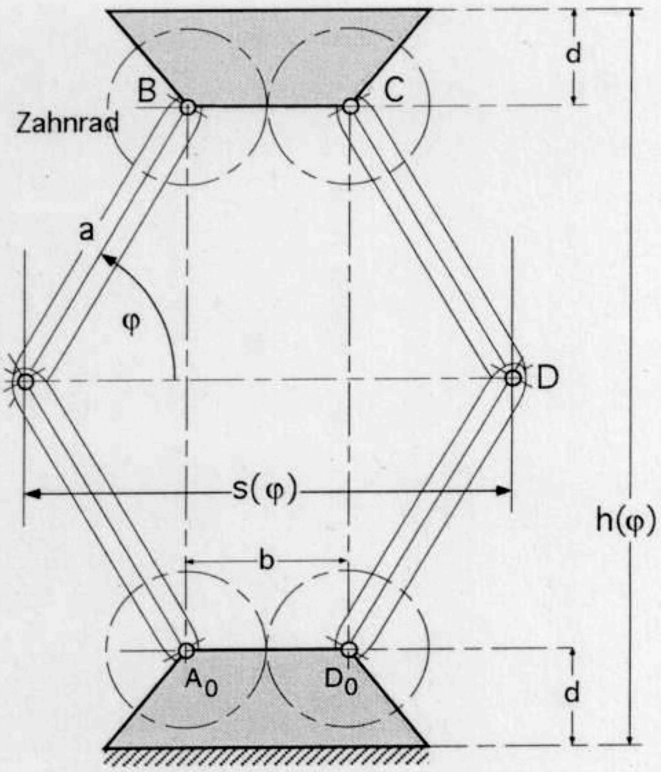
P413 P4.13

Aufgabe 3.2: Kinematik eines Hebemechanismus

Der Hebemechanismus besteht aus vier Lenkern der Laenge a, vier Zahnraeder mit Radius b/2, die an den Lenkern befestigt sind, und Lagerboecke mit je zwei Drehgelenken. Ein Lenker mit Zahnrad ist im Drehgelenk des Lagerbocks gelagert. In A und D sind je zwei Lenker drehbar gelagert. Der Abstand b ist so bemessen, daß je zwei Zahnraeder im Eingriff sind.

Daten: a = 20 cm, b = 8 cm, d = 5 cm.



1. Laufgrad des Mechanismus

   $b = 3$, $n = 6$, $g = 8$, $\sum f_i = 6 \times 1 + 2 \times 2 = 10$ aus 6 mal D und 2 mal Wälzen der Zahnräder.

   $F = b(n-1-g) + \sum f_i = 3(6-1-8) + 10 = 1$

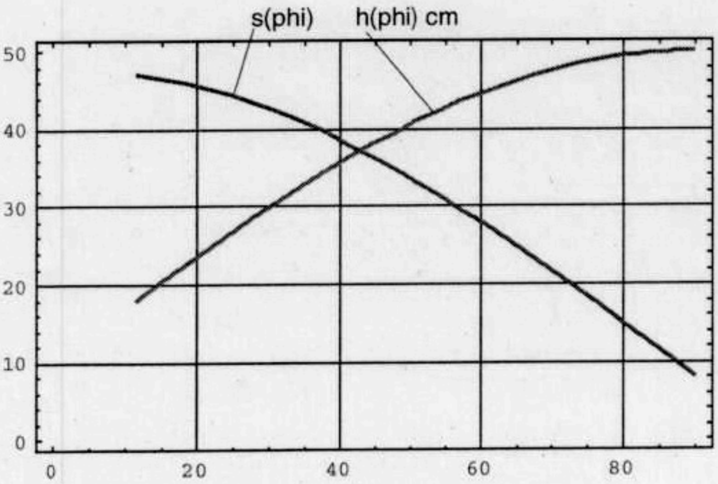
2. Uebertragungsfunktionen s(φ), h(φ) und h(s).

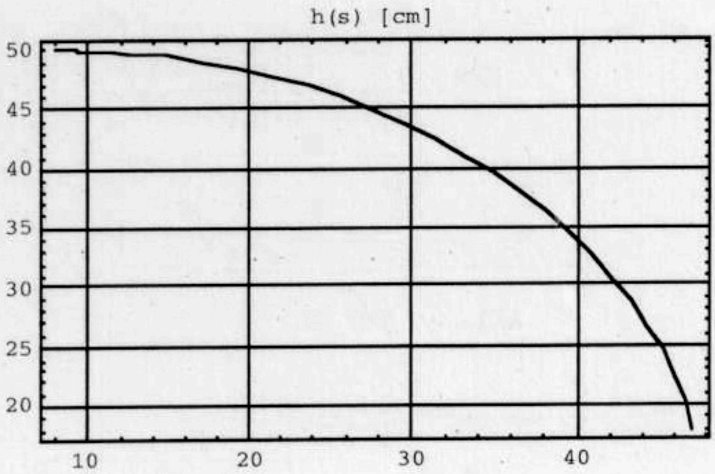
   $s(\varphi) = b + 2\,a\cos\varphi.$ (1)

   $h(\varphi) = 2\,d + 2\,a\sin\varphi$ (2)

   aus (1): $\cos\varphi = \dfrac{s-b}{2a}$, $\sin\varphi = \sqrt{1-\left(\dfrac{s-b}{2a}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{4a^2-(s-b)^2}}{2a}$, $\tan\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \dfrac{\sqrt{4a^2-(s-b)^2}}{s-b}$ (3)

   (3) + (2): $h(s) = 2\,d + 2\,a\sqrt{1-\left(\dfrac{s-b}{2a}\right)^2} = 2d + \sqrt{4a^2-(s-b)^2}.$ (4)





3. Arbeitsbereich von h, wenn sich die Zahnraeder nicht durchdringen duerfen.

   $h_{unten} = 2\,d + b = 10 + 8 = 18$ cm., bei $\varphi = 11.537\,°$ und $s = 47.19$ cm.

   $h_{oben} = 2\,d + 2\,a = 10 + 40 = 50$ cm, bei $\varphi = 90\,°$ und $s = 8$ cm.

4. Uebertragungswinkel $\mu_B(\varphi)$ zwischen Lenker und Lagerbock.

   $\mu_B(\varphi) = \varphi$, $\mu_{B\text{-}min} = 11.5\,°$, $\mu_{B\text{-}max} = 90\,°$,

5. Uebertragungsfunktionen $s'(\varphi)$, $s''(\varphi)$, $h'(\varphi)$, $h''(\varphi)$, $h'(s)$, $h''(s)$. Kettenregel anwenden!

   $s'(\varphi) = s_\varphi(\varphi) = -\,2\,a\sin\varphi;$ $\qquad s''(\varphi) = s_{\varphi\varphi}(\varphi) = -\,2\,a\cos\varphi.$ (5)

   $h'(\varphi) = h_\varphi(\varphi) = 2\,a\cos\varphi;$ $\qquad h''(\varphi) = h_{\varphi\varphi}(\varphi) = -\,2\,a\sin\varphi.$ (6)

   $h'(s) = h_s(\varphi) = \dfrac{\partial h}{\partial\varphi}\dfrac{\partial\varphi}{\partial s} = \dfrac{h'(\varphi)}{s'(\varphi)} \overset{(5)+(6)}{=} \dfrac{2a\cos\varphi}{-2a\sin\varphi} = -\dfrac{1}{\tan\varphi} = -\cot\varphi \overset{(3)}{=} -\dfrac{s-b}{\sqrt{4a^2-(s-b)^2}} = h_s(s)$ (7)

$$h''(s) = h_{ss}(s) = \frac{\partial h'}{\partial s} = \frac{-1\sqrt{4a^2-(s-b)^2} + (s-b)\left(-2(s-b)\right)/\left(2\sqrt{4a^2-(s-b)^2}\right)}{\sqrt{4a^2-(s-b)^2}^{\,2}} = -\frac{1}{\sqrt{4a^2-(s-b)^2}} - \frac{(s-b)^2}{\sqrt{4a^2-(s-b)^2}^{\,3}}$$

$$= \frac{-4a^2}{\sqrt{4a^2-(s-b)^2}^{\,3}}. \qquad (8)$$

6. Bestimme die Übersetzung U zwischen v = dh/dt und n, mit Drehzahl der Spindel n = 10 U/s, Steigung p = 2 mm

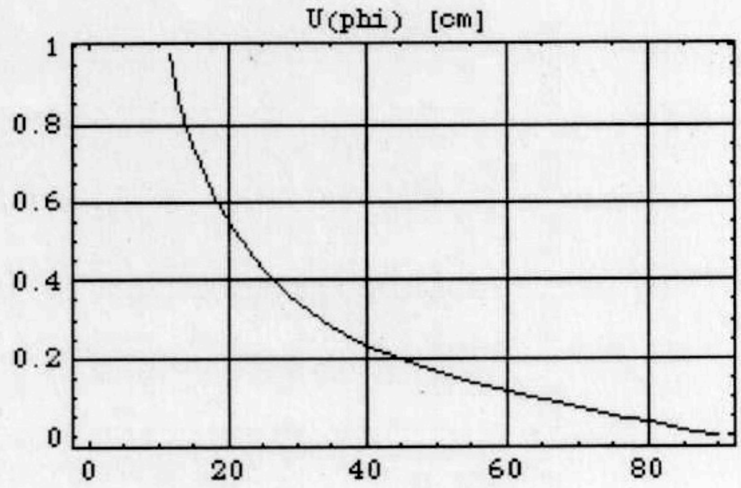
Übersetzung $U = v / n$, wo eine positive Drehung eine positive Höhenverstellung bewirken soll!

Hubgeschwindigkeit $v = h_s(s)\, ds/dt$, wo $h_s(s)$ nach (7)

Spindelgeschwindigkeit $ds/dt = -\frac{p}{2\pi}\,\omega_{Spindel} = -p\,n = -20$ mm/s $= -2$ cm/s (9)

Beachte: Damit h zunimmt, muß s kleiner werden, also ist die Übersetzungsfunktion zu negieren.

--> $U = -p\,h'(s) = p\cot(\varphi)$ (10)



Plot der Funktion U(cm/rad) über φ

7. Bestimme die Hubzeit T_{Hub} vom unteren Zustand zur obersten Lage.

Hubgeschwindigkeit v = dh/dt -> dt = 1/v dh

$$T = \int_{t_u}^{t_o} dt = \int_{h_u}^{h_o} \frac{1}{v}\,dh = \int_{h_u}^{h_o} \frac{1}{U(\varphi)\,n}\,dh = \int_{\varphi_u}^{\varphi_o} \frac{1}{U(\varphi)\,n}\,h_\varphi(\varphi)\,d\varphi = \int_{\varphi_u}^{\varphi_o} \frac{2a\cos\varphi}{p\cot\varphi\,n}\,d\varphi = \frac{2a}{p\,n}\int_{\varphi_u}^{\varphi_o} \sin\varphi\,d\varphi \qquad (11)$$

mit den Werten für φ_u und φ_o aus 3. folgt: T = 19.6 s.

oder, weil |ds/dt| = konst. = 2 cm/s =>

$$T = \frac{s_{ges}}{ds/dt} = \frac{47.18-9}{2} = 19{,}6 \text{ s.}$$

8. Kinematik: $v = g_1(\varphi)\,\omega_{Spindel} = U/(2\pi)\,\omega_{Spindel} = \cot(\varphi)/(2\pi)\,\omega_{Spindel}$ => $g_1(\varphi) = \cot(\varphi)/(2\pi)$ (12)

Statik: $-L = -1/g_1(\varphi)\,M_{Spindel}$ => $M_{Spindel} = g_1(\varphi)\,L = \cot(\varphi)/(2\pi)\,L = 66.16$ Ncm bei L = 1200 N, φ = 30°.

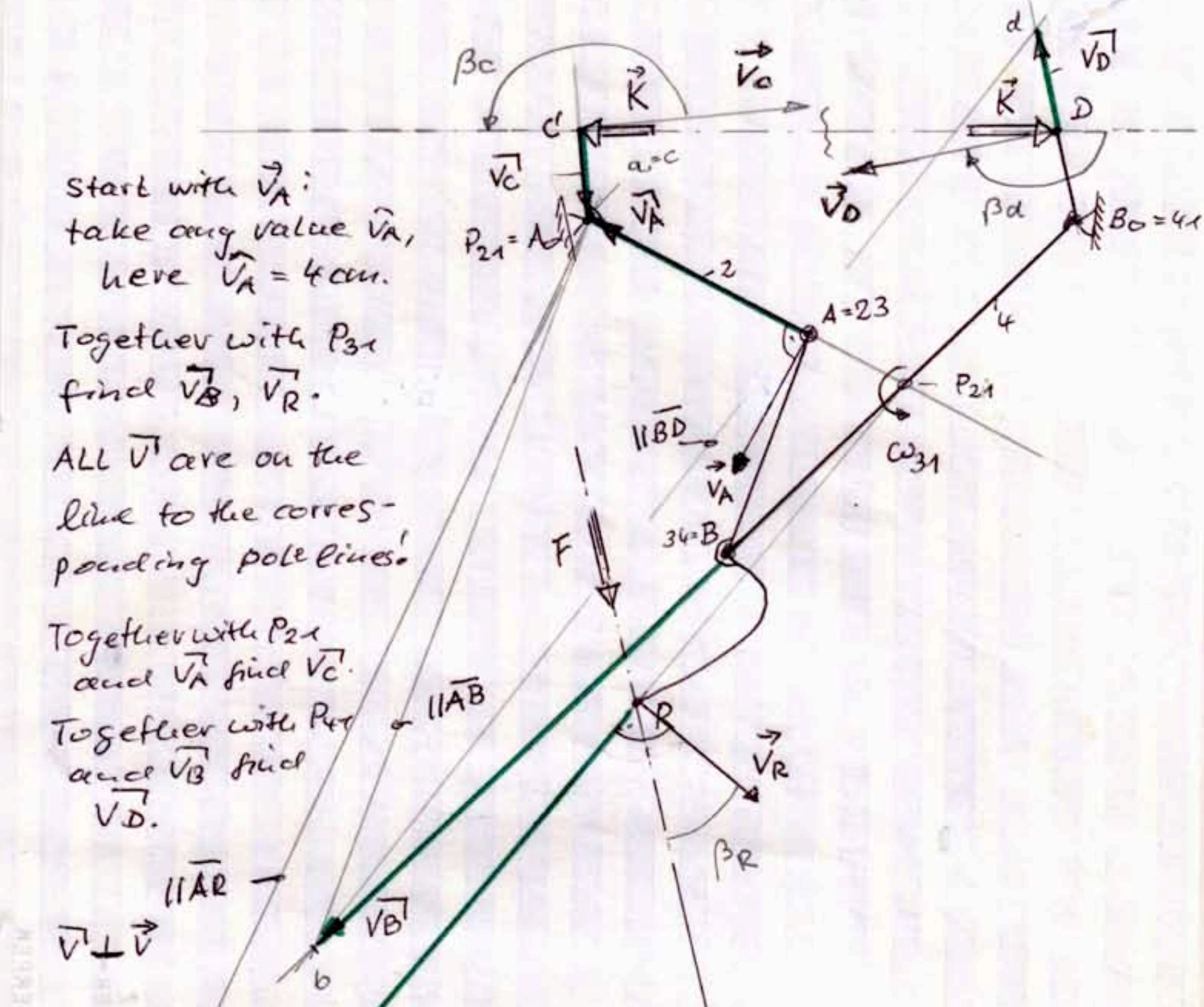
9. Kinematik: $v = g_2(\varphi)\,ds/dt = dh/ds\;ds/dt = -\cot(\varphi)\,ds/dt$ => $g_2(\varphi) = -\cot(\varphi)$ (13)

Statik: $-L = -1/g_2(\varphi)\,-F_{Spindel}$ => $F_{Spindel} = -g_2(\varphi)\,L = \cot(\varphi)\,L = 2078.5$ N (Zugkraft)

bei L = 1200 N, φ = 30°.

Solution

$$\sum \delta P_i = 0 = \delta \vec{V}_R' \circ \vec{F} + \delta \vec{V}_C' \circ \vec{K} + \delta \vec{V}_D' \vec{K} \quad (1)$$



Start with $\vec{V}_A$:
take any value $\hat{V}_A$,
here $\hat{V}_A = 4$ cm.

Together with P_{31} find $\vec{V}_B'$, V_R'.

ALL V' are on the line to the corresponding pole lines!

Together with P_{21} and $\vec{V}_A'$ find V_C'.

Together with P_{41} and $\vec{V}_B'$ find V_D'.

$\vec{V}' \perp \vec{V}$

Results:

$\overline{Rr} = \hat{V}_R = 152$ mm, $\beta_R = 37{,}5°$

$\overline{Cc} = \hat{V}_C = 14{,}5$ mm, $\beta_C = 176°$

$\overline{Dd} = \hat{V}_D = 14{,}5$ mm, $\beta_d = 168°$

With (1):

$$\sum \delta P_i = 0 = \delta V_R F \cos\beta_R + \delta V_C K \cos\beta_C + \delta V_D K \cos\beta_D$$

$$= 152 \cdot F \cdot 0{,}79 - 14{,}5 \cdot 0{,}997\, K - 14{,}5 \cdot 0{,}978\, K$$

$$\Rightarrow \underline{K = \frac{120}{28{,}65} F = 4{,}2\, F}$$