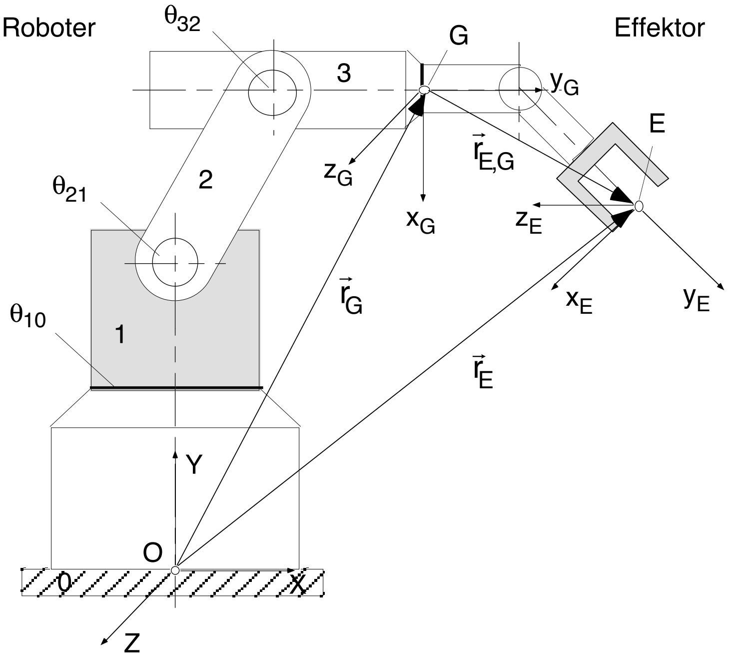
Lösungen der Aufgaben aus Kap. 4 (siehe auch Internet)

Aufgabe 4.1: Gegeben ist ein Knickarmroboter

mit den Gelenkwinkel $\theta_{10} = 0°$, $\theta_{21} = -30°$, $\theta_{32} = -60°$,

und Koordinaten der Ortsvektoren: ${}^{0}\mathbf{r}_G = (40, 125, 0)^T$, ${}^{G}\mathbf{r}_{EG} = (30, -20, 25)^T$



Berechne: Die Drehmatrix $\mathbf{A}^{0G}$ sowie die Koordinaten des Ortsvektors des Effektors ${}^{0}\mathbf{r}_E$

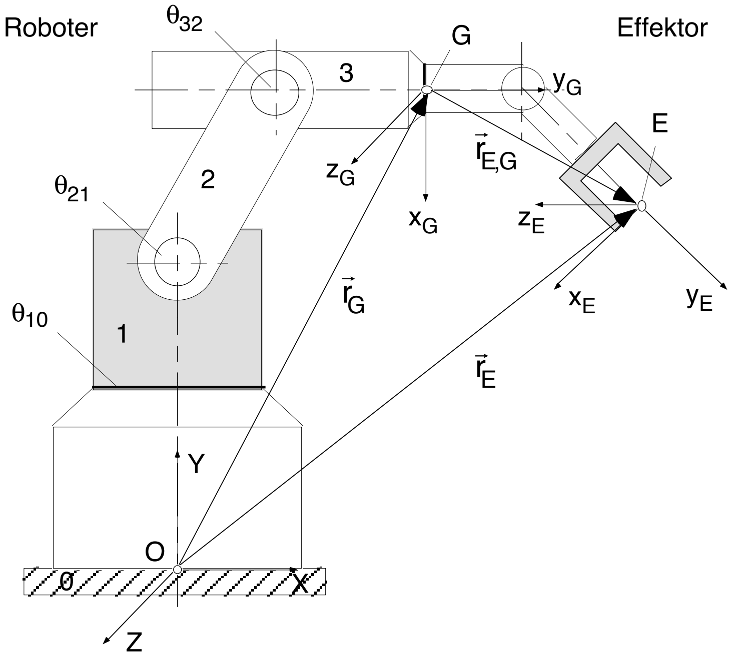
Drehung um die Z-Achse mit $\gamma = -90$ °. also cos(–90 °) = 0, sin(–90 °) = -1.

Drehmatrix $\mathbf{A}^{OG} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ der Aussage: $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix}$

Ortsvektor des Effektors: $${}^{O}\mathbf{r}_E = \mathbf{A}^{OG}\ {}^{G}\mathbf{r}_{EG} + {}^{O}\mathbf{r}_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ -20 \\ 25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 \\ 125 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 95 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.2: Gegeben ist ein Knickarmroboter

mit den Gelenkwinkel $\theta_{10} = 60°$, $\theta_{21} = -30°$, $\theta_{32} = -45°$, wobei θ_{10} eine Drehung um Achse Y darstellt.



1. Berechne: Die Drehmatrix $\mathbf{A}^{0G}$

Drehung um die Y-Achse mit $\beta = 60$ °. also cos(60 °) = 0.5, sin(60 °) = 0.866

Drehung um die Z-Achse mit $\gamma = -75$ °. also cos(–75 °) = 0.2588, sin(–75 °) = –0.966

$$\text{Drehmatrix } \mathbf{A}^{OG} = \mathbf{A}^{OG}(\beta)\,\mathbf{A}^{OG}(\gamma) = \begin{pmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1294 & 0.4830 & 0.866 \\ -0.966 & 0.2583 & 0 \\ -0.2241 & -0.8365 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\text{der Aussage: } \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1294 & 0.4830 & 0.866 \\ -0.966 & 0.2588 & 0 \\ -0.2241 & -0.8365 & 0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix}$$

2. Bestimme die Orientierung (Winkel α_E, β_E, γ_E) des Effektors (System E) bezügl. WKS, wenn

$$\mathbf{A}^{GE} = \begin{pmatrix} -0.707 & 0.707 & 0 \\ -0.696 & -0.696 & -0.174 \\ -0.123 & -0.123 & 0.985 \end{pmatrix} \text{ gegeben ist.}$$

$$\mathbf{A}^{OE} = \mathbf{A}^{OG}\,\mathbf{A}^{GE} = \begin{pmatrix} 0.1294 & 0.4830 & 0.866 \\ -0.966 & 0.2588 & 0 \\ -0.2241 & -0.8365 & 0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0.707 & 0.707 & 0 \\ -0.696 & -0.696 & -0.174 \\ -0.123 & -0.123 & 0.985 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5342 & -0.3511 & 0.769 \\ 0.5028 & -0.8632 & -0.0449 \\ 0.6796 & 0.3626 & 0.6377 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_E = \arctan\frac{y}{x} \text{ wo } y = -A_{23}^{OE} = +0.0449,\; x = A_{33}^{OE} = 0.6377 \quad \text{->} \quad \alpha_E = 4.032\,°.$$

$$\beta_E = \arcsin\left(A_{13}^{OE}\right) = \arcsin 0.769 = 50.26\,° = \arctan\frac{A_{13}^{OE}}{\sqrt{(A_{23}^{OE})^2 + (A_{33}^{OE})^2}}.$$

$$\gamma_E = \arctan\frac{y}{x} \text{ wo } y = -A_{12}^{OE} = +0.3511,\; x = A_{11}^{OE} = -0.5342 \quad \text{->} \quad \gamma_E = 146.68\,°.$$

Aufgabe 4.3: Ein Meßsystem liefert für ein auf einem Band liegendes Werkstück (Punkt H) die Bandkoordinaten ${}^{B}\mathbf{r}_{HB} = (300,\ 119.6,\ 0.0\ )^T$ mm. Gegenüber dem WKS gilt für das Band: ${}^{0}\mathbf{r}_{B} = (0,\ 400,\ 800)^T$ mm und der Winkel $\alpha = 90°$.

a) Bestimme die Weltkoordinaten ${}^{0}\mathbf{r}_{H}$ des Werkstücks.

Drehung um die X-Achse mit $\alpha = 90$ °. also cos(90 °) = 0, sin(90 °) = 1.

Drehmatrix $\mathbf{A}^{OB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Weltkoordinaten Werkstück: ${}^{O}\mathbf{r}_{H} = \mathbf{A}^{OB}\ {}^{B}\mathbf{r}_{HB} + {}^{O}\mathbf{r}_{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 300 \\ 119.6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 400 \\ 800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 919.6 \end{pmatrix}$ mm

b) Weiter liefert das Meßsystem für das Werkstück die Drehmatrix $\mathbf{A}^{BH} = \begin{pmatrix} 0.6438 & -0.766 & 0 \\ 0.766 & 0.6438 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Bestimme die Drehmatrix $\mathbf{A}^{OH}$.

$$\mathbf{A}^{OH} = \mathbf{A}^{OB}\,\mathbf{A}^{BH} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.6438 & -0.766 & 0 \\ 0.766 & 0.6438 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6438 & -0.766 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0.766 & 0.6438 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Bestimme aus $\mathbf{A}^{OH}$ die Kardanwinkel $\alpha_H, \beta_H, \gamma_H$ der Drehung des Werkstücks um x_0, y_0, z_0 bei der Drehfolge x, y, z.

$\alpha_H = \arctan\frac{y}{x}$ wo $y = -A_{23}^{OH} = 1,\ x = A_{33}^{OH} = 0$ -> $\alpha_E = 90$ °.

$\beta_H = \arcsin\left(A_{13}^{OH}\right) = \arcsin 0 = 0$ °.

$\gamma_H = \arctan\frac{y}{x}$ wo $y = -A_{12}^{OH} = +0.766,\ x = A_{11}^{OH} = 0.6438$ -> $\gamma_E = 50$ °.

Aufgabe 4.4: Bilde aus den Angaben zur Orientierung aus Aufgabe 4.2 und den Koordinaten der Ortsvektoren ${}^{0}\mathbf{r}_G = (40, 125, 0)^T$, ${}^{G}\mathbf{r}_{EG} = (30, -20, 25)^T$ die Transformationsmatrizen $\mathbf{T}^{OG}$ und $\mathbf{T}^{GE}$ und daraus $\mathbf{T}^{OE}$. Vergleiche $\mathbf{T}^{OE}$ mit den Ergebnissen aus Aufgabe 4.2.

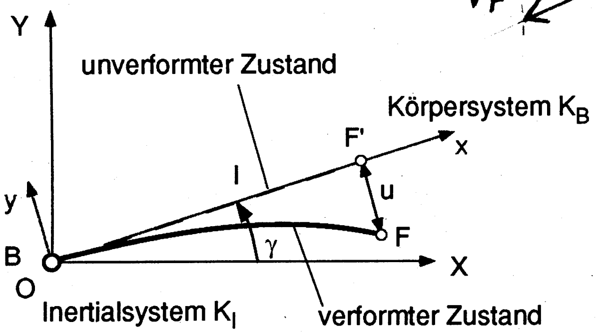
$$\mathbf{T}^{OG} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & \mathbf{A}^{OG} & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \\ {}^{O}\mathbf{r}_G \\ \\ \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1294 & 0.4830 & 0.866 \\ -0.966 & 0.2583 & 0 \\ -0.2241 & -0.8365 & 0.5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 40 \\ 125 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

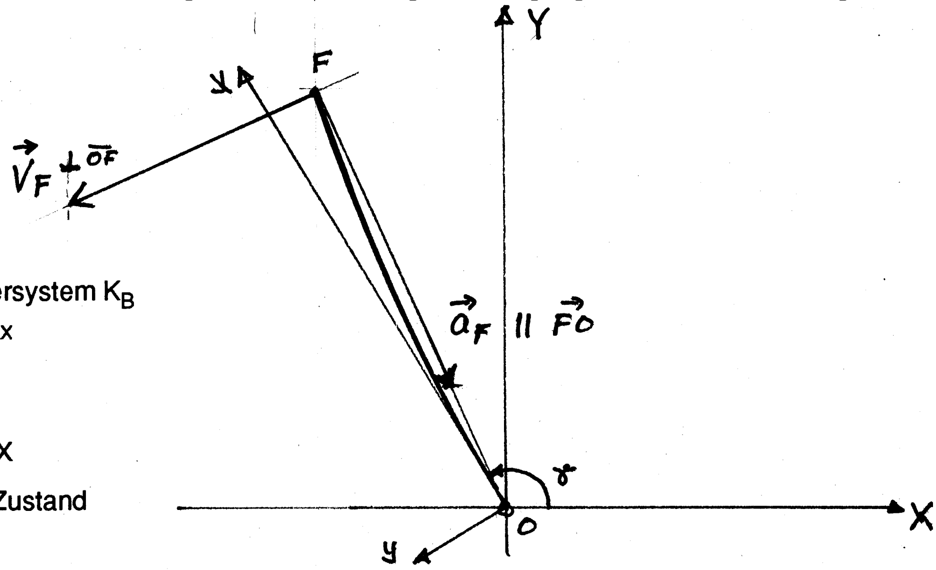
$$\mathbf{T}^{GE} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & \mathbf{A}^{GE} & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \\ {}^{G}\mathbf{r}_{EG} \\ \\ \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.707 & 0.707 & 0 \\ -0.696 & -0.696 & -0.174 \\ -0.123 & -0.123 & 0.985 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 30 \\ -20 \\ 25 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{OE} = \mathbf{T}^{OG}\,\mathbf{T}^{GE} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.5342 & -0.3511 & 0.769 \\ 0.5028 & -0.8632 & -0.0449 \\ 0.6796 & 0.3626 & 0.6377 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 55.87 \\ 90.85 \\ 22.51 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & \mathbf{A}^{OE} & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \\ {}^{O}\mathbf{r}_E \\ \\ \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Wir erhalten also die selbe Drehmatrix $\mathbf{A}^{OE}$.

Aufgabe 4.5: Eine Antenne mit l = 3 m Länge rotiert um den Punkt O in der X-Y-Ebene mit dem Winkel $\gamma = \omega_z t$ wo ω_z = 6 rad/s = konst. Aufgrund der Elastizität der Antenne verbiegt sie sich an der Spritze (Punkt F) um u = 300 mm = konst., siehe Bild. Die Verkürzung der Antenne infolge der Biegung bleibt unberücksichtigt.





a) Bestimme die Drehmatrix $\mathbf{A}^{IB}$ der Körperbasis K_B und die Position ${}^I\mathbf{r}_F$ von F zur Zeit t = π/9 s.

Winkel γ = 6 rad/s · π/9 = 2/3 π = 120 °.

$$\mathbf{A}^{IB} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.866 & 0 \\ 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ der Aussage: } \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.866 & 0 \\ 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix}$$

$${}^I\mathbf{r}_F = \mathbf{A}^{IB}\,{}^B\mathbf{r}_{FB} + {}^I\mathbf{r}_B = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.866 & 0 \\ 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -0.3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{0} = \begin{pmatrix} -1.24 \\ 2.748 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m, da } {}^I\mathbf{r}_B = \mathbf{0} \text{ und } {}^B\mathbf{r}_{FB} = \begin{pmatrix} l \\ -u \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Bestimme dazu die Geschwindigkeiten ${}^I\boldsymbol{\omega}_B$ und ${}^I\mathbf{v}_F$ der Spitze F.

$$\dot\gamma = \omega_z = 6 \text{ rad/s.} \;\text{->}\; {}^I\boldsymbol{\omega}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \text{rad/s} = {}^B\boldsymbol{\omega}_B.$$

$${}^I\mathbf{v}_F = \mathbf{A}^{IB}\,{}^B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B\,{}^B\mathbf{r}_{FB} + \mathbf{A}^{IB}\,{}^B\dot{\mathbf{r}}_{FB} + {}^I\mathbf{v}_B \quad \text{wo} \quad {}^I\mathbf{v}_B = \mathbf{0},\; {}^B\dot{\mathbf{r}}_{FB} = \mathbf{0}, \quad \text{->}\; {}^I\mathbf{v}_F = \omega_z \begin{pmatrix} -l\sin\gamma - (-u)\cos\gamma \\ l\cos\gamma - (-u)\sin\gamma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16.49 \\ -7.44 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m/s.}$$

c) Bestimme dazu die Beschleunigungen ${}^I\boldsymbol{\alpha}_B$ und ${}^I\mathbf{a}_F$.

$$\ddot\gamma = \dot\omega_z = \alpha_z = 0 \text{ rad/s}^2. \;\text{->}\; {}^I\boldsymbol{\alpha}_B = \mathbf{0} \text{ rad/s}^2 = {}^B\boldsymbol{\alpha}_B.$$

$${}^I\mathbf{a}_F = \mathbf{A}^{IB}\,{}^B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B\,{}^B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B\,{}^B\mathbf{r}_{FB} + \mathbf{A}^{IB}\,2\,{}^B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B\,{}^B\dot{\mathbf{r}}_{FB} + \mathbf{A}^{IB}\,{}^B\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_B\,{}^B\mathbf{r}_{FB} + \mathbf{A}^{IB}\,{}^B\ddot{\mathbf{r}}_{FB} + {}^I\mathbf{a}_B \quad \text{wo} \quad {}^I\mathbf{a}_B = \mathbf{0},\; {}^B\ddot{\mathbf{r}}_{FB} = \mathbf{0},\; {}^B\dot{\mathbf{r}}_{FB} = \mathbf{0},$$

$$\text{->}\; {}^I\mathbf{a}_F = \omega_z^2 \begin{pmatrix} -l\cos\gamma + (-u)\sin\gamma \\ -l\sin\gamma - (-u)\cos\gamma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44.65 \\ -98.93 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m/s}^2.$$

d) Zeichne alle Größen in ein Bild ein. Wähle geeignete Maßstäbe.

M_s = 2cm / 1m, M_v = 2 cm / 10 ms^{-1}, M_a = 4 cm / 100 ms^{-2}. -> Ergebnisse wie nach Kap. 3.!