Lösungen der Aufgaben aus Kap. 5 (siehe auch Internet)

Aufgabe 5.1: Kinematik zu Abschnitt 5.3.2, Bild 5.11.

a) Berechne $\mathbf{r}_E$, wenn eine Drehmatrix $\mathbf{A}^{0G}$ mit $\alpha = 90°$, $\beta = \gamma = 0°$ vorliegt und die Vektoren die folgenden Koordinaten haben: $\mathbf{r}_G = (80, 40, 125)^T$ cm und ${}^G\mathbf{r}_{EG} = (20, -10, -20)^T$ cm.

$$\mathbf{A}^{0G} = \mathbf{A}^{0G}(\alpha{=}90°)\ \mathbf{A}^{0G}(\beta{=}0°)\ \mathbf{A}^{0G}(\gamma{=}0°) = \mathbf{A}^{0G}(\alpha{=}90°)\ \mathbf{E}\ \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{r}_E = {}^0\mathbf{r}_E = {}^0\mathbf{r}_G + \mathbf{A}^{0G}\ {}^G\mathbf{r}_{EG} = \begin{pmatrix} 80 \\ 40 \\ 125 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ -10 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 40 \\ 125 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 115 \end{pmatrix};$$

b) Bestimme die Drehmatrix $\mathbf{A}^{GE}$ mit den Winkeln $\alpha = 0$, $\beta = 45°$ und $\gamma = 0$ und die Matrix $\mathbf{A}^{0E}$.

$$\mathbf{A}^{GE} = \mathbf{A}^{GE}(\alpha{=}0°)\ \mathbf{A}^{GE}(\beta{=}45°)\ \mathbf{A}^{GE}(\gamma{=}0°) = \mathbf{E}\ \mathbf{A}^{GE}(\beta{=}45°)\ \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0.707 & 0 & 0.707 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.707 & 0 & 0.707 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}^{0E} = \mathbf{A}^{OG}\ \mathbf{A}^{GE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.707 & 0 & 0.707 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.707 & 0 & 0.707 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.707 & 0 & 0.707 \\ 0.707 & 0 & -0.707 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

c) Bilde aus den Drehmatrizen und Ortsvektoren die Transformationsmatrizen $\mathbf{T}^{0G}$, $\mathbf{T}^{GE}$, $\mathbf{T}^{0E}$.

$$\mathbf{T}^{0G} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}^{OG} & {}^O\mathbf{r}_G \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & -1 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & 125 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right); \quad \mathbf{T}^{GE} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}^{GE} & {}^G\mathbf{r}_{EG} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0.707 & 0 & 0.707 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ -0.707 & 0 & 0.707 & -20 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

$$\mathbf{T}^{0E} = \mathbf{T}^{0G}\ \mathbf{T}^{GE} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0.707 & 0 & 0.707 & 100 \\ 0.707 & 0 & -0.707 & 60 \\ 0 & 1 & 0 & 115 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}^{OE} & {}^O\mathbf{r}_E \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right);$$

d) Bestimme aus $\mathbf{A}^{0E}$ die Drehwinkel α, β, γ.

$$\mathbf{A}^{0E} = \begin{pmatrix} 0.707 & 0 & 0.707 \\ 0.707 & 0 & -0.707 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{s. S.4.5:} \begin{cases} \beta = \arcsin\left(A_{13}^{OE}\right) = \arcsin(0.707) = 45° \\ \alpha = \arctan\dfrac{-A_{23}^{OE}}{A_{33}^{OE}} = \arctan\dfrac{0.707}{0} = 90° = \arcsin\dfrac{-A_{23}^{OE}}{\cos\beta} = \arcsin\dfrac{0.707}{0.707} \\ \gamma = \arctan\dfrac{-A_{12}^{OE}}{A_{11}^{OE}} = \arctan\dfrac{0}{0.707} = 0° = \arcsin\dfrac{-A_{12}^{OE}}{\cos\beta} = \arcsin\dfrac{0}{0.707} \end{cases}$$

e) Bestimme aus $\mathbf{DH}^{0E} = \mathbf{T}^{0E}$ die 4 DH-Parameter.

s. S. 5.13:
$$\theta_j = \arctan\frac{DH_{21}}{DH_{11}} = \arctan\frac{0.707}{0.707} = 45°, \qquad \lambda_j = \arctan\frac{DH_{32}}{DH_{33}} = \arctan\frac{1}{0} = 90°,$$

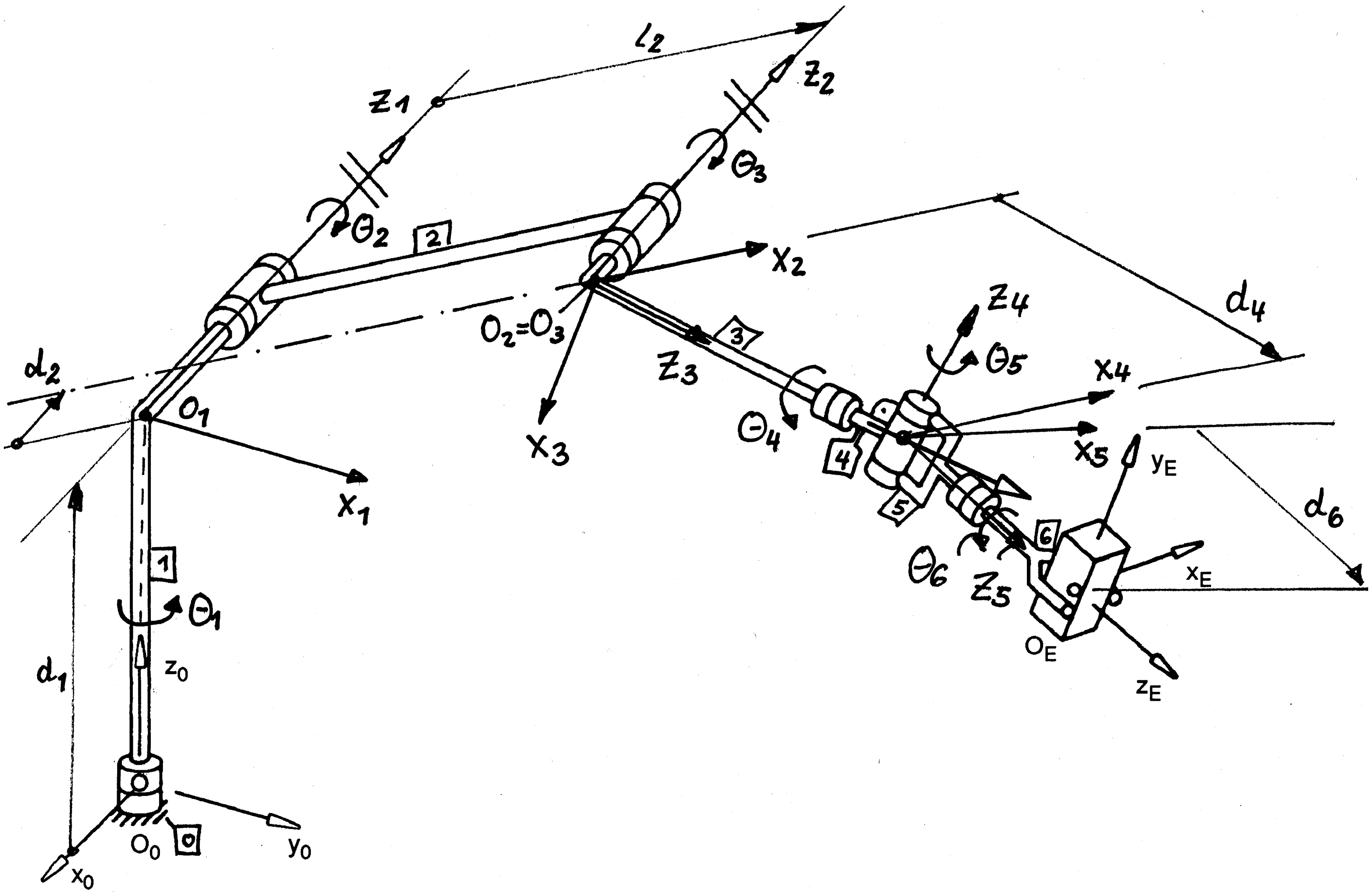
$$d_j = DH_{34} = 115, \quad l_j = \sqrt{DH_{14}^2 + DH_{24}^2} = \sqrt{100^2 + 60^2} = 116.6$$

Rückrechnung: $\mathbf{DH}^{0E}$ aus den Parametern $= \left(\begin{array}{ccc|c} 0.707 & 0 & 0.707 & 82.46 \\ 0.707 & 0 & -0.707 & 82.46 \\ 0 & 1 & 0 & 115 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \neq \left(\begin{array}{ccc|c} 0.707 & 0 & 0.707 & 100 \\ 0.707 & 0 & -0.707 & 60 \\ 0 & 1 & 0 & 115 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$,

d.h. die Parameter sind falsch, da $\mathbf{T}^{0E}$ keine Matrix nach Denavit-Hartenberg!

Aufgabe 5.2: Zu DH-Matrizen

Bestimme die DH-Parameter des sechs-achsigen Knickarm-Roboters und stelle die 6 DH-Matrizen auf.



Gelenk j zw. Glied (i und j)	Winkel θ_j $= \angle(x_i, x_j)$ um z_i	Abstand d_j $= \perp(x_i, x_j)$ in z_i	Abstand l_j $=\perp(z_i, z_j)$ in x_j	Winkel λ_j $= \angle(z_i, z_j)$ um x_j	*Bemerkungen*
1 -> (0,1)	$\theta_1 \approx 90°$	d_1	0	–90°	$x_1 \perp$ im Schnitt mit z_0 & z_1 -> O_1
2 -> (1,2)	$\theta_2 \approx -30°$	d_2	l_2	0	$x_2 \perp$ im Schnitt mit z_1 & z_2 -> O_2 beliebig auf z_2
3 -> (2,3)	$\theta_3 \approx 120°$	0	0	90°	$x_3 \perp$ im Schnitt mit z_2 & z_3 -> $O_3 = O_2$
4 -> (3,4)	$\theta_4 \approx -90°$	d_4	0	–90°	$x_4 \perp$ im Schnitt mit z_3 & z_4 -> O_4
5 -> (4,5)	$\theta_5 \approx -20°$	0	0	90°	$x_5 \perp$ im Schnitt mit z_4 & z_5 -> $O_5 = O_4$
6 -> (5,E)	$\theta_6 \approx 20°$	d_6	0	0	$x_E \perp$ im Schnitt mit z_5 & z_E -> O_E beliebig auf z_E

Global gilt: y_i senkrecht zu x_i und z_i!

θ_j sind Gelenkkoordinaten, ihre Werte sind aus der Zeichnung entnommen!

DH-Matrizen: $\mathbf{DH}^{ij} = f(\theta_j, \lambda_j, d_j, l_j)$, siehe S. 5.13

$$\mathbf{DH}^{01} = \left(\begin{array}{ccc:c} c\theta_1 & 0 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & 0 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right); \quad \mathbf{DH}^{12} = \left(\begin{array}{ccc:c} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & l_2 c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & l_2 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

$$\mathbf{DH}^{23} = \left(\begin{array}{ccc:c} c\theta_3 & 0 & s\theta_1 & 0 \\ s\theta_3 & 0 & -c\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right); \quad \mathbf{DH}^{34} = \left(\begin{array}{ccc:c} c\theta_4 & 0 & -s\theta_4 & 0 \\ s\theta_4 & 0 & c\theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

$$\mathbf{DH}^{45} = \left(\begin{array}{ccc:c} c\theta_5 & 0 & s\theta_5 & 0 \\ s\theta_5 & 0 & -c\theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right); \quad \mathbf{DH}^{5E} = \left(\begin{array}{ccc:c} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

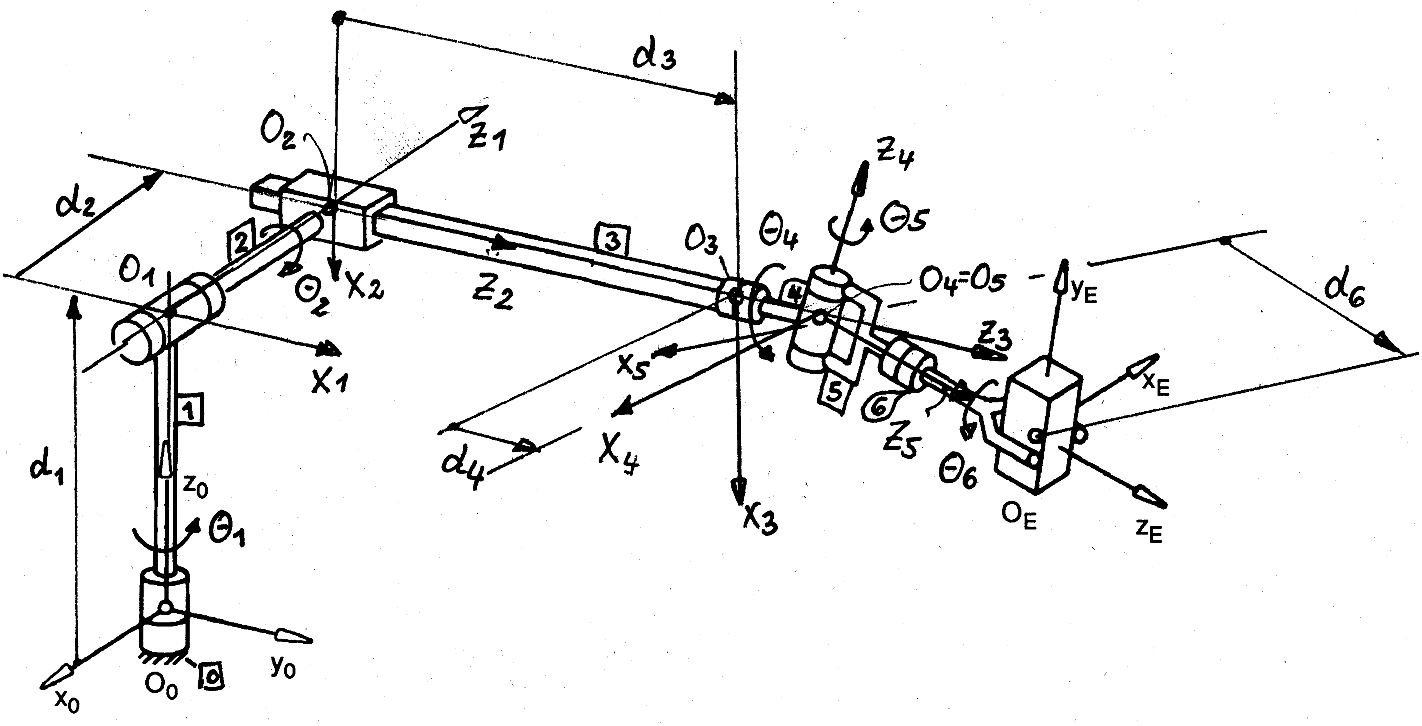
$\mathbf{DH}^{0E} = \mathbf{DH}^{01}\ \mathbf{DH}^{12}\ \mathbf{DH}^{23}\ \mathbf{DH}^{34}\ \mathbf{DH}^{45}\ \mathbf{DH}^{5E}$ = (laut Mathematica ein langer Ausdruck !!!!)

```
{{Cos[theta6] (Cos[
        theta5] (Cos[
           theta4] (Cos[theta1] Cos[theta2] Cos[theta3] -
            Cos[theta1] Sin[theta2] Sin[theta3]) -
         Sin[theta1] Sin[theta4]) + (-Cos[theta1] Cos[theta3] Sin[
           theta2] - Cos[theta1] Cos[theta2] Sin[theta3]) Sin[
        theta5]) + (-Cos[theta4] Sin[theta1] - (Cos[theta1] Cos[theta2] Cos[theta3] -
         Cos[theta1] Sin[theta2] Sin[theta3]) Sin[theta4]) Sin[theta6],
  Cos[theta6] (-Cos[theta4] Sin[ theta1] - (Cos[theta1] Cos[theta2] Cos[theta3] -
         Cos[theta1] Sin[theta2] Sin[theta3]) Sin[theta4]) - (Cos[ theta5] (Cos[
           theta4] (Cos[theta1] Cos[theta2] Cos[theta3] -
            Cos[theta1] Sin[theta2] Sin[theta3]) -
         Sin[theta1] Sin[theta4]) + (-Cos[theta1] Cos[theta3] Sin[
           theta2] - Cos[theta1] Cos[theta2] Sin[theta3]) Sin[theta5]) Sin[
     theta6], -Cos[theta5] (-Cos[theta1] Cos[theta3] Sin[theta2] -
      Cos[theta1] Cos[theta2] Sin[theta3]) + (Cos[
        theta4] (Cos[theta1] Cos[theta2] Cos[theta3] -
         Cos[theta1] Sin[theta2] Sin[theta3]) - Sin[theta1] Sin[theta4]) Sin[theta5],
  l2 Cos[theta1] Cos[theta2] - d2 Sin[theta1] +
   d4 (Cos[theta1] Cos[theta3] Sin[theta2] + Cos[theta1] Cos[theta2] Sin[theta3]) +
   d6 (-Cos[theta5] (-Cos[theta1] Cos[theta3] Sin[theta2] -
         Cos[theta1] Cos[theta2] Sin[theta3]) + (Cos[theta4] (Cos[theta1] Cos[theta2] Cos[theta3] -
            Cos[theta1] Sin[theta2] Sin[theta3]) - Sin[theta1] Sin[theta4]) Sin[theta5])},
  {Cos[theta6] (Cos[theta5] (Cos[ theta4] (Cos[theta2] Cos[theta3] Sin[theta1] -
            Sin[theta1] Sin[theta2] Sin[theta3]) +
         Cos[theta1] Sin[theta4]) + (-Cos[theta3] Sin[theta1] Sin[
```

```
        theta2] - Cos[theta2] Sin[theta1] Sin[theta3]) Sin[theta5]) + (Cos[theta1] Cos[
      theta4] - (Cos[theta2] Cos[theta3] Sin[theta1] -
       Sin[theta1] Sin[theta2] Sin[theta3]) Sin[theta4]) Sin[theta6],
Cos[theta6] (Cos[theta1] Cos[theta4] - (Cos[theta2] Cos[theta3] Sin[theta1] -
       Sin[theta1] Sin[theta2] Sin[theta3]) Sin[theta4]) - (Cos[theta5] (Cos[
        theta4] (Cos[theta2] Cos[theta3] Sin[theta1] -
         Sin[theta1] Sin[theta2] Sin[theta3]) +
       Cos[theta1] Sin[theta4]) + (-Cos[theta3] Sin[theta1] Sin[
   theta2] - Cos[theta2] Sin[theta1] Sin[theta3]) Sin[theta5]) Sin[
  theta6], -Cos[theta5] (-Cos[theta3] Sin[theta1] Sin[theta2] -
   Cos[theta2] Sin[theta1] Sin[theta3]) + (Cos[
      theta4] (Cos[theta2] Cos[theta3] Sin[theta1] - Sin[theta1] Sin[theta2] Sin[theta3]) +
   Cos[theta1] Sin[theta4]) Sin[theta5],
d2 Cos[theta1] + l2 Cos[theta2] Sin[theta1] + d4 (Cos[theta3] Sin[theta1] Sin[theta2] +
   Cos[theta2] Sin[theta1] Sin[theta3]) +
 d6 (-Cos[theta5] (-Cos[theta3] Sin[theta1] Sin[theta2] -
       Cos[theta2] Sin[theta1] Sin[theta3]) + (Cos[
        theta4] (Cos[theta2] Cos[theta3] Sin[theta1] -
         Sin[theta1] Sin[theta2] Sin[theta3]) +
       Cos[theta1] Sin[theta4]) Sin[theta5])}, {Cos[
  theta6] (Cos[theta4] Cos[
      theta5] (-Cos[theta3] Sin[theta2] -
       Cos[theta2] Sin[theta3]) + (-Cos[theta2] Cos[theta3] +
       Sin[theta2] Sin[theta3]) Sin[theta5]) - (-Cos[theta3] Sin[
      theta2] - Cos[theta2] Sin[theta3]) Sin[theta4] Sin[
  theta6], -Cos[theta6] (-Cos[theta3] Sin[theta2] -
   Cos[theta2] Sin[theta3]) Sin[theta4] - (Cos[theta4] Cos[
      theta5] (-Cos[theta3] Sin[theta2] -
       Cos[theta2] Sin[theta3]) + (-Cos[theta2] Cos[theta3] +
       Sin[theta2] Sin[theta3]) Sin[theta5]) Sin[theta6], -Cos[theta5] (-Cos[theta2] Cos[theta3] +
   Sin[theta2] Sin[theta3]) +
 Cos[theta4] (-Cos[theta3] Sin[theta2] - Cos[theta2] Sin[theta3]) Sin[theta5],
d1 - l2 Sin[theta2] +
 d4 (Cos[theta2] Cos[theta3] - Sin[theta2] Sin[theta3]) +
 d6 (-Cos[theta5] (-Cos[theta2] Cos[theta3] + Sin[theta2] Sin[theta3]) +
   Cos[theta4] (-Cos[theta3] Sin[theta2] -
       Cos[theta2] Sin[theta3]) Sin[theta5])}, {0, 0, 0, 1}}
```

Aufgabe 5.3: Zu DH-Matrizen

Bestimme die DH-Parameter des sechs-achsigen Roboters mit "Stanford-Arm" sowie die 6 DH-Matrizen



Gelenk j zw. Glied (i und j)	Winkel θ_j $= \angle(x_i, x_j)$ um z_i	Abstand d_j $= \perp(x_i, x_j)$ in z_i	Abstand l_j $=\perp(z_i, z_j)$ in x_j	Winkel λ_j $= \angle(z_i, z_j)$ um x_j	*Bemerkungen*
1 -> (0,1)	$\theta_1 \approx 90°$	d_1	0	–90°	$x_1 \perp$ im Schnitt mit z_0 & z_1 -> O_1
2 -> (1,2)	$\theta_2 \approx 90°$	d_2	0	+90°	$x_2 \perp$ im Schnitt mit z_1 & z_2 -> O_2
3 -> (2,3)	0	d_3	0	0	$x_3 \perp$ im Schnitt mit z_2 & z_3 -> O_3 beliebig auf z_3
4 -> (3,4)	$\theta_4 \approx -90°$	d_4	0	+90°	$x_4 \perp$ im Schnitt mit z_3 & z_4 -> O_4
5 -> (4,5)	$\theta_5 \approx -20°$	0	0	–90°	$x_5 \perp$ im Schnitt mit z_4 & z_5 -> $O_5 = O_4$
6 -> (5,E)	$\theta_6 \approx 200°$	d_6	0	0	$x_E \perp$ im Schnitt mit z_5 & z_E -> O_E beliebig auf z_E

Global gilt: y_i senkrecht zu x_i und z_i!

θ_1, θ_2, θ_4, θ_5, θ_6, d_3 sind Gelenkkoordinaten, ihre Werte sind aus der Zeichnung entnommen!

DH-Matrizen: $\mathbf{DH}^{ij} = f(\theta_j, \lambda_j, d_j, l_j)$, siehe S. 5.13

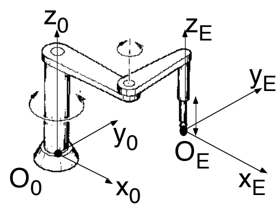
$$\mathbf{DH}^{01} = \left(\begin{array}{ccc|c} c\theta_1 & 0 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & 0 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right); \quad \mathbf{DH}^{12} = \left(\begin{array}{ccc|c} c\theta_2 & 0 & s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & 0 & -c\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

$$\mathbf{DH}^{23} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right); \quad \mathbf{DH}^{34} = \left(\begin{array}{ccc|c} c\theta_4 & 0 & s\theta_4 & 0 \\ s\theta_4 & 0 & -c\theta_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

$$\mathbf{DH}^{45} = \left(\begin{array}{ccc|c} c\theta_5 & 0 & -s\theta_5 & 0 \\ s\theta_5 & 0 & c\theta_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right); \quad \mathbf{DH}^{5E} = \left(\begin{array}{ccc|c} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

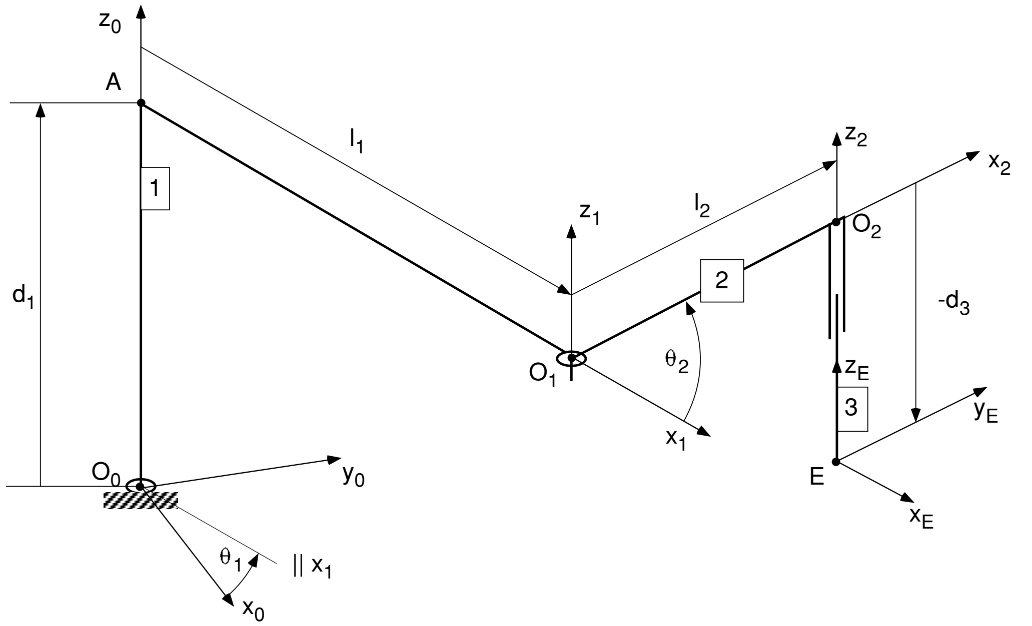
$\mathbf{DH}^{0E} = \mathbf{DH}^{01}\ \mathbf{DH}^{12}\ \mathbf{DH}^{23}\ \mathbf{DH}^{34}\ \mathbf{DH}^{45}\ \mathbf{DH}^{5E}$ = (laut Mathematica ein langer Ausdruck !!!!)

Aufgabe 5.4: Kinematik des DDS-Roboters



Geg: Höhe des Turms: 600mm, Länge Oberarm: 400 mm, Länge Unterarm: 350 mm, Höhe des Effektors 200 mm, Koordinatensysteme nach Skizze -->>.

a) Stelle die DH-Parameter und DH-Matrizen für alle Gelenke auf.



Die **Gelenkkoordinaten sind θ_1, θ_2, und d_3**. Achtung d_3 hat negative Werte, da d_3 entgegen z_2.

Gelenk j zw. Glied (i und j)	Winkel $\theta_j = \angle(x_i, x_j)$ um z_i	Abstand $d_j = \perp(x_i, x_j)$ in z_i	Abstand $l_j = \perp(z_i, z_j)$ in x_j	Winkel $\lambda_j = \angle(z_i, z_j)$ um x_j
1 ->(0,1)	θ_1	600 mm	400 mm	0
2 ->(1.2)	θ_2	0	350 mm	0
3 =E ->(2,3)	-90°	d_3 = -200 mm	0	0

DH-Matrizen: $\mathbf{DH}^{ij} = f(\theta_j, \lambda_j, d_j, l_j)$, siehe S. 5.13

$$\mathbf{DH}^{01} = \begin{pmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & l_1\cos\theta_1 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & l_1\sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{DH}^{12} = \begin{pmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & l_2\cos\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & l_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{DH}^{23} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{DH}^{0E} = \mathbf{DH}^{01}\ \mathbf{DH}^{12}\ \mathbf{DH}^{23} = \begin{pmatrix} \mathrm{Sin}[\theta_1+\theta_2] & \mathrm{Cos}[\theta_1+\theta_2] & 0 & 400\,\mathrm{Cos}[\theta_1] + 350\,\mathrm{Cos}[\theta_1+\theta_2] \\ -\mathrm{Cos}[\theta_1+\theta_2] & \mathrm{Sin}[\theta_1+\theta_2] & 0 & 400\,\mathrm{Sin}[\theta_1] + 350\,\mathrm{Sin}[\theta_1+\theta_2] \\ 0 & 0 & 1 & 600 + d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Bestimme exakt die Gelenkkoordinaten des Scara-Roboters für eine Position ${}^0\mathbf{r}_E = (200, 400, 300)^T$ mm.

ii) mittels analytischen Gleichungen (siehe Abschn. 5.3.4)

$z_E = 600 + d_3 = 300$ --> $\underline{\underline{d_3 = -300.}}$

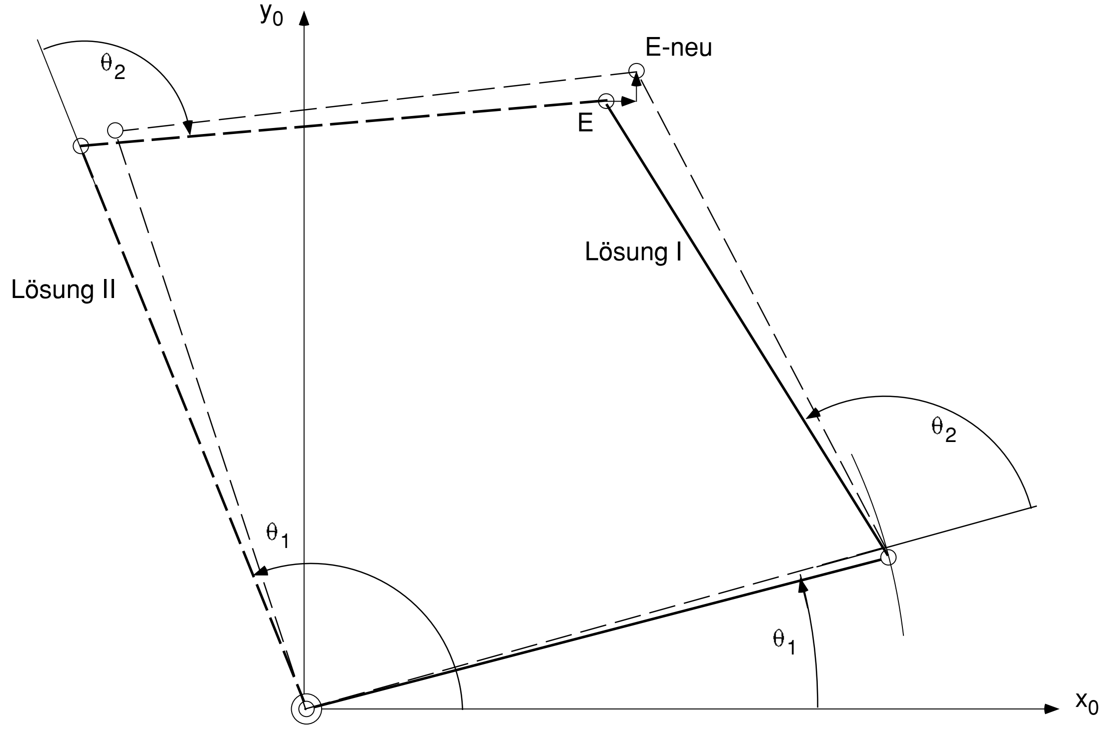
Strecke $c = AO_2 = \sqrt{x_E^2 + y_E^2} = \sqrt{200^2 + 400^2} = 447.21$ mm Vgl. Übung 5.2!

$\alpha = \arccos \dfrac{l_2^2 + c^2 - l_1^2}{2cl_2} = 58.73°$; $\beta = \arcsin(350/400 \sin\alpha) = 48.41°$

Lösung I: $\underline{\underline{\theta_1}} = \arctan(y_E / x_E) - \beta = \underline{\underline{15.03°}}$ $\underline{\underline{\theta_2 = \alpha + \beta = 107.14°}}$

Lösung II: $\underline{\underline{\theta_1}} = \arctan(y_E / x_E) - (-\beta) = \underline{\underline{111.84°}}$ $\underline{\underline{\theta_2 = -(\alpha + \beta) = -107.14°}}$

i) mittels Graphik, Längenmaßstab M_S = 1 mm / 50 mm Wirklichkeit.



Lösung I: $\theta_1 = 15°$, $\theta_2 = 107°$ Lösung II: $\theta_1 = 112°$, $\theta_2 = -107°$

c) Ermitte die neuen Gelenkkoordinaten für eine Positionsänderung Δr_E = {20, 20, 20} mm

i) mittels Graphik: $\mathbf{r}_{E\text{-}Neu} = \mathbf{r}_E + \Delta\mathbf{r}_E = (220, 420, 320)^T$;

Lösung I: $\theta_1 = 16°$, $\theta_2 = 102°$, $d_3 = -280$ mm; Lösung II: $\theta_1 = 109°$, $\theta_2 = -102°$, $d_3 = -280$ mm;

ii) mittels Jacobi-Matrix, siehe Abschn. 5.3.6:

$\mathbf{J}_E$ = aus der Ableitung von x_E, y_E, z_E nach den Gelenkkordinaten θ_1, θ_2, d_3: Für Lösung I folgt

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{Sin}[\theta_1]\, l_1 - \mathrm{Sin}[\theta_1+\theta_2]\, l_2 & -\mathrm{Sin}[\theta_1+\theta_2]\, l_2 & 0 \\ \mathrm{Cos}[\theta_1]\, l_1 + \mathrm{Cos}[\theta_1+\theta_2]\, l_2 & \mathrm{Cos}[\theta_1+\theta_2]\, l_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -400. & -296.285 & 0. \\ 200. & -186.32 & 0. \\ 0. & 0. & 1. \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}_E^{-1} = \begin{pmatrix} -0.00139268 & 0.00221464 & 0. \\ -0.00149494 & -0.00298987 & 0. \\ 0. & 0. & 1. \end{pmatrix}. \text{ Folgt } \Delta\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \\ \Delta d_3 \end{pmatrix} = \mathbf{J}_E^{-1}\,\Delta\mathbf{r}_E = \begin{pmatrix} 0.01644\,\mathrm{rad} \\ -0.08970\,\mathrm{rad} \\ -280\,\mathrm{mm} \end{pmatrix}$$

Neue Lösung I : $\mathbf{q}_I + \Delta\mathbf{q}$ = (15.97°, 102.00°, -280 mm)^T.

Aufgabe 5.5: Sauggreifer

Eine Glasplatte mit einem Gewicht von 10 kg soll durch einen Sauggreifer mit 4 Saugnapfen angehoben werden. Der Saugdruck ist 0.7 bar. Normaldruck =1 bar, rechne mit g = 10 m/s^2.

Wie groß muß der Durchmesser eines Napfes mindestens sein, um die Platte zu heben?

Normaldruck p_0 = 1 bar = 10 N/cm^2;

Gewicht $F_g = m\, g$ = 10 kg 10 m/s^2 = 100 N;

$F_g / 4 = F_{saug} = A\,(p_0 - p_{saug})$

-> $A = d^2 \pi / 4 = (F_g/4) \;/\; (p_0 - p_{saug})$ = 25 N / 3 Ncm^{-2} = 8.33 cm^2

-> $d = 3.3$ cm