, $E = 21e10 \text{ N/m}^2$.

