

Contents of Appendices -V1

| | | |
|----------|--|------------|
| A | Derivation of Eqs. of Motion | 131 |
| A.1 | Rigid Body Equations..... | 131 |
| A.2 | Eqs. of Motion Using Linear and Angular Momentum | 133 |
| A.3 | Eqs. of Motion Using Jourdain's Principle | 138 |
| A.4 | Eqs. of Joints | 139 |
| A.5 | Eqs. of Force Elements..... | 142 |
| B | Mass Geometry of a Body | 147 |
| B1 | Derivation of Body Mass Data | 147 |
| B2 | Mass Moment of Inertia for Typical Body Shapes | 149 |

V1 - 31.05.2008

A Derivation of Eqs. of Motion

A.1 Rigid Body Equations

Die Bewegungen eines aus dem MKS herausgeschnittenen Körpers (Bild 2.4) werden bezüglich einem Inertialsystem beschrieben. Das Inertialsystem ist fest mit dem Gestell verbunden und bewegt sich nicht. (Gestelle mit konstanter Geschwindigkeit werden jetzt nicht betrachtet)

Wähle das Gestell bez. Inertialsystem dort, wo man annimmt, dass sich diese Umgebung nicht bewegt!

Freischneiden heißt, alle Gelenke und Kraftelemente durchschneiden und die Schnittkräfte und -momente \vec{F}_{ki} und \vec{M}_{ki} an den Körpern i und j einzeichnen.

Für Kraftelemente müssen wir ein Kraftgesetz angeben, siehe Abschn. 2.4. Für die Gelenke können wir nur ihre Wirkungsrichtung nach der Art des Gelenks angeben, siehe Abschn. 2.3.

Weiter können sonstige eingeprägte Kräfte am Körper i aktiv sein, z.B. die Gewichtskraft \vec{F}_{Gi}

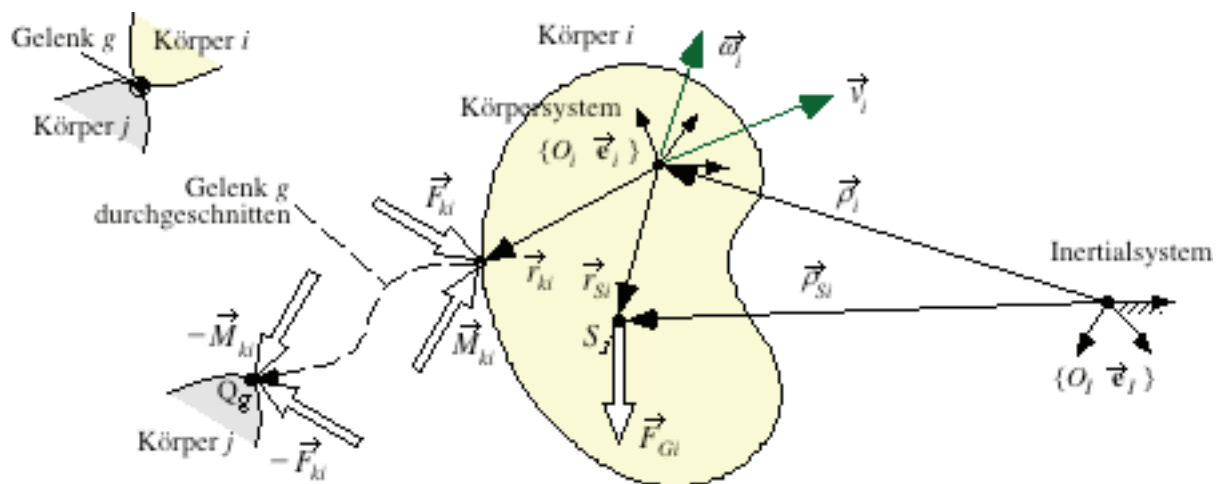


Bild A-1: Kinematische und kinetische Größen am starren Körper. Kraft ist positiv am Körper i !

In den folgenden Bewegungsgleichungen sind alle kinematischen und kinetischen Vektoren im körperfesten Koordinatensystem (Basis \vec{e}_i) dargestellt.

Zusammenfassend kann man schreiben:

Ein freier starrer Körper hat 6 FHG im Raume, deshalb sind 6 Koordinaten der Lage und 6 Koordinaten der Geschwindigkeit erforderlich:

Position und Orientierung des Körpersystems $\{O_i, \bar{\mathbf{e}}_i\}$ bezüglich dem Inertialsystem $\{O_I, \bar{\mathbf{e}}_I\}$ sei gegeben durch die Koordinaten des Ortsvektors $\mathbf{p}_i = (\rho_{ix} \ \rho_{iy} \ \rho_{iz})^T$ und Drehmatrix $\mathbf{A}^{Ii}(\boldsymbol{\vartheta}_i)$ mit den Winkeln $\boldsymbol{\vartheta}_i$ (vgl. Rechenregel 5) und die Geschwindigkeiten seien \mathbf{v}_i und $\boldsymbol{\omega}_i$ so lauten die **Koordinaten der Lage** $\mathbf{p}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_i \\ \boldsymbol{\vartheta}_i \end{pmatrix}$ und der **Geschwindigkeit** $\mathbf{z}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i \\ \boldsymbol{\omega}_i \end{pmatrix}$

Zwischen ihnen gilt Glg. $\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{Z}_i \mathbf{z}_i$ wobei $\mathbf{Z}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \tilde{\mathbf{p}}_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_i^{-1} \end{pmatrix}$ (DGL der Kinematik) (2.1)

Matrix \mathbf{E} ist eine 3x3 Einheitsmatrix und \mathbf{H}_i ist die Matrix der Drehkinematik, siehe (2.6)

Die dynamischen Glg. lauten (kompakt)

$$\boxed{\mathbf{M}_i \dot{\mathbf{z}}_i + \mathbf{Q}_i = \mathbf{h}_i} \quad (2.2)$$

(Masse mal Geschwindigkeitsänderung ist Summe aller Kräfte)

mit \mathbf{M}_i als symmetrische Massenmatrix und \mathbf{Q}_i als Matrix der gyrokopische Kräfte. In \mathbf{h}_i sind alle äußeren Kräfte und Momente zusammengefaßt.

Verwendung des Punktes O_i , der identisch Schwerpunkt S_i ist, dann gilt:

Er gelten die Aussagen $\mathbf{r}_{Si} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{Si}$

$$\mathbf{M}_i = \begin{pmatrix} m_i \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{Si} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} m_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{v}_i \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{I}_{Si} \boldsymbol{\omega}_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{M}_{Si} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Hier sei m_i die Masse, und \mathbf{I}_{Si} die Massenträgheitsmatrix bez. S_i des Körpers i sowie \mathbf{F}_i die Summe aller Kräfte und \mathbf{M}_{Si} die Summe aller Momente um S_i .

Verwendung eines beliebigen Punktes $O_i \neq$ Schwerpunkt S_i , dann gilt:

$$\mathbf{M}_i = \begin{pmatrix} m_i \mathbf{E} & -m_i \tilde{\mathbf{r}}_{Si} \\ m_i \tilde{\mathbf{r}}_{Si} & \mathbf{I}_{Oi} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} m_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{v}_i + m_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_{Si} \\ m_i \tilde{\mathbf{r}}_{Si} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{v}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{I}_{Oi} \boldsymbol{\omega}_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{M}_{Oi} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Hier sei m_i die Masse, \mathbf{r}_{Si} die Position des Schwerpunktes und \mathbf{I}_{Oi} die Massenträgheitsmatrix bez. O_i des Körpers i sowie \mathbf{F}_i die Summe aller Kräfte und \mathbf{M}_{Oi} die Summe aller Momente um O_i .

Hinweis: Die 6 DEs der Kinematik und die der Kinetik sind in sich gekoppelt.

A.2 Eqs. of Motion Using Linear and Angular Momentum

Für den freigeschnittenen Körper i sind die kinematischen und kinetischen Größen aufzustellen.

Orientierung, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung

Das Körpersystem $\{O_i, \bar{\mathbf{e}}_i\}$, das fest mit dem Körper verbunden ist, (d.h. der gesamte Körper in Bild 2.5) dreht sich gegenüber dem Inertialsystem $\{O_I, \bar{\mathbf{e}}_I\}$.

Es gilt mit Drehmatrix \mathbf{A}^{Li} (α, β, γ), wo α, β, γ die Kardanwinkel der Drehmatrix, vgl. Rechenregel 5:

$$\bar{\mathbf{e}}_I = \mathbf{A}^{Li} \bar{\mathbf{e}}_i \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{A}}^{Li} = \mathbf{A}^{Li} {}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \quad \text{or} \quad {}^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i = \mathbf{A}^{LiT} \dot{\mathbf{A}}^{Li} \quad (2.4)$$

Dabei sind $\boldsymbol{\omega}_i = {}^i \boldsymbol{\omega}_i$ die Koordinaten des Winkelgeschwindigkeitsvektors $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i$ des Körpers i bez. Inertialsystem, dargestellt in der Basis $\bar{\mathbf{e}}_i$.

$$\text{Umrechnung} \quad {}^I \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i = \mathbf{A}^{Li} \boldsymbol{\omega}_i \quad (2.5)$$

Für die Winkel-Drehfolge x - y - z gilt außerdem:

$$\begin{pmatrix} \omega_{ix} \\ \omega_{iy} \\ \omega_{iz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta_i \cos \gamma_i & \sin \gamma_i & 0 \\ -\cos \beta_i \sin \gamma_i & \cos \gamma_i & 0 \\ \sin \beta_i & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_i \\ \dot{\beta}_i \\ \dot{\gamma}_i \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_i = \begin{pmatrix} \frac{\cos \gamma}{\cos \beta} & -\frac{\sin \gamma}{\cos \beta} & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ -\tan \beta \cos \gamma & \tan \beta \sin \gamma & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_i \quad (2.6)$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{H}_i \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_i \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_i = \mathbf{H}_i^{-1} \boldsymbol{\omega}_i$$

Für kleine Drehungen -> Linearisierung: $\mathbf{H} \approx \mathbf{E} \rightarrow {}^i \boldsymbol{\omega}_i \approx {}^I \boldsymbol{\omega}_i \approx \dot{\boldsymbol{\vartheta}}$ (2.7)

Für Drehungen in der x-y-Ebene gilt ${}^I \omega_{iz} \equiv {}^i \omega_{iz} \equiv \omega_{iz} = \dot{\gamma}$ (2.8)

${}^I \dot{\boldsymbol{\omega}}_i$ sind die Koordinaten des Winkelbeschleunigungsvektors $\ddot{\boldsymbol{\omega}}_i$ des Körpers i bez. Inertialsystem, dargestellt in der Inertialbasis. Es gilt mit (2.5)

$${}^I \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \frac{d}{dt} (\mathbf{A}^{Li} \boldsymbol{\omega}_i) = \dot{\mathbf{A}}^{Li} \boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{A}^{Li} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \stackrel{(2.4)}{=} \mathbf{A}^{Li} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{A}^{Li} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i. \text{ Wegen } \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{0} \text{ folgt}$$

$${}^I \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \mathbf{A}^{Li} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \quad (2.9)$$

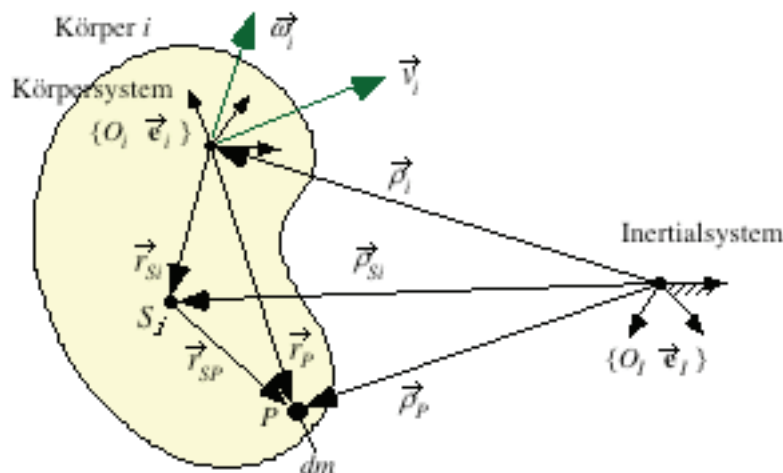


Bild A-2: Zur Kinematik des starren Körpers

Position von P, siehe Bild 2.5

Ein starrer Körper K_i besteht aus unendlich vielen Partikeln P mit Masse dm am Ort $\vec{\rho}_P$.

Ist $\vec{\rho}_i$ der Ortsvektor zum Ursprung O_i der körperfesten Basis B_i , so gilt

$$\vec{\rho}_P = \vec{\rho}_i + \vec{r}_P = \vec{\rho}_i + \vec{r}_{Si} + \vec{r}_{SP} = \vec{\rho}_{Si} + \vec{r}_{SP} \quad \text{wo} \quad \vec{r}_P = \vec{r}_{Si} + \vec{r}_{SP} \quad (2.10)$$

Dabei ist $\vec{\rho}_{Si}$ der Ortsvektor zum Schwerpunkt S_i des Körpers i .

Für Koordinaten in Inertialbasis gilt

$${}^I \boldsymbol{\rho}_P = {}^I \boldsymbol{\rho}_i + \mathbf{A}^{li} \mathbf{r}_P = {}^I \boldsymbol{\rho}_{Si} + \mathbf{A}^{li} \mathbf{r}_{SP} \quad (2.11)$$

$$\text{wo } \mathbf{r}_P = \mathbf{r}_{Si} + \mathbf{r}_{SP} \text{ die Koordinaten von } P \text{ in Basis } \vec{\mathbf{e}}_i \quad (2.12)$$

Für Koordinaten in Körperbasis gilt

$${}^i \boldsymbol{\rho}_P = \boldsymbol{\rho}_i + \mathbf{r}_P = \boldsymbol{\rho}_{Si} + \mathbf{r}_{SP} = \left(\mathbf{A}^{li} \right)^T {}^I \boldsymbol{\rho}_P \quad (2.13)$$

$\boldsymbol{\rho}_i$ und $\boldsymbol{\rho}_{Si}$ sind die Koordinaten von $\vec{\rho}_i$ und $\vec{\rho}_{Si}$ in der Basis $\vec{\mathbf{e}}_i$.

Translationsgeschwindigkeit von P

Mit $\vec{v}_i = \dot{\vec{\rho}}_i$ als Geschwindigkeit von O_i , der Drehung $\vec{\omega}_i$ des Körpers i sowie

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{\text{in Körperbasis}} \vec{r}_P = 0, \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{\text{in Körperbasis}} \vec{r}_{SP} = 0 \quad \text{oder} \quad \dot{\mathbf{r}}_P = \dot{\mathbf{r}}_P = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{r}}_{SP} = \dot{\mathbf{r}}_{SP} = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

gilt für den Punkt P

$$\vec{v}_P = \vec{v}_i + \vec{\omega}_i \times \vec{r}_P = \vec{v}_i + \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{Si} + \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{SP} = \dot{\vec{\rho}}_{Si} + \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{SP} \quad (2.15)$$

Dabei ist $\dot{\vec{\rho}}_{Si}$ der Geschwindigkeitsvektor des Schwerpunkts S_i

Für Koordinaten in Inertialbasis gilt

$${}^I \mathbf{v}_P = {}^I \mathbf{v}_i + \mathbf{A}^{li} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_P = {}^I \dot{\boldsymbol{\rho}}_{Si} + \mathbf{A}^{li} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_{SP} \quad (2.16)$$

Für Koordinaten in Körperbasis gilt

$${}^i \mathbf{v}_P = \mathbf{v}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_P = \dot{\boldsymbol{\rho}}_{Si} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \boldsymbol{\rho}_{Si} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_{SP} \quad (2.17)$$

\mathbf{v}_i und $\mathbf{v}_{Si} = \dot{\boldsymbol{\rho}}_{Si} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \boldsymbol{\rho}_{Si}$ sind die Koordinaten von $\vec{v}_i = \dot{\vec{\rho}}_i$ und $\dot{\vec{\rho}}_{Si}$ in der Basis $\vec{\mathbf{e}}_i$.

Translationsbeschleunigung von P

Die zeitliche Ableitung von (2.15) liefert mit (2.14)

$$\vec{a}_P = \dot{\vec{v}}_P = \dot{\vec{v}}_i + \dot{\vec{\omega}}_i \times \vec{r}_P + \vec{\omega}_i \times \dot{\vec{\omega}}_i \times \vec{r}_P = \ddot{\vec{\rho}}_i + \dot{\vec{\omega}}_i \times \vec{r}_{SP} + \vec{\omega}_i \times \dot{\vec{\omega}}_i \times \vec{r}_{SP} \quad (2.18)$$

Für die Geschwindigkeit und Beschleunigung von S_i gilt

$$\vec{v}_{Si} = \dot{\vec{\rho}}_{Si} = \vec{v}_i + \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{Si}, \quad \vec{a}_{Si} = \dot{\vec{v}}_{Si} = \ddot{\vec{\rho}}_{Si} = \dot{\vec{v}}_i + \dot{\vec{\omega}}_i \times \vec{r}_{Si} + \vec{\omega}_i \times \dot{\vec{\omega}}_i \times \vec{r}_{Si} \quad (2.19)$$

Für Koordinaten in Inertialbasis gilt

$${}^I \mathbf{a}_P = {}^I \dot{\mathbf{v}}_i + \mathbf{A}^{li} \left(\tilde{\dot{\boldsymbol{\omega}}}_i \mathbf{r}_P + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_P \right) = {}^I \dot{\boldsymbol{\rho}}_{Si} + \mathbf{A}^{li} \left(\tilde{\dot{\boldsymbol{\omega}}}_i \mathbf{r}_{SP} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_{SP} \right) \quad (2.20)$$

Für Koordinaten in Körperbasis gilt

$${}^i \mathbf{a}_P = \dot{\mathbf{v}}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{v}_i - \tilde{\mathbf{r}}_P \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_P = \dot{\mathbf{v}}_{Si} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{v}_{Si} - \tilde{\mathbf{r}}_{SP} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_{SP} \quad (2.21)$$

Definition Masse

Die Masse des Körpers ist $m_i = \int_{K_i} dm = \text{konst.}$ (2.22)

Definition Schwerpunkt

Für Schwerpunkt S_i gilt:

$$m_i \vec{r}_{Si} = \int_{K_i} \vec{r}_P dm = \text{konst.}, \quad \int_{K_i} \vec{r}_{SP} dm = 0, \quad m_i \vec{\rho}_{Si} = \int_{K_i} \vec{\rho}_P dm \quad (2.23)$$

Für die Koordinaten des Schwerpunkts in Körperbasis gilt $\mathbf{r}_{Si} = \frac{1}{m_i} \int_{K_i} \mathbf{r}_P dm$ (2.24)

Definition Translationsimpuls

$$\text{Impuls } \vec{P}_i = \int_{K_i} \vec{v}_P dm = \int_{K_i} \dot{\vec{\rho}}_P dm = \frac{d}{dt} \int_{K_i} \vec{\rho}_P dm \stackrel{(2.23)}{=} m_i \dot{\vec{\rho}}_{Si} \stackrel{(2.19)}{=} m_i \vec{v}_i + \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{Si} \quad (2.25)$$

Definition Drehimpuls (Drall) bezogen auf O_i (Achtung, jeder beliebige Punkt ist möglich!)

$$\text{Drehimpuls } \vec{D}_{O_i} = \int_{K_i} \vec{r}_P \times \vec{v}_P dm \stackrel{(2.15)}{=} \int_{K_i} \vec{r}_P dm \times \vec{v}_i - \int_{K_i} \vec{r}_P \times \vec{r}_P dm \times \vec{\omega}_i$$

$$\text{oder} \quad \vec{D}_{O_i} = \int_{K_i} \vec{r}_P \times \vec{v}_P dm \stackrel{(2.23)}{=} m_i \vec{r}_{Si} \times \vec{v}_i - \int_{K_i} \vec{r}_P \times \vec{r}_P dm \times \vec{\omega}_i \quad (2.26)$$

Kräftegesetz, siehe Bild 2.6

Wirken auf den Körper i die Kräfte \vec{F}_{ki} an Marker k , so kann man diese zu einer Resultierenden \vec{F}_i zusammenfassen. Sie steht im Gleichgewicht mit der Änderung des Impulses. Der Körper bewegt sich translatorisch so, als ob die Kräfte \vec{F}_i in S_i angreifen und in S_i die gesamte Masse vereinigt wäre.

$$\text{Newton II: } \vec{F}_i = \sum_{K_i} \vec{F}_{ki} = \dot{\vec{P}}_i \stackrel{(2.25)}{=} m_i \ddot{\vec{\rho}}_{Si} \stackrel{(2.19)}{=} m_i \left(\ddot{\vec{\rho}}_i - \vec{r}_{Si} \times \dot{\vec{\omega}}_i + \vec{\omega}_i \times \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{Si} \right) \quad (2.27)$$

Bewegungsgleichungen der Translation

Mit Koordinaten der Schwerpunktsbewegung, also $O_i = S_i$:

$$\text{Für Koordinaten in Inertialbasis gilt } m_i {}^I \dot{\vec{v}}_{Si} = {}^I \vec{F}_i = \sum_{K_i} \mathbf{A}^{Ii} \vec{F}_{ki} \quad (2.28)$$

$$\text{Für Koordinaten in Körperbasis gilt } m_i \dot{\vec{v}}_{Si} + m_i \tilde{\vec{\omega}}_i \vec{v}_{Si} = \vec{F}_i = \sum_{K_i} \vec{F}_{ki} \quad (2.29)$$

Mit Koordinaten der Bewegung von O_i , wo $O_i \neq S_i$, dargestellt in der Körperbasis

$$m_i \dot{\vec{v}}_i - m_i \tilde{\vec{r}}_{Si} \tilde{\vec{\omega}}_i + m_i \tilde{\vec{\omega}}_i \vec{v}_i + m_i \tilde{\vec{\omega}}_i \tilde{\vec{\omega}}_i \vec{r}_{Si} = \vec{F}_i = \sum_{K_i} \vec{F}_{ki} \quad (2.30)$$

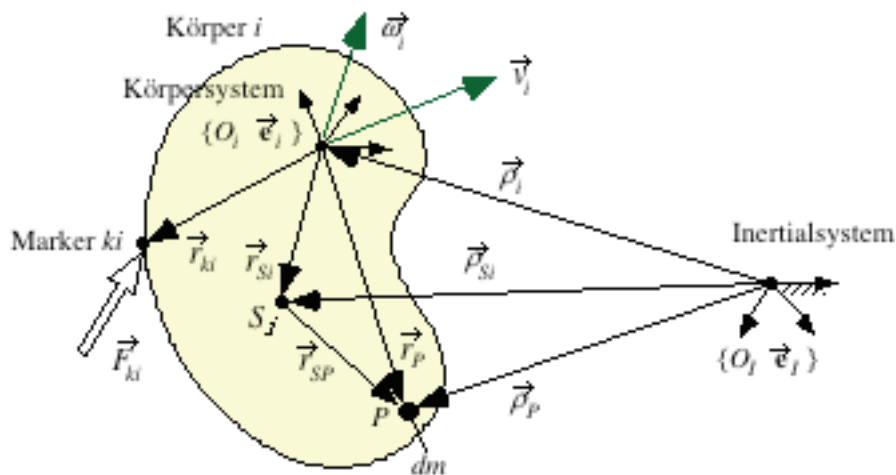


Bild 2.6: Zur Kinetik des starren Körpers

Momentensatz bezogen auf O_i .

Die auf den Körper wirkenden Kräfte \vec{F}_{ki} liefern neben der Resultierenden \vec{F}_i auch ein resultierendes Moment \vec{M}_{O_i} um den Bezugspunkt O_i . Dieses Moment ist im Gleichgewicht mit dem Ausdruck $\vec{r}_P \times \text{Impulsänderung}$ für alle Punkte P . Man findet

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_{O_i} &= \sum_{K_i} \vec{r}_{ki} \times \vec{F}_{ki} = \int_{K_i} \vec{r}_P \times \dot{\vec{v}}_P \, dm = \frac{d}{dt} \left(\int_{K_i} \vec{r}_P \times \vec{v}_P \, dm \right) - \int_{K_i} \dot{\vec{r}}_P \times \vec{v}_P \, dm \\
 &= \frac{d}{dt} \left(\int_{K_i} \vec{r}_P \times \vec{v}_P \, dm \right) - \int_{K_i} (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_P) \times (\vec{v}_i + \vec{\omega}_i \times \vec{r}_P) \, dm \\
 &\stackrel{(\text{Bild 2.6, 2.10})}{=} \frac{d}{dt} \left(\int_{K_i} \vec{r}_P \times \vec{v}_P \, dm \right) - \int_{K_i} ((\vec{\omega}_i \times \vec{r}_{S_i}) + (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_{SP})) \times (\vec{v}_i + (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_{S_i}) + (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_{SP})) \, dm \\
 &\stackrel{(2.23, \text{Rechenregel 4})}{=} \frac{d}{dt} \left(\int_{K_i} \vec{r}_P \times \vec{v}_P \, dm \right) - \int_{K_i} (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_{S_i}) \times \vec{v}_i \, dm
 \end{aligned}$$

Mit Drehimpuls (2.26): $M_{O_i} = \sum_{K_i} \vec{r}_{ki} \times \vec{F}_{ki} = \dot{\vec{D}}_{O_i} - m_i (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_{S_i}) \times \vec{v}_i$ (2.31)

Momentensatz bezogen auf Schwerpunkt $S_i = O_i$.

$$\text{Für } S_i \text{ gilt } \vec{r}_{S_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_{S_i} = \sum_{K_i} \vec{r}_{ki} \times \vec{F}_{ki} = \dot{\vec{D}}_{S_i} \quad (2.32)$$

Momentensatz bezogen auf Inertialursprung O_I . ($\vec{\rho}_{ki}$ = Ortsvektor des Markers k auf Körper i)

$$\text{Für den Inertialursprung } O_I \text{ gilt } \vec{v}_I = 0 \Rightarrow \vec{M}_{O_I} = \sum_{K_i} \vec{\rho}_{ki} \times \vec{F}_{ki} = \dot{\vec{D}}_{O_I} \quad (2.33)$$

Definition Massenträgheitsmatrix

$$\text{bezüglich } O_i \text{ dargestellt im Körpersystem} \quad \boxed{\mathbf{I}_{O_i} = - \int_{K_i} \vec{r}_P \vec{r}_P \, dm = \text{konst.}} \quad (2.34)$$

$$\text{bezüglich } S_i \text{ dargestellt im Körpersystem} \quad \boxed{\mathbf{I}_{S_i} = - \int_{K_i} \vec{r}_{SP} \vec{r}_{SP} \, dm = \text{konst.}} \quad (2.35)$$

Bewegungsgleichungen der Rotation, dargestellt in körperfester Basis

Aus (2.31) findet man mit (2.26), (2.34) und $(\vec{\omega}_i \vec{r}_{S_i})^\sim \mathbf{v}_i = \vec{\omega}_i \vec{r}_{S_i} \mathbf{v}_i - \vec{r}_{S_i} \vec{\omega}_i \mathbf{v}_i$

$$\text{bezüglich } O_i \quad \boxed{\mathbf{I}_{O_i} \dot{\vec{\omega}}_i + \vec{\omega}_i \mathbf{I}_{O_i} \vec{\omega}_i + m_i \vec{r}_{S_i} \dot{\vec{v}}_i + m_i \vec{r}_{S_i} \vec{\omega}_i \mathbf{v}_i = \mathbf{M}_{O_i}} \quad (2.36)$$

$$\text{bezüglich } S_i \text{ (Eulerglg.)} \quad \boxed{\mathbf{I}_{S_i} \dot{\vec{\omega}}_i + \vec{\omega}_i \mathbf{I}_{S_i} \vec{\omega}_i = \mathbf{M}_{S_i}} \quad (2.37)$$

wo \mathbf{M}_{O_i} und \mathbf{M}_{S_i} die Koordinaten der resultierenden Momente um O_i und S_i sind.

Fassen wir Glg. (2.30) und (2.36) zusammen, erhalten wir die 6 DEs in (2.2).

A.3 Eqs. of Motion Using Jourdain's Principle

Nach dem Prinzip der virtuellen Leistungen (Jourdain'sches Prinzip) ist die Summe der virtuellen Leistung der Trägheitskräfte der Partikel P mit Masse dm und der virtuellen Leistung der diskreten Kräfte \bar{F}_{ki} gleich null. Man schreibt

$$-\int_{K_i} \delta \bar{\mathbf{v}}_P \cdot \bar{\mathbf{a}}_P \, dm + \sum_{K_i} \delta \bar{\mathbf{v}}_{ki} \cdot \bar{\mathbf{F}}_{ki} = 0 \quad (2.38)$$

Für Koordinaten in Körperbasis gilt:

$$\boxed{-\int_{K_i} \delta \mathbf{v}_P^T \mathbf{a}_P \, dm + \sum_{K_i} \delta \mathbf{v}_{ki}^T \mathbf{F}_{ki} = 0} \quad (2.39)$$

Hierin sind $\delta \mathbf{v}_P$ und $\delta \mathbf{v}_{ki}$ die virtuelle Geschwindigkeit von P und der Marker ki dargestellt in der Körperbasis. \mathbf{a}_P ist die Beschleunigung von P .

Aus (2.15), (2.17) folgen

$$\delta \bar{\mathbf{v}}_P = \bar{\mathbf{v}}_i - \bar{\mathbf{r}}_P \times \delta \bar{\boldsymbol{\omega}}_i, \quad \delta \mathbf{v}_P = \delta \mathbf{v}_i - \bar{\mathbf{r}}_P \delta \bar{\boldsymbol{\omega}}_i \quad \text{und} \quad \delta \mathbf{v}_P^T = \delta \mathbf{v}_i^T + \delta \boldsymbol{\omega}_i^T \bar{\mathbf{r}}_P, \quad (2.40)$$

und mit (2.21) findet man für (2.39)

$$-\int_{K_i} \left(\delta \mathbf{v}_i^T + \delta \boldsymbol{\omega}_i^T \bar{\mathbf{r}}_P \right) \left(\dot{\mathbf{v}}_i + \bar{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{v}_i - \bar{\mathbf{r}}_P \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \bar{\boldsymbol{\omega}}_i \bar{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_P \right) dm + \sum_{K_i} \left(\delta \mathbf{v}_i^T + \delta \boldsymbol{\omega}_i^T \bar{\mathbf{r}}_{ki} \right) \mathbf{F}_{ki} = 0$$

Nun werden (2.22), (2.24), (2.34) eingesetzt. Das liefert in Matrizenschreibweise

$$\begin{pmatrix} \delta \mathbf{v}_i^T \\ \delta \boldsymbol{\omega}_i^T \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} m_i \mathbf{E} & -m_i \bar{\mathbf{r}}_{Si} \\ m_i \bar{\mathbf{r}}_{Si} & \mathbf{I}_{Oi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{v}}_i \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_i \bar{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{v}_i + m_i \bar{\boldsymbol{\omega}}_i \bar{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_{Si} \\ m_i \bar{\mathbf{r}}_{Si} \bar{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{v}_i + \bar{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{I}_{Oi} \bar{\boldsymbol{\omega}}_i \end{pmatrix} - \sum_{K_i} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \bar{\mathbf{r}}_{ki} \end{pmatrix} \mathbf{F}_{ki} \right) = 0$$

$$\delta \mathbf{z}_i^T \begin{pmatrix} \mathbf{M}_i & \dot{\mathbf{z}}_i & + & \mathbf{Q}_i & - & \mathbf{h}_i \end{pmatrix} = 0$$

Die letzte Gleichung ist erfüllt für beliebige Werte von $\delta \mathbf{z}_i \neq \mathbf{0}$, also

$$\boxed{\mathbf{M}_i \dot{\mathbf{z}}_i + \mathbf{Q}_i = \mathbf{h}_i} \quad (2.41)$$

mit \mathbf{M}_i als symmetrische Massenmatrix, \mathbf{Q}_i als Spaltenmatrix der Zentrifugalkräfte und gyroskopischen Kräfte, sowie \mathbf{h}_i als Spaltenmatrix der äußeren Kräfte und Momente am Körper i , vgl. (2.2).

Den Sonderfall, dass wir uns auf den Schwerpunkt beziehen, erhält man mit $O_i = S_i$, also $\mathbf{r}_{Si} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{I}_{Oi} = \mathbf{I}_{Si}$.

Beachte: In (2.41) sind unter \mathbf{h}_i noch alle Kräfte und Momente zusammengefaßt. Wir werden diese später in eingepreßte Kräfte und Zwangskräfte in den Kraftelementen und Gelenken unterteilen. Sie treten immer paarweise an den Körpern i und j auf.

A.4 Eqs. of Joints

Gelenke schränken die Bewegungen der an ihnen beteiligten Körper ein. Diese Einschränkungen lassen sich als **Zwangsbedingungen** der Kinematik auffassen.

Ein Gelenk g verbindet genau zwei Körper, den Körper i am Marker P_g mit dem Körper j am Marker Q_g , siehe Bild 2.4. Es bewirkt u_g Zwangsbedingungen. Somit ergeben sich andererseits f_g Freiheitsgrade über das Gelenk.

Je nach Art des Gelenks ergeben sich unterschiedliche Bewegungseinschränkungen, siehe Abschn. 2.3.1

Implizite Zwangsbedingungen am Gelenk

Sind \mathbf{p}_i und \mathbf{p}_j die Koordinaten der Position und \mathbf{z}_i und \mathbf{z}_j die Koordinaten der Geschwindigkeit der Körper i und j , so kann man mit t als Zeit allgemein für die Zwangsbedingungen bezüglich der Position schreiben

$$\boxed{\mathbf{g}_g(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, t) = \mathbf{0}} \quad (2.44)$$

Die Spaltenmatrix \mathbf{g}_g hat die Länge u_g .

In Abschn. 2.3.2 wird das Aufstellen der Zwangsbedingungen exemplarisch gezeigt.

Entsprechend den Bewegungseinschränkungen ergeben sich **Gelenkkräfte (Zwangskräfte)** \bar{F}_g bzw. **Gelenkmomente (Zwangsmomente)** \bar{M}_g . Die Gelenkkräfte und -momente sind genau so groß, daß die Kinematik des Gelenks eingehalten wird. Ihre Koordinaten bezüglich der Basis \square wollen wir kurz λ_g nennen. Die Dimension von λ_g ist somit u_g .

Für die verallgemeinerten Zwangskräfte – ein Teil von \mathbf{h}_i in (2.2), (2.3) bzw. \mathbf{h}_j – gilt

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{h}_i^c &= \sum_{g=1}^{\text{alle Gelenke an } i} \mathbf{G}_{gi}^T \diamond_g \quad \text{mit} \quad \mathbf{G}_{gi} = \frac{\partial \mathbf{g}_g}{\partial \mathbf{p}_i} \mathbf{Z}_i \\ \mathbf{h}_j^c &= \sum_{g=1}^{\text{alle Gelenke an } j} \mathbf{G}_{gj}^T \diamond_g \quad \text{mit} \quad \mathbf{G}_{gj} = \frac{\partial \mathbf{g}_g}{\partial \mathbf{p}_j} \mathbf{Z}_j \end{aligned}} \quad (2.45)$$

Der Ausdruck (2.45) erfüllt die Bedingungen der Lagrange'schen Multiplikatorenmethode, wenn die Bewegungsgleichungen (2.2) noch die Nebenbedingungen (2.44) erfüllen müssen.

Vielfach werden die Vektoren der Gelenke vorteilhaft in einer Gelenkbasis $B_g \{P_g; x_g, y_g, z_g\}$ dargestellt.

Wir betrachten ein **Kugelgelenk** (Typ 27 in Tab. 2.2) zwischen Körper i und Körper j an den Markern P_g und Q_g , siehe Bild 2.7 a). Nach dem Freischneiden ergeben sich folgende kinematischen und kinetischen Zusammenhänge:

Zahl der Freiheiten $f_g = 3$, Zahl der Zwangsbedingungen $u_g = 3$.

Die impliziten Zwangsbedingungen lauten für das Kugelgelenk (3 skalare Glgn. in der Körperbasis i)

$$\begin{aligned} \vec{r}_g &= \vec{\rho}_{Q_g} - \vec{\rho}_{P_g} = \vec{\rho}_j + \vec{r}_{Q_g} - \vec{\rho}_i - \vec{r}_{P_g} \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \\ {}^i \mathbf{r}_g &= \mathbf{r}_g = \mathbf{A}^{iT} \mathbf{A}^{lj} (\boldsymbol{\rho}_j + \mathbf{r}_{Q_g}) - \boldsymbol{\rho}_i - \mathbf{r}_{P_g} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Die allgemeine Form lautet: $\boxed{\mathbf{g}_g(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, t) = \mathbf{0}}$ (2.47)

Beachte: Die Zwangsbedingungen können in jeder beliebigen Basis angegeben werden. Auch kann \mathbf{g}_g von der Zeit t abhängen.

Die drei Zwangsbedingungen erfordern die

unbekannten Zwangskräfte \vec{F}_g bzw. ${}^i \mathbf{F}_g = \mathbf{F}_g = (F_{gx} \ F_{gy} \ F_{gz})^T = \boldsymbol{\lambda}_g$ (2.48)

Sie werden allgemein im Vektor $\boldsymbol{\lambda}_g$ zusammengefaßt, vgl. (2.45)

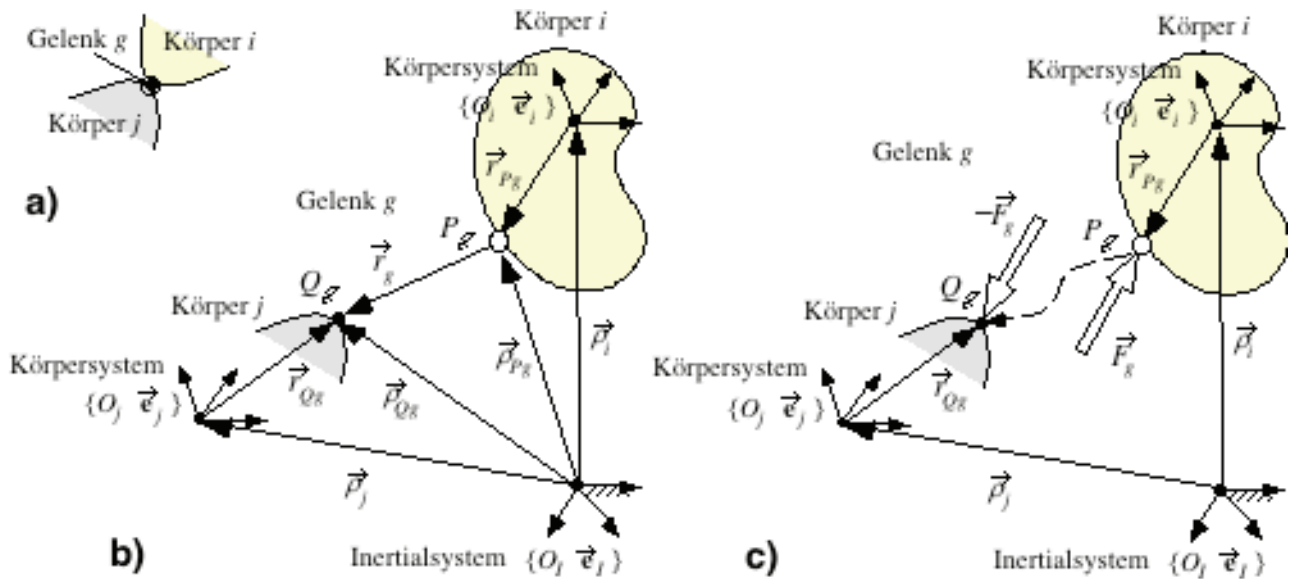


Bild 2.7: Kinematische (b) und kinetische Größen (c) am Kugelgelenk (a).

Die Gelenkfreiheitsgrade sind die drei Drehungen mit den drei Koordinaten $\alpha_g, \beta_g, \gamma_g$. Sie bilden die Drehmatrix

$$\mathbf{A}_g(\boldsymbol{\vartheta}_g) = \mathbf{A}^{ij}(\alpha_g, \beta_g, \gamma_g) = \mathbf{A}^{liT} \mathbf{A}^{lj} \quad \text{für} \quad \bar{\mathbf{e}}_i = \mathbf{A}_g(\boldsymbol{\vartheta}_g) \bar{\mathbf{e}}_j \quad (2.49)$$

Damit kann man die expliziten Zwangsbedingungen am Kugelgelenk angeben als

$$\mathbf{A}^{lj} = \mathbf{A}^{li} \mathbf{A}_g(\boldsymbol{\vartheta}_g). \quad (2.50)$$

Die allgemeine explizite Form lautet: $\boxed{\mathbf{p}_j = \mathbf{f}_{gi}(\mathbf{p}_i, t) + \mathbf{f}_y(\mathbf{y}_g, t)}$ (2.51)

d.h. ist die Bewegung des Körpers i bekannt, kann man mit \mathbf{y}_g die Bewegung des Körpers j berechnen \rightarrow **Vorwärtsrekursion**.

Die Zwangsbedingungen (2.47) und (2.51) können wir ableiten und erhalten mit $\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{Z}_i \mathbf{z}_i$ in (2.1) die Bedingungen auf Geschwindigkeitsebene. Sie sind für die Kinetik erforderlich.

Die implizite Form lautet

$$\underbrace{\frac{\partial \mathbf{g}_g}{\partial \mathbf{p}_i} \mathbf{Z}_i \mathbf{z}_i}_{\mathbf{G}_{gi}} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{g}_g}{\partial \mathbf{p}_j} \mathbf{Z}_j \mathbf{z}_j}_{\mathbf{G}_{gj}} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{g}_g}{\partial t}}_{\boldsymbol{\kappa}_g} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \mathbf{G}_{gi} \mathbf{z}_i + \mathbf{G}_{gj} \mathbf{z}_j + \boldsymbol{\kappa}_g = \mathbf{0} \quad (2.52)$$

Die explizite Form lautet

$$\mathbf{z}_j = \underbrace{\mathbf{Z}_j^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}_{gi}}{\partial \mathbf{p}_i} \mathbf{Z}_i \mathbf{z}_i}_{\mathbf{J}_{gi}} + \underbrace{\mathbf{Z}_j^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}_y}{\partial \mathbf{y}_g} \dot{\mathbf{y}}_g}_{\mathbf{J}_{gy}} + \underbrace{\mathbf{Z}_j^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{gi}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_y}{\partial t} \right)}_{\boldsymbol{\eta}_g(t)} = \mathbf{J}_{gi} \mathbf{z}_i + \mathbf{J}_{gy} \dot{\mathbf{y}}_g + \boldsymbol{\eta}_g(t) \quad (2.53)$$

\mathbf{G}_{gi} und \mathbf{G}_{gj} sind die impliziten Zwangsmatrizen. Sie haben die Dimension $u_g \infty 6$.

\mathbf{J}_{gi} und \mathbf{J}_{gy} sind die Jakobimatrizen der expliziten Zwangsbedingungen. Sie haben die

Dimension $6 \infty 6$ und $6 \infty f_g$. Sind die Zwangsbedingungen (2.47) von der Zeit unabhängig ist $\boldsymbol{\kappa}_g = \boldsymbol{\eta}_g = \mathbf{0}$.

A.5 Eqs. of Force Elements

Alle **eingepägten Kräfte und Momente** an Körpern werden durch **Kraftelemente** repräsentiert.

Eingepägte Kräfte/Momente sind

die Gewichtskraft (aktiv im Schwerpunkt S_i im Falle des starren Körpers),

äußere Kräfte und Momente am Körper, die inertialfest eingepägte werden,

Kräfte und Momente von Federn und Dämpfern zwischen zwei Körpern oder einem Körper und dem Gestell,

Kräfte und Momente von Aktoren und Antriebseinheiten zwischen zwei Körpern oder einem Körper und dem Gestell,

Reibkräfte und Reibmomente zwischen zwei Körpern oder einem Körper und dem Gestell

(Abschn. 2.4.3)

Merke: eingepägte Kräfte und Momente (applied forces and torques) prägen die Bewegung der Körper ein, initiieren somit ihre Bewegung.

Wir definieren allgemein ein Kraftelement mit Index f zwischen dem Körper i am **Marker P_f** und Körper j am **Marker Q_f** . Als Schnittgrößen setzen wir an P_f die eingepägte positive Kräfte \bar{F}_f und das eingepägte positive Moment \bar{M}_f an, am Marker Q_f sind die negativen Schnittgrößen zu finden.

Merke: Prüfe in Rechenprogrammen genau die Definition der positiven und negativen Schnittgrößen. Sie sind sehr unterschiedlich festgelegt.
Gegebenenfalls die Wirkrichtung von i nach j umkehren.

Für ein Kraftelement f muss ein **Kraftgesetz** vorliegen. Es kann eine Funktion der Zeit t oder/und der Kinematik der Bewegungen der beteiligten Körper i und j sein. Dazu sind spezielle Modelldaten erforderlich. Verschiedene Modelle sind in Abschnitt 2.4.1 zu finden.

Kraftgesetze können ein- oder mehrdimensional sein.

Aktive Kraftelemente, z.B. Aktuatoren, werden mit Hilfe von Sensoren gesteuert oder geregelt, siehe Vorlesung Regelungstechnik.

Eine allgemeine Darstellung der Kraftgesetze wäre (in Vektor- und Matrizenschreibweise in Basis $\bar{\mathbf{e}}_i$)

$$\begin{aligned}\bar{F}_f &= \bar{f}_1(t, \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j, \dots, \text{Parameter}), & \bar{M}_f &= \bar{f}_2(t, \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j, \dots, \text{Parameter}) \\ \mathbf{F}_f &= \mathbf{f}_1(t, \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j, \dots, \text{Parameter}), & \mathbf{M}_f &= \mathbf{f}_2(t, \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j, \dots, \text{Parameter})\end{aligned}\quad (2.56)$$

Die Vektoren werden vielfach in der Kraftelementbasis $B_f \{P_f, x_f, y_f, z_f\}$ dargestellt.

Für die verallgemeinerten eingepägten Kräfte – ein Teil von \mathbf{h}_i in (2.2), (2.3) bzw. \mathbf{h}_j – gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_i^a &= \sum_{f=1}^{\text{alle Kraftelemente an } i} \begin{pmatrix} \mathbf{F}_f \\ \tilde{\mathbf{r}}_{P_f} \mathbf{F}_f + \mathbf{M}_f \end{pmatrix} \\ \mathbf{h}_j^a &= \sum_{f=1}^{\text{alle Kraftelemente an } j} \begin{pmatrix} -\mathbf{A}^{ljT} \mathbf{A}^{li} \mathbf{F}_f \\ -\tilde{\mathbf{r}}_{Q_f} \mathbf{A}^{ljT} \mathbf{A}^{li} \mathbf{F}_f - \mathbf{A}^{ljT} \mathbf{A}^{li} \mathbf{M}_f \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2.57)$$

Definition Gewichtskraft

Mit m_i als Masse des Körpers i und \vec{g} als Erdbeschleunigungsvektor, wo $^I\vec{g} = \text{konst.}$ die Koordinaten in der Inertialbasis sind, ergibt sich die Gewichtskraft, aktiv im Schwerpunkt S_i des starren Körpers i , vgl. Bild 2.4,

$$\boxed{\vec{F}_{Gi} = m_i \vec{g}, \quad \mathbf{F}_{Gi} = {}^i\mathbf{F}_{Gi} = m_i \mathbf{A}^{liT} \mathbf{I} \mathbf{g}} \quad (2.58)$$

Definition axiales Kraftelemente

Zwischen Körper i am Marker P_f und Körper j am Marker Q_f wirkt das Kraftelement mit der Kraft \vec{F}_f , siehe Bild 2.10. An den Markern muss man sich Kugelgelenke vorstellen, so dass die Kraft an Körper i stets von P_f nach Q_f zeigt.

Für die Wirkrichtung und Abstand l_f gilt

$$\begin{aligned} \vec{r}_f &= \vec{\rho}_{Qf} - \vec{\rho}_{Pf} = \vec{\rho}_j + \vec{r}_{Qf} - \vec{\rho}_i - \vec{r}_{Pf}, \\ {}^i\mathbf{r}_f &= \mathbf{r}_f = \mathbf{A}^{liT} \mathbf{A}^{lj} ({}_j\mathbf{r}_{Qf}) - \mathbf{p}_i - \mathbf{r}_{Pf} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

folglich gilt $\vec{n}_f = \frac{\vec{r}_f}{|\vec{r}_f|}$ bzw. $\mathbf{n}_f = \frac{\mathbf{r}_f}{|\mathbf{r}_f|}$ und Abstand $l_f = |\vec{r}_f| = |\mathbf{r}_f|$

Für die Koordinaten des Kraftvektors am Marker $P_f = k_i$ in der Körperbasis \vec{e}_i findet man

$$\boxed{\mathbf{F}_{ki} = \mathbf{F}_f = \mathbf{n}_f F_f} \quad (2.60)$$

wo F_f die skalare Kraft ist. Für sie geben wir ein Kraftgesetz an.

Für $F_f > 0$ liegt eine **Zugkraft** vor, andernfalls eine Druckkraft.

Für die Kraft am Marker $Q_f = k_j$ in der Körperbasis \vec{e}_j gilt:

$$\boxed{\mathbf{F}_{kj} = -\mathbf{A}^{ljT} \mathbf{A}^{li} \mathbf{F}_f = -\mathbf{A}^{ljT} \mathbf{A}^{li} \mathbf{n}_f F_f} \quad (2.61)$$

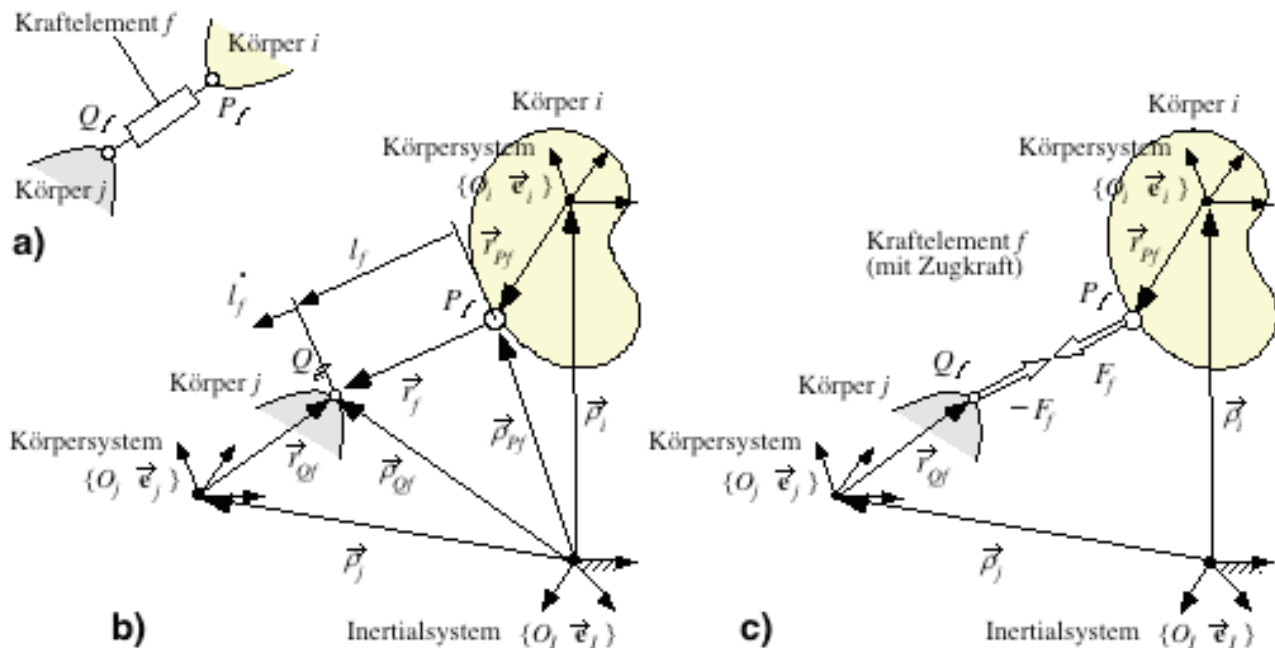


Bild 2.10: Kinematik (b) und Kinetik (c) am axialen Kraftelement (a). Kraft ist positiv am Körper i !

Definition lineare Zug/Druck-Feder mit linearer viskoser Dämpfung

Für die skalare Kraft F_f gilt

$$F_f = k_f (l_f - l_{f0}) + d_f \dot{l}_f \quad (2.62)$$

Hierin sind

- k_f die Federsteifigkeit,
- d_f die Dämpfungskonstante,
- l_f die aktuelle Federlänge,
- \dot{l}_f die aktuelle Abstandsgeschwindigkeit,
- l_{f0} die Einbau-Federlänge für Federkraft = 0.

Definition Kraftelemente um eine körperfeste Drehachse

Ist \mathbf{n}_f die körperfeste Drehachse, gesehen in Körperbasis $\bar{\mathbf{e}}_i$, so gilt für das eingeprägte Moment \bar{M}_f bzw. \mathbf{M}_f am Marker $P_f = ki$

$$\mathbf{M}_{ki} = \mathbf{M}_f = \mathbf{n}_f M_f \quad (2.63)$$

wo M_f das skalare Moment ist. Für sie geben wir wieder ein Kraftgesetz an.

Für das Moment \mathbf{M}_{kj} am Marker $Q_f = kj$ in der Körperbasis $\bar{\mathbf{e}}_j$ gilt in Analogie zu (2.61)

$$\mathbf{M}_{kj} = -\mathbf{A}^{ljT} \mathbf{A}^{li} \mathbf{M}_f = -\mathbf{A}^{ljT} \mathbf{A}^{li} \mathbf{n}_f M_f$$

Definition lineare Torsionsfeder mit linearer viskoser Dämpfung

Für das Moment M_f gilt

$$M_f = k_{Tf} (\varphi_f - \varphi_{f0}) + d_{Tf} \dot{\varphi}_f \quad (2.64)$$

Hierin sind

- k_{Tf} die Federsteifigkeit der Torsion,
- d_{Tf} die Dämpfungskonstante der Torsion,
- φ_f der aktuelle Drehwinkel,
- $\dot{\varphi}_f$ die aktuelle Winkelgeschwindigkeit,
- φ_{f0} der Einbau-Drehwinkel für Federmoment = 0.

Weitere Kraftelemente sind in Tabelle 2.3 zu finden.

- III FE-1 Push-pull spring with linear force law
- III FE-2 Translation damper with linear force law
- III FE-3 Compact spring element (spatial rubber)
- III FE-4 Spring-damper in parallel, direction equals interconnection line
- III FE-5 Compact spring element with damping, non- linear characteristics and clearance (spatial rubber)
- III FE-6 Spring damper element in series
- III FE-7 Simple Joint Friction (discontinuous)
- III FE-8 DC-motor with revolute transmission, control of voltage and speed, and control of the motor speed and torque
- III FE-9 DC motor with worm and nut transmission, control of voltage and speed, and control of the motor speed and torque
- II FE-10 Tyre model with fit to measurements graphs after E.Bakker, L.Nyborg, H.Pacejka
- II FE-11 Tire model after the similarity method of H. Pacejka with road irregularities
- II FE-12 Torsion-spring suspension (force law based on the joint state quantities)
- II FE-13 Spatial torsion-spring damper (force laws based on kinematic relative measurements)
- II FE-14 Gear box with elastic transmission
- II FE-15 Frequency-dependent excitation
- II FE-16 Time excitation for forces and moments with given direction of action
- II FE-17 Time excitation for forces and moments acting along the connection line between the coupling points
- II FE-18 One-sided contact element
- II FE-19 Force definition with FPARAM - Linking SIMPACK block simulation programs
- II FE-41 Spherical Linear Spring and Damper Parallel: given in B_i
- II FE-46 Call of MEDYNA User Elements Type 80 - 99 : given in M_i
- II FE-47 Call of MEDYNA User Elements Type 80 - 99 : given in PtP
- II FE-48 Call of MEDYNA User Elements Type 80 - 99 : spherical in M_i
- II FE-49 General SIMPACK Tyre
- II FE-85 Screw Pressure and Friction Force
- II FE-87 Contribute algebraic state $q(t)$ to the MBS differential algebraic equations
- II FE-88 Wheel-Rail Friction Force for Quick-Wheelset
- II FE-89 Wheel-Rail Friction Force for General Contact
- II FE-90 SIN-time excitation for forces and torques with given direction of action
- II FE-91 Hydraulic bearing with eigendynamic, caused by fluid movement
- II FE-92 Contact problem "belt and roll" in conveying systems
- II FE-93 Time excitation by $u(t)$ -vector for forces and torques with given direction of action
- II FE-94 Time excitation by $u(t)$ -vector for forces and torques acting along the connection line between the coupling points
- III FE-95 Hydropneumatic spring-damper (used by aero-planes)
- III FE-96 Tire force aero-plane drop test modelations
- III FE-97 Steering angle control in vehicle dynamics

III FE-98 Track ODE

III FE-99 Wheel/Rail Track Sleeper Spring-Damper

III FE-100 Friction with normal force given by other elements: B_i

III FE-101 Friction with normal force given by other elements: PtP

III FE-102 Dynamic force element (spring, damper) dependent on frequency response: given in B_i

III FE-103 Dynamic force element (spring, damper) dependent on frequency response: PtP

III FE-104 Nonlinear spring damper parallel with hysteresis: given in B_i

III FE-105 Nonlinear spring and damper with hysteresis: PtP

III FE-190 Nonlinear Force Element with Stick-Slip-Characteristics: PtP

III FE-191 Nonlinear Force Element with Stick-Slip-Characteristics and Force Element Input: PtP

III FE-192 Nonlinear Force Element with Stick-Slip-Characteristics and Constraint Force Input: PtP

III FE-195 Structure-Variable Contact Force between Two Surfaces

III FE-200 Wheel-Lift: Monitoring of Wheel/Rail Constraint

Tabelle A-1: Liste der Kraftelemente implementiert im MKS-Programm SIMPACK, V8.5

B Mass Geometry of a Body

B1 Derivation of Body Mass Data

Im vorherigem Abschnitt wurden die Massendaten einzelner Segmente vermessen. Mit Hilfe der Mechanik lassen sich aus den Segmentdaten die Massendaten von Körpern, bestehend aus mehreren Segmenten, berechnen. Dazu werden die Integrale für Masse, Schwerpunkt und Massenträgheitsmatrix in (5.4) mit der infinitesimalen Größe dm durch endliche Körperteile Δm ersetzt.

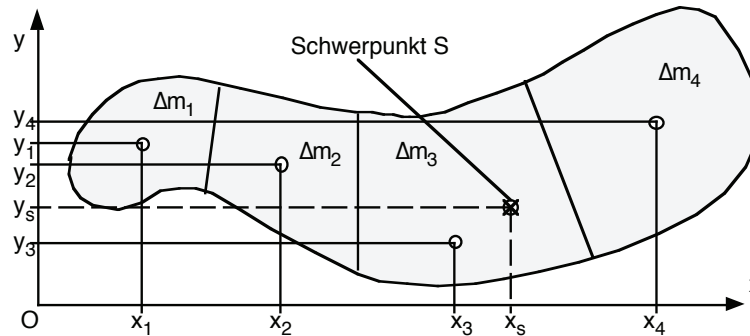


Bild B1: Körper bestehend aus 4 Einzelteilen

Es gilt somit für einen Körper nach Bild A1 mit $n = 4$ Körperteilen:

| Betrachtung | kontinuierlich | diskret |
|--|--|---|
| Masse | $m = \int_V \rho dV = \int_B dm$ | $m = \sum_{k=1}^n \Delta m_k$ |
| Massenmittelpunkt bez. O (Elemente des Vektors \mathbf{r}_{Si}), vgl. Abschnitt 2.1.1 | | |
| | $x_s = \frac{1}{m} \int_V \rho x dV = \frac{1}{m} \int_V x dm$ | $x_s = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n x_k \Delta m_k$ |
| | $y_s = \frac{1}{m} \int_V \rho y dV = \frac{1}{m} \int_V y dm$ | $y_s = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n y_k \Delta m_k$ |
| | $z_s = \frac{1}{m} \int_V \rho z dV = \frac{1}{m} \int_V z dm$ | $z_s = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n z_k \Delta m_k$ |

Es bedeuten hierin:

V = Volumen, ρ = Dichte, B = Bereich, n = Zahl der diskreten Teile mit Masse Δm_k am Ort x_k, y_k, z_k und Massenträgheitsmomenten $I_{Skxx}, I_{Skyy}, I_{Skzz}, I_{Skxy}, I_{Skxz}, I_{Skyz}$

m = Masse,

x_s, y_s, z_s = Koordinaten des Massenmittelpunkts (Schwerpunkts) bez. Ursprung O

$I_{Oxx}, I_{Oyy}, I_{Ozz}$ = Haupt-Massenträgheitsmomente um x -, y -, z -Achse bez. Ursprung O

$I_{Oxy}, I_{Oxz}, I_{Oyz}$ = Deviations-Massenträgheitsmomente bez. Ursprung O .

Massenträgheitsmomente bez. O (Elemente der Matrix \mathbf{I}_{O_i}), vgl. Abschnitt 2.1.1**Betrachtung** kontinuierlich

diskret

$$I_{Oxx} = \int_V (y^2 + z^2) dm \qquad I_{Oxx} = \sum_{k=1}^n \left(\Delta I_{Skxx} + (y_k^2 + z_k^2) \Delta m_k \right) \quad (3.17)$$

$$I_{Oyy} = \int_V (x^2 + z^2) dm \qquad I_{Oyy} = \sum_{k=1}^n \left(\Delta I_{Skyy} + (x_k^2 + z_k^2) \Delta m_k \right) \quad (3.18)$$

$$I_{Ozz} = \int_V (x^2 + y^2) dm \qquad I_{Ozz} = \sum_{k=1}^n \left(\Delta I_{Skzz} + (x_k^2 + y_k^2) \Delta m_k \right) \quad (3.19)$$

$$I_{Oxy} = - \int_V x y dm \qquad I_{Oxy} = \sum_{k=1}^n \left(\Delta I_{Skxy} - x_k y_k \Delta m_k \right) \quad (3.20)$$

$$I_{Oxz} = - \int_V x z dm \qquad I_{Oxz} = \sum_{k=1}^n \left(\Delta I_{Skxz} - x_k z_k \Delta m_k \right) \quad (3.21)$$

$$I_{Oyz} = - \int_V y z dm \qquad I_{Oyz} = \sum_{k=1}^n \left(\Delta I_{Skyz} - y_k z_k \Delta m_k \right) \quad (3.22)$$

Umrechnung der Massenträgheitsmomente bez. O auf den Massenmittelpunkt S_i des Körpers

Mit dem Schwerpunktsabstand $\mathbf{r}_S = (x_S, y_S, z_S)^T$ und Massenträgheitsmatrix \mathbf{I}_O bez. O folgen die Elemente der Massenträgheitsmatrix \mathbf{I}_S bez. S_i

$$I_{Sxx} = I_{Oxx} - (y_S^2 + z_S^2) m \quad (3.24)$$

$$I_{Syy} = I_{Oyy} - (x_S^2 + z_S^2) m \quad (3.25)$$

$$I_{Szz} = I_{Ozz} - (x_S^2 + y_S^2) m \quad (3.26)$$

$$I_{Sxy} = I_{Oxy} + x_S y_S m \quad (3.27)$$

$$I_{Sxz} = I_{Oxz} + x_S z_S m \quad (3.28)$$

$$I_{Syz} = I_{Oyz} + y_S z_S m \quad (3.29)$$

**Beachte: Bezüglich Massenmittelpunkt sind die Hauptträgheitsmomente am kleinsten,
aber immer noch > 0**

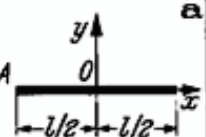
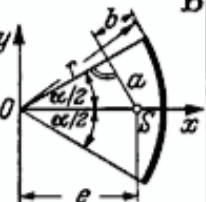
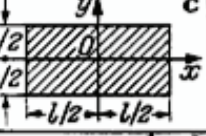
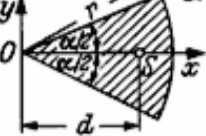
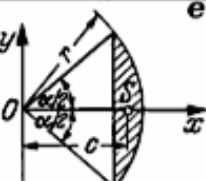
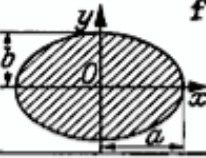
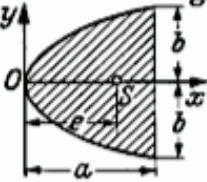
B2 Mass Moment of Inertia for Typical Body Shapes

Schwerpunkt = CM, Hauptdrehmassen = Mass moment of inertia

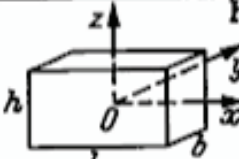
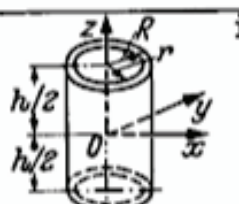
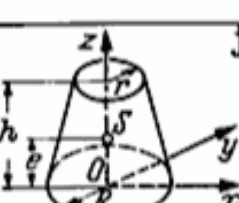
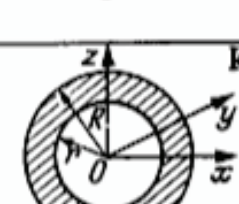
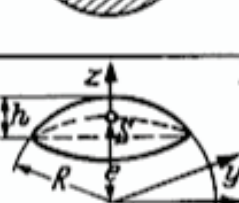
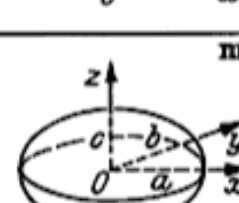

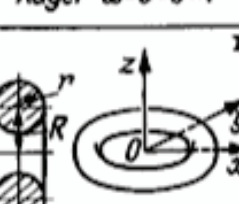
Massenträgheitsmomente homogener Linien, Flächen und Körper

aus Falk, Techn. Mechanik, Band 2, Springer-Verlag 1986.

Tabelle 3a—g. Schwerpunkte und Hauptdrehmassen
einiger homogener Linien und Flächen

| | | Länge bzw. Fläche | Schwerpunkt | Hauptdrehmassen | | | Bezugspunkte |
|-----------------|---|---|---|---|---|--|--------------|
| | | | | Θ_{xx} | Θ_{yy} | $\Theta_{zz} = \Theta_{pol} = \Theta_{xx} + \Theta_{yy}$ | |
| Stab |  | l | $S = 0$ | 0 | $m \frac{l^2}{12}$ | $m \frac{l^2}{12}$ | S |
| | | | | 0 | $m \frac{l^2}{3}$ | $m \frac{l^2}{3}$ | A |
| Kreisbogen |  | $r \cdot \alpha$ | $a = \frac{r}{\alpha}(1 - \cos \alpha)$ $b = \frac{r}{\alpha}(\alpha - \sin \alpha)$ $e = r \frac{\sin \alpha/2}{\alpha/2}$ | $m \frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)$ | $m \frac{r^2}{2} \left(1 + \frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)$ | $m r^2$ | O |
| Rechteck |  | lb | $S = 0$ | $m \frac{b^2}{12}$ | $m \frac{l^2}{12}$ | $m \frac{b^2 + l^2}{12}$ | S |
| Kreisausschnitt |  | $\frac{r^2}{2} \alpha$ | $d = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha/2}{\alpha/2}$ | $m \frac{r^2}{4} \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)$ | $m \frac{r^2}{4} \left(1 + \frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)$ | $\frac{m r^2}{2}$ | O |
| | | Vollkreis: $\alpha = 2\pi$ πr^2 | $d = 0$ | $m \frac{r^2}{4}$ | $m \frac{r^2}{4}$ | $\frac{m r^2}{2}$ | O |
| Kreisabschnitt |  | $\frac{r^2}{2}(\alpha - \sin \alpha)$ | $c = \frac{4}{3} r \frac{\sin^3 \alpha/2}{\alpha - \sin \alpha}$ | $\frac{m r^2}{4} \left(1 - \frac{\delta}{3}\right)$ | $\frac{m r^2}{4} (1 + \delta)$ | $\frac{m r^2}{2} \left(1 + \frac{\delta}{3}\right)$ | O |
| | | | | mit $\delta = \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha} \sin \alpha$ | | | |
| Ellipse |  | $ab\pi$ | $S = 0$ | $\frac{m b^2}{4}$ | $\frac{m a^2}{4}$ | $m \frac{b^2 + a^2}{4}$ | S |
| Parabel |  | $\frac{4}{3} ab$ | $e = \frac{3}{5} a$ | $m \frac{b^2}{5}$ | $m \frac{3a^2}{7}$ | $m \frac{7b^2 + 15a^2}{35}$ | O |

homogener Körper

| | Volumen | Schwerpunkt | Hauptdrehmassen bezüglich O | | |
|--|------------------------------------|---|--|---|---------------------------|
| | | | $\Theta_{xx} = C$ | $\Theta_{yy} = B$ | $\Theta_{zz} = A$ |
| Quader  | $h b l$ | $S = 0$ | $\frac{m}{12}(b^2 + h^2)$ | $\frac{m}{12}(l^2 + h^2)$ | $\frac{m}{12}(b^2 + l^2)$ |
| Hohlzylinder  | $\pi h (R^2 - r^2)$ | $S = 0$ | $\frac{m}{4}(R^2 + r^2 + \frac{h^2}{3})$ | $\frac{m}{2}(R^2 + r^2)$ | |
| Kegelsumpf  | $\frac{\pi}{3} h (R^2 + Rr + r^2)$ | $e = \frac{h}{4} \cdot \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}$ | $\frac{m}{20} \left[3(R^2 + r^2) + \frac{(2R^2 + 6Rr + 12r^2)h^2 + 3R^2r^2}{R^2 + Rr + r^2} \right]$ | $\frac{3m}{10} \cdot \frac{R^5 - r^5}{R^2 - r^2}$ | |
| Hohlkugel  | $\frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3)$ | $S = 0$ | $\frac{2}{5} m \cdot \frac{R^5 - r^5}{R^2 - r^2} = \frac{2}{5} m R^2 \left[1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{r^2}{R^2 + Rr + r^2} \right]$ | | |
| Kugelskappe  | $\frac{\pi}{3} h^2 (3R - h)$ | $e = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2R - h)^2}{3R - h}$ | $\frac{1}{2} m \left[2R^2 + \frac{3}{2} h^2 - \frac{30R^2 - 3h^2}{5(3R - h)} h \right]$ | $\frac{m}{10} h \frac{20R^2 - 15Rh + 3h^2}{3R - h}$ | |
| Ellipsoid  | $\frac{4}{3} \pi a b c$ | $S = 0$ | $\frac{m}{5}(b^2 + c^2)$ | $\frac{m}{5}(a^2 + c^2)$ | $\frac{m}{5}(a^2 + b^2)$ |
| Kugel $a=b=c=r$  | $\frac{4}{3} \pi r^3$ | $S = 0$ | $\frac{2}{5} m r^2$ | | |
| Toroid  | $2\pi^2 R \cdot r^2$ | $S = 0$ | $\frac{m}{8}(4R^2 + 5r^2)$ | $\frac{m}{4}(4R^2 + 3r^2)$ | |