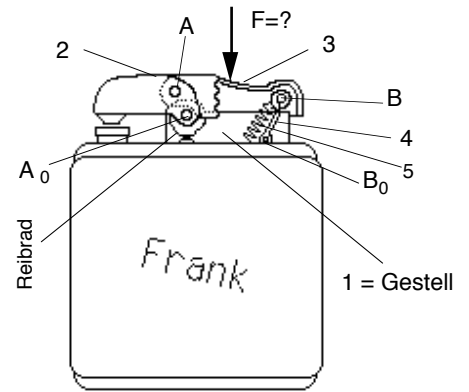
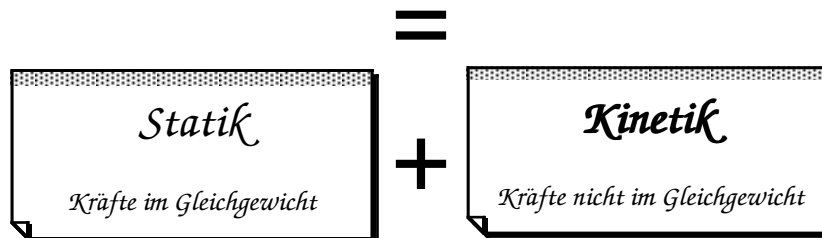


| | | |
|----------|---|----------|
| 6 | Analyse der Dynamik ebener Mechanismen | 1 |
| 6.1 | Zweck und Aufgabenstellungen der Dynamik | 1 |
| 6.2 | Gliederung und Notation der Kräfte und Momente | 3 |
| 6.3 | Gleichgewichtsbedingungen der Statik und Kinetik | 5 |
| 6.4 | Analyse der Statik und Kinetostatik mit Schnittprinzip & | 8 |
| | Gleichgewichtsverfahren | 8 |
| 6.4.1 | Übung 6.1: Analytisches Gleichgewichtsverfahren - Kinetostatik zweiarmiger Roboter..... | 9 |
| 6.4.2 | Übung 6.2: Analytisches Gleichgewichtsverfahren - Statik Tischfeuerzeug..... | 13 |
| 6.4.3 | Graphisches Gleichgewichtsverfahren- nur eine äußere Kraft je Gruppe | 16 |
| 6.5 | Analyse der Statik und Kinetostatik nach dem Prinzip der | 20 |
| | virtuellen Leistungen | 20 |
| 6.5.1 | Analytische Auswertung der Kinetostatik des zweiarmigen Roboters | 22 |
| 6.5.2 | Übung 6.3: Analytische Auswertung der Statik des Tischfeuerzeuges | 24 |
| 6.5.3 | Graphisches Verfahren zum Prinzip der virtuellen Leistungen..... | 26 |
| 6.6 | Berücksichtigung von Reibung in Gelenken | 28 |
| | Aufgaben zu Kap. 6 (siehe auch home page) | 31 |

6 Analyse der Dynamik ebener Mechanismen

Dynamik ist die Lehre der Kräfte + Momente



6.1 Zweck und Aufgabenstellungen der Dynamik

- ☞ Bei der Dynamikanalyse werden die einwirkenden **Kräfte und Momente** auf das Getriebe berücksichtigt.
Beispiel Feuerzeug: Wie groß ist die Kraft F , damit sich das Feuerzeug öffnet?
- ☞ Einwirkende Kräfte sind **Antriebskräfte, Abtriebskräfte, Gewichtskräfte, Massenträgheitskräfte, Lasten**
- ☞ Hieraus resultieren in den Gelenken der Getriebe **Gelenkkräfte (Reaktionskräfte, Zwangskräfte)**
- ☞ Kräfte und Momente werden benötigt zur
 - ◇ **Dimensionierung** der Getriebeglieder und Gelenke
 - ◇ **Lebensdauerabschätzung**
 - ◇ Beantwortung des **Schwingungsverhaltens, Massenausgleich**
(Schwingungsanregungen der Getriebe auf andere Systeme)
 - ◇ **Verformungen** der Bauteile, wenn man die Glieder als elastische Bauteile ansieht
 - ◇ **Wirkungsgradbestimmung**
 - ◇ **Funktionsüberprüfung**
z.B., mit Federn vorgespannte Getriebe, Reibgetriebe, Selbsthemmung

Tafel 6.1: Gliederung der Aufgabenstellungen und Lösungsmethoden

| | Statik | Kinetostatik | Kinetik (Dynamik) | Inverse Dynamik |
|---------------------------------------|---|---|---|--|
| Bekannte Eingabe-größen | geometrische Lage Lasten, Gewicht | geometrische Lage Lasten, Gewicht Massenträgheitskräfte (Beschleunigung) | Startlage Lasten, Gewicht, eingeprägte Kräfte Massengeometrie | Zeitl. Verlauf d. Lage, Geschwindigkeit, Beschleunigung Lasten, Gewicht, eingeprägte Kräfte Massengeometrie |
| Unbekannte Ausgabe-größen | Antriebskräfte, Gelenkkräfte | Antriebskräfte, Gelenkkräfte | Zeitl. Verlauf Lage, Geschwindigkeit, Beschleunigung Gelenkkräfte | Gelenkkräfte, Muskelkräfte |
| Analyse- & Lösungs-methode | GGB Statik oder Prinzip virt. Leistung a) AE -> Hand oder Computer b) VektorE -> Hand | GGB Statik oder Prinzip virt. Leistung a) AE -> Hand oder Computer b) VektorE -> Hand | GGB Newton&Euler Prinzip virt. Leistung DE oder DAE -> Hand oder Computer | GGB Newton&Euler Prinzip virt. Leistung AE -> Hand oder Computer |

Kräfte steht synonym für Kräfte und Momente,

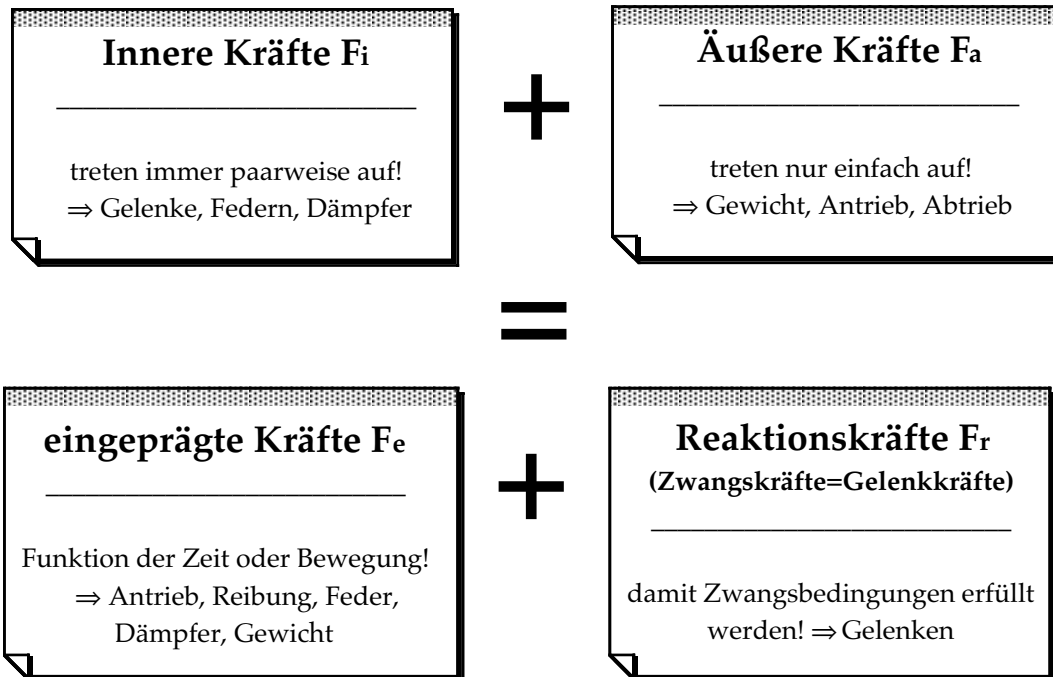
GGB Statik => statische Gleichgewichtsbedingungen am freigeschnittenen Körper,

Prinzip virt. Leistung => virtuelle Leistung aller eingepprägten Kräfte und Momente im System ist null)

a) Hilfreiche Programme sind Mathematica, Maple, Matlab, etc.

6.2 Gliederung und Notation der Kräfte und Momente

vgl. SCHIEHLEN, Techn. Mechanik

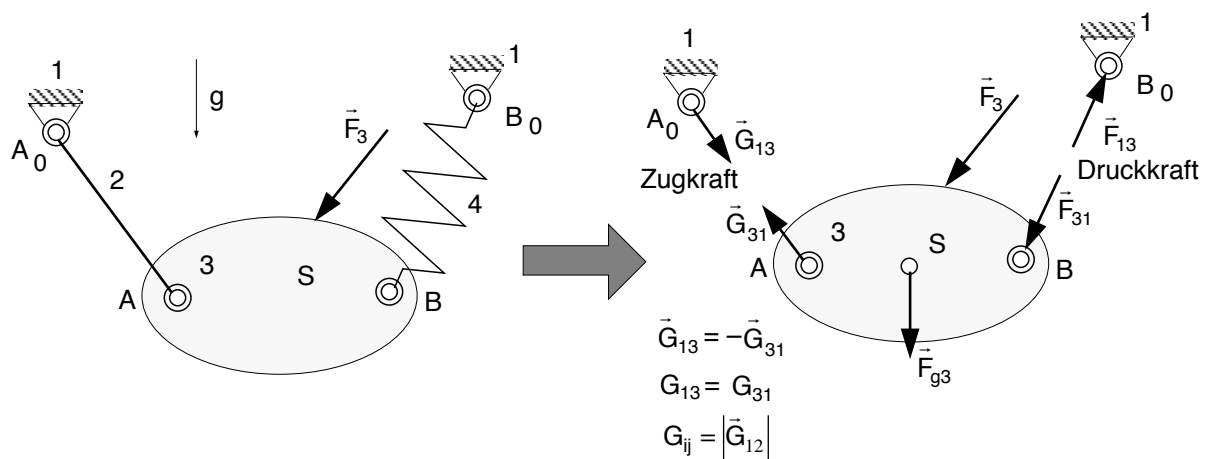


Unter dem Begriff "**Kräfte**" werden gleichzeitig **Kräfte und Momente** verstanden!

Notation:

| | |
|-------------------|--|
| G_{ij}, M_{Gij} | Gelenkkraft, -moment (ohne Reibanteil) auf Glied i infolge Glied j zur Erfüllung der Zwangsbedingungen |
| F_i, M_i | Äußere Kraft, Moment auf Glied i (Last, Antrieb, Abtrieb, Resultierende) |
| F_{gi} | Gewichtskraft auf Glied i |
| F_{ij}, M_{Fij} | Kraft, Moment auf Glied i einer Feder j oder Dämpfer etc. |
| R_{ij}, M_{Rij} | Reibkraft, -moment auf Glied i infolge Glied j |
| T_i, M_{Ti} | d'Alembertsche Massenkraft, -moment |
| m_i | Masse Glied i |
| J_{Si} | Massenträgheitsmoment Glied i um Bezugspunkt S , $J_{Si} = m_i i_{Si}^2$ |
| i_{Si} | Trägheitsradius Glied i um Bezugspunkt S |
| g | Erdbeschleunigung ($9,81 \text{ m/s}^2$) |

Beispiel: Körper 3, der an masseloser Stange 2 und Feder 4 am Gestell 1 aufgehängt ist,
Darstellung der Kräfte, Definition von Zug und Druck nach dem **Schnittprinzip**



6.3 Gleichgewichtsbedingungen der Statik und Kinetik

1. Eine Kraft erzeugt stets eine gleichgroße Gegenkraft, Newton III

z.B. bei Gelenken, bei Stäben

$$\vec{G}_{ij} = -\vec{G}_{ji}, \quad \text{Betrag } G_{ij} = G_{ji}$$

2. d'Alembertsche Trägheitskräfte \vec{T} und Moment \vec{M}_T bez. Massenmittelpunkt S

entsprechend Newton II und Euler um S

$$\vec{T} = -m\vec{a}_S, \quad \vec{M}_T = -\vec{J}_S \cdot \vec{\alpha} - \vec{\omega} \times \vec{J}_S \cdot \vec{\omega}$$

Koordinatendarstellung in Basis X,Y,Z

$$\vec{T} = -m\vec{a}_S, \quad \vec{M}_T = -\vec{J}_S \vec{\alpha} - \vec{\omega} \times \vec{J}_S \vec{\omega}$$

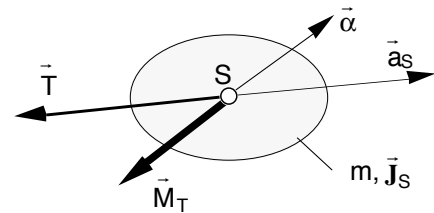
☞ $\vec{J}_S = \text{konst.}$ in körperfester Basis

☞ X-Y-Ebene (2D): nur Moment mit Betrag $M_{TZ} = M_T = J_S \alpha$ entgegen α gerichtet.

Mit Trägheitsradius i_S : $J_S = m i_S^2$.

☞ \vec{T} kann in Beträge $T_x = m a_{Sx}$ und $T_y = m a_{Sy}$ oder in $T_n = m s \omega^2$ und $T_t = m s \alpha$ zerlegt werden.

T_n || Bahnnormale nach außen, T_t || Bahntangente entgegen α .



3. Resultierende der sich in Q schneidenden Kräfte am Körper

siehe Lage- und Kräfteplan

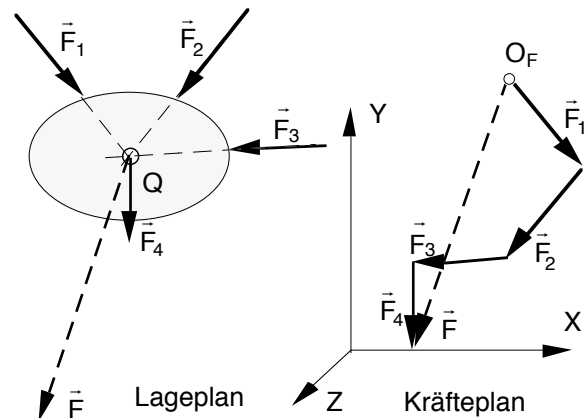
(Q kann auch außerhalb des Körpers liegen)

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \sum_{j=1}^p \vec{F}_j$$

Koordinatendarstellung in Basis X,Y,Z

$$\vec{F} = \vec{e}^T \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

$$\text{also } F_x = \sum_{j=1}^p F_{xj}, \quad F_y = \sum_{j=1}^p F_{yj}, \quad F_z = \sum_{j=1}^p F_{zj}$$



4. Resultierende Kraft und Moment um beliebigem Punkt Q der sich nicht in Q schneidenden Kräfte

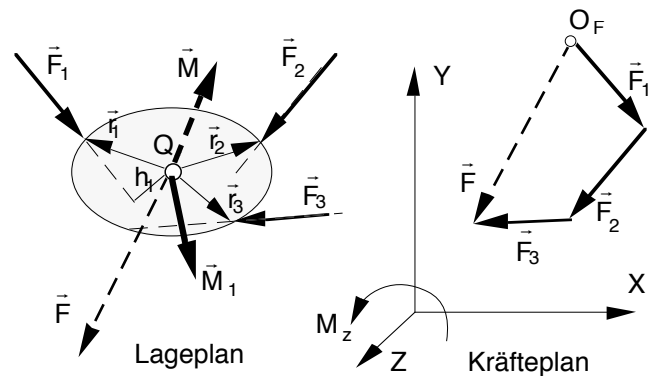
siehe Lage- und Kräfteplan

Kräftebilanz

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \sum_{j=1}^p \vec{F}_j$$

und **Momentenbilanz** bez. Q

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \vec{M}_1 \\ &= \sum_{j=1}^p \vec{r}_j \times \vec{F}_j + \sum_{k=1}^q \vec{M}_k \end{aligned}$$



Koordinatendarstellung in Basis X,Y,Z

$$\vec{F} = \vec{e}^T \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \vec{e}^T \mathbf{r}, \quad \vec{M} = \vec{e}^T \mathbf{M}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^p \vec{r}_j \mathbf{F}_j + \sum_{k=1}^q \mathbf{M}_k$$

also

$$F_x = \sum_{j=1}^p F_{xj}, \quad F_y = \sum_{j=1}^p F_{yj}, \quad F_z = \sum_{j=1}^p F_{zj}$$

$$M_x = \sum_{j=1}^p (r_{yj} F_{zj} - r_{zj} F_{yj}) + \sum_{k=1}^q M_{xk}, \quad M_y = \sum_{j=1}^p (r_{zj} F_{xj} - r_{xj} F_{zj}) + \sum_{k=1}^q M_{yk}, \quad M_z = \sum_{j=1}^p (r_{xj} F_{yj} - r_{yj} F_{xj}) + \sum_{k=1}^q M_{zk}$$



In der X-Y-Ebene (**2D**): nur F_x , F_y und M_z berücksichtigen; ergibt 3 Gleichungen (GGB)!

5. Gleichgewichtsbedingungen am Körper mit p Einzelkräften und q Einzelmomenten

Kräftegleichgewicht: $\sum_{j=1}^p \vec{F}_j = 0$ bzw. $\sum_{j=1}^p \mathbf{F}_j = \mathbf{0}$, d.h. $\sum_{j=1}^p F_{xj} = 0$, $\sum_{j=1}^p F_{yj} = 0$, $F_z = \sum_{j=1}^p F_{zj} = 0$

Momentengleichgewicht um einen beliebigen Punkt Q: $\sum_{j=1}^p \vec{r}_j \times \vec{F}_j + \sum_{k=1}^q \vec{M}_k = 0$ bzw.

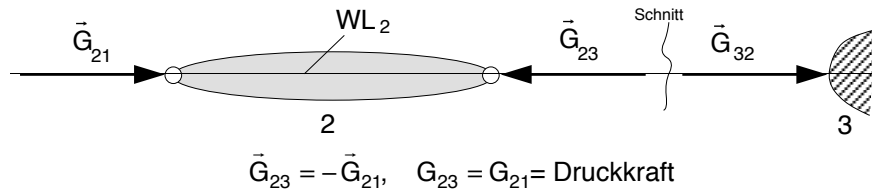
$$\sum_{j=1}^p \vec{r}_j \mathbf{F}_j + \sum_{k=1}^q \mathbf{M}_k = \mathbf{0}$$

d.h.

$$\sum_{j=1}^p (r_{yj} F_{zj} - r_{zj} F_{yj}) + \sum_{k=1}^q M_{xk} = 0, \quad \sum_{j=1}^p (r_{zj} F_{xj} - r_{xj} F_{zj}) + \sum_{k=1}^q M_{yk} = 0, \quad \sum_{j=1}^p (r_{xj} F_{yj} - r_{yj} F_{xj}) + \sum_{k=1}^q M_{zk} = 0$$

6. Sonderfälle der Gleichgewichtsbedingungen

☞ **Zwei Kräfte** am Körper sind nur dann im Gleichgewicht, wenn sie eine gemeinsame Wirkungslinie haben und beide gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet sind, siehe Punkt 1.



☞ **Drei Kräfte** am Körper an können nur dann im Gleichgewicht sein, wenn sich ihre Wirkungslinien in einem Punkt Q schneiden und die Kräfte im Kräfteplan ein geschlossenes Dreieck bilden.

Graphische Lösung ist möglich, wenn eine Kraft und zwei Richtungen gegeben sind, siehe Punkt 3 mit $\sum \vec{F}_j = 0$.

☞ Bei **vier Kräften** am Körper kann graphisch ein Gleichgewicht mit Hilfe der CULMANN'schen Gerade gefunden werden, siehe LUCK & MODLER

7. Hinweise

☞ Bei kinetischen Problemen müssen die d'Alembertschen Kräfte und Momente bez. den Massenmittelpunkt S angetragen werden. Für starre Körper kann man anstelle der **Momentenbilanz um S** auch jeden anderen Punkt als Momentenbezugspunkt gewählt, siehe Punkt 4.

☞ Die Anteile einzelner **Lasten**, z.B. für die Antriebskraft und die Gelenkkräfte, können wegen den linearen Beziehungen in den Gleichgewichtsbedingungen **superponiert** werden, d.h. Last 1 aufbringen, Antrieb Teil 1 bestimmen, dann Last 2 aufbringen, Antrieb Teil 2 bestimmen, beide Teile aufaddieren.

6.4 Analyse der Statik und Kinetostatik mit Schnittprinzip & Gleichgewichtsverfahren

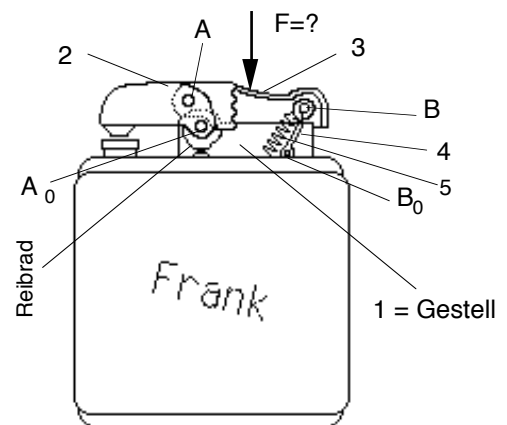
Gegeben: Abmessungen eines Getriebes, bei Kinetostatik auch die Massen
eine Stellung des Getriebes, bei Kinetostatik auch die Bewegungsgrößen,
äußere und innere eingeprägte Kräfte (Lasten, Vorspannkräfte), d'Alembertsche Kräfte

Gesucht: **Antriebskräfte**, die den gegebenen Kräften das Gleichgewicht halten;
Gelenkkräfte, die den Zusammenhalt der Gelenke bewirken.

- Lösung:**
- a) **Analytisch** mit dem Gleichgewichtsverfahren: Freischneiden aller Glieder und alle äußeren und inneren Kräfte antragen.
Gleichgewichtsbedingungen für alle Glieder aufstellen und lösen
 - b) **Analytisch** nach dem Prinzip der virtuellen Leistungen:
Bilanz der virtuellen Leistungen der eingepprägten Kräfte.
Die Leistung der Reaktionskräfte ist null.
 - c) **Graphisch** mit dem Gleichgewichtsverfahren wie a),
jedoch so schneiden, daß graphisch leicht lösbare Gliedergruppen vorliegen, vgl. Abschn. 6.4.3. Bei mehreren äußeren Kräften Überlagerungsverfahren anwenden, siehe auch z.B. LUCK & MODLER, Getriebetechnik
 - d) **Graphisch** nach dem Prinzip der virtuellen Leistungen wie b).

☞ Graphische Lösung liefert die Ergebnisse
nur für eine Getriebestellung,
Analytische Beschreibung ergibt die Funktionen für den
gesamten Getriebeumlauf
--> z.B. Übertragungsfunktion : Antriebskraft $F_{an}(\varphi)$

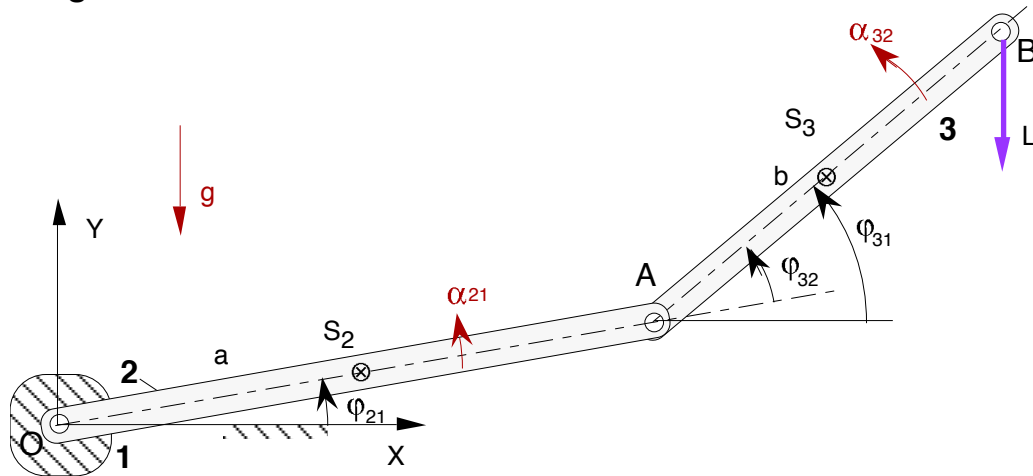
Beispiel Tischfeuerzeug: $F = ?$: Statik, da für diese Lage
noch keine Bewegung stattfindet.



Merke:

In einem Mechanismus sind für die Statik & Kinetostatik so viele Antriebskräfte anzusetzen, wie der Mechanismus FHG besitzt.
Damit ist das System wieder statisch bestimmt gelagert ($F=0$).

6.4.1 Übung 6.1: Analytisches Gleichgewichtsverfahren - Kinetostatik zweiarmiger Roboter



Gegeben: Ebener Roboter mit zwei gelenkig gelagerten Armen 2 und 3 mit den Armlängen a und b . Arm 2 ist in O mit Gestell 1 verbunden, Arm 3 in A mit Arm 2, siehe Bild. Die Gelenkkordinaten sind in O der Drehwinkel $\varphi_{21} = \varphi_2$, in A der Drehwinkel φ_{32} . Punkt B auf Arm 3 repräsentiert den Greifer des Roboters, der eine Last L trägt.

Erdbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ in Richtung $-Y$,

Massengeometrie: Schwerpunkte S_2 und S_3 jeweils bei $a/2$ und $b/2$, Masse m_2, m_3, J_{S2}, J_{S3} ,

Last an B : $F_y = -L$

Beschleunigungen $a_A, a_B, \alpha_{21}, \alpha_{32}$, System hat 2 FHG

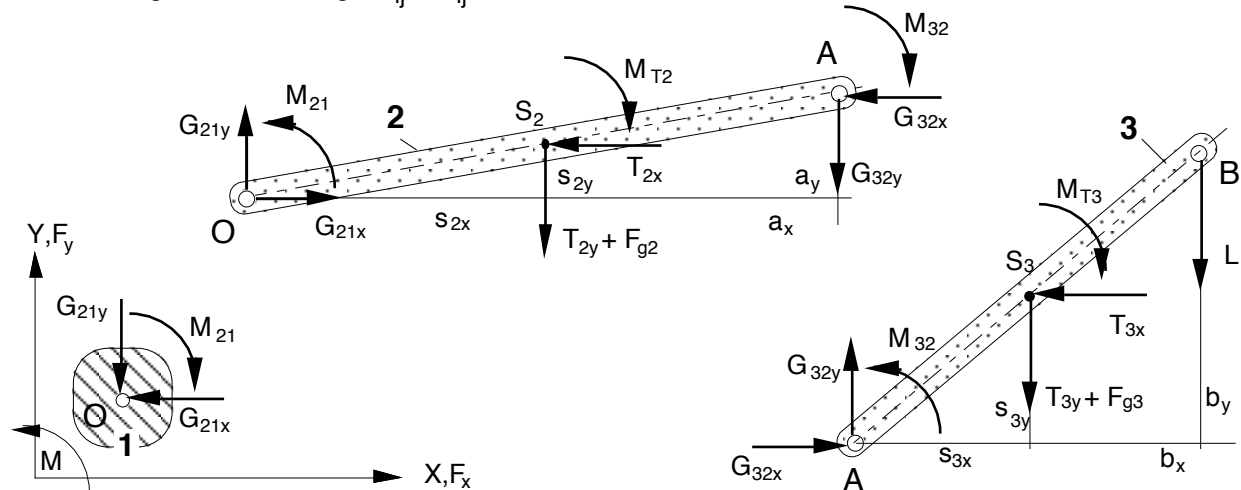
Gesucht: Antriebsmomente M_{21} und M_{32} in den Gelenken O und A ,

Gelenkkräfte in den Gelenken O und A

Alle Ergebnisse sind in der Inertialbasis X, Y darzustellen!

Lösung:

1. Laufgrad $F = 2$ FHG, deshalb zwei Antriebsmomente M_{21} und M_{32} in den Gelenken O und A einführen. System ist dann statisch gelagert.
2. Freischneiden der Glieder und Kräfte (Gelenkkräfte, Gewichtskräfte, d'Alembertschen Kräfte, Lasten) richtungstreu einzeichnen. Beachte 6.3.
Gelenkkräfte werden positiv am nächsten Körper, negativ am vorherigen Körper beliebig angesetzt. Dabei gilt für die Beträge $G_{ij} = G_{ji}$



☞ Die Kraftpfeile repräsentieren die Richtungen, die Namen nur die Beträge der Kraftvektoren!

3. Bilanz der Unbekannten (Vektor \mathbf{u}) und benötigte Gleichungen:

$$\mathbf{u}^T = (G_{21x}, G_{21y}, G_{32x}, G_{32y}, M_{21}, M_{32}), \text{ dazu sind } 2 \times 3 \text{ GGB} = 6 \text{ lineare Glgn. erforderlich}$$

4. d'Alembertsche Kräfte in S_2 und S_3 .

Glied 2: Schwerpunktbeschleunigung aus Abschnitt 3.2.1

$$\mathbf{a}_{S_2} = \mathbf{a}_{S_{2n}} + \mathbf{a}_{S_{2t}} = \tilde{\omega}_{21} \tilde{\omega}_{21} \mathbf{r}_{S_2} + \tilde{\alpha}_{21} \mathbf{r}_{S_2} = \begin{pmatrix} a_{S_{2x}} \\ a_{S_{2y}} \\ a_{S_{2z}} \end{pmatrix} \stackrel{(5.2.1), a \rightarrow \frac{a}{2}}{=} \frac{a}{2} \alpha_{21} \begin{pmatrix} -\sin \varphi_{21} \\ \cos \varphi_{21} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{a}{2} \omega_{21}^2 \begin{pmatrix} \cos \varphi_{21} \\ \sin \varphi_{21} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus: $T_{2x} = m_2 a_{S_{2x}}$, $T_{2y} = m_2 a_{S_{2y}}$, $M_{T2} = J_{S_2} \alpha_{21}$,in Lageplan entgegen F_x , F_y , M in S_2 des Gliedes 2 einzeichnen

Glied 3: Schwerpunktbeschleunigung aus Abschnitt 3.2.1

$$\mathbf{a}_{S_3} = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{S_{3An}} + \mathbf{a}_{S_{3At}} = \mathbf{a}_A + \tilde{\omega}_{31} \tilde{\omega}_{31} \mathbf{r}_{S_{3A}} + \tilde{\alpha}_{31} \mathbf{r}_{S_{3A}}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{S_{3x}} \\ a_{S_{3y}} \\ a_{S_{3z}} \end{pmatrix} \stackrel{(5.2.1), b \rightarrow \frac{b}{2}}{=} a \alpha_{21} \begin{pmatrix} -\sin \varphi_{21} \\ \cos \varphi_{21} \\ 0 \end{pmatrix} - a \omega_{21}^2 \begin{pmatrix} \cos \varphi_{21} \\ \sin \varphi_{21} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{b}{2} \alpha_{31} \begin{pmatrix} -\sin \varphi_{31} \\ \cos \varphi_{31} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{b}{2} \omega_{31}^2 \begin{pmatrix} \cos \varphi_{31} \\ \sin \varphi_{31} \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $\alpha_{31} = \alpha_{32} + \alpha_{21}$, $\omega_{31} = \omega_{32} + \omega_{21}$.Daraus: $T_{3x} = m_3 a_{S_{3x}}$, $T_{3y} = m_3 a_{S_{3y}}$, $M_3 = J_{S_3} \alpha_{31}$,in Lageplan entgegen F_x , F_y , M in S_3 des Gliedes 3 einzeichnen5. Gewichtskräfte in $-F_y$ Glied 2: $F_{g2} = m_2 g$,Glied 3: $F_{g3} = m_3 g$

6. Abstände (Beträge) für Momentenbilanz:

Glied 2: S_2 : $s_{2x} = a/2 \cos \varphi_{21}$, $s_{2y} = a/2 \sin \varphi_{21}$, A : $a_x = a \cos \varphi_{21}$, $a_y = a \sin \varphi_{21}$,Glied 3: S_3 : $s_{3x} = b/2 \cos \varphi_{31}$, $s_{3y} = b/2 \sin \varphi_{31}$, B : $b_x = b \cos \varphi_{31}$, $b_y = b \sin \varphi_{31}$,

7. Gleichgewichtsbedingungen: (Für Momentenbilanz wird O und A anstelle S₂ und S₃ verwendet)

$$\text{Glied 2: } \sum F_x = 0: G_{21x} - G_{32x} - T_{2x} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0: G_{21y} - G_{32y} - T_{2y} - F_{g2} = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_O = 0: M_{21} - M_{32} + a_y G_{32x} - a_x G_{32y} - M_{T2} + s_{2y} T_{2x} - s_{2x} T_{2y} - s_{2x} F_{g2} = 0 \quad (3)$$

$$\text{Glied 3: } \sum F_x = 0: G_{32x} - T_{3x} = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_y = 0: G_{32y} - T_{3y} - F_{g3} - L = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_A = 0: M_{32} - M_{T3} + s_{3y} T_{3x} - s_{3x} T_{3y} - s_{3x} F_{g3} - b_x L = 0 \quad (6)$$

8. Anordnen als lineares Gleichungssystem $\mathbf{S} \mathbf{u} = \mathbf{b}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_y & -a_x & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{S}} \underbrace{\begin{pmatrix} G_{21x} \\ G_{21y} \\ G_{32x} \\ G_{32y} \\ M_{21} \\ M_{32} \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{pmatrix} T_{2x} \\ T_{2y} + F_{g2} \\ M_{T2} - s_{2y} T_{2x} + s_{2x} T_{2y} + s_{2x} F_{g2} \\ T_{3x} \\ T_{3y} + F_{g3} + L \\ M_{T3} - s_{3y} T_{3x} + s_{3x} T_{3y} + s_{3x} F_{g3} + b_x L \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

9. Lösen des Gleichungssystems $\mathbf{u} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{b}$ per Computer oder von Hand auflösen:

$$\text{aus (4): } G_{32x} = T_{3x} \quad (7)$$

$$\text{aus (5): } G_{32y} = T_{3y} + F_{g3} + L \quad (8)$$

$$\text{aus (6): } M_{32} = M_{T3} - s_{3y} T_{3x} + s_{3x} T_{3y} + s_{3x} F_{g3} + b_x L \quad (9)$$

$$\text{aus (1)+(7): } G_{21x} = T_{3x} + T_{2x} \quad (10)$$

$$\text{aus (2)+(8): } G_{21y} = T_{3y} + F_{g3} + L + T_{2y} + F_{g2} \quad (11)$$

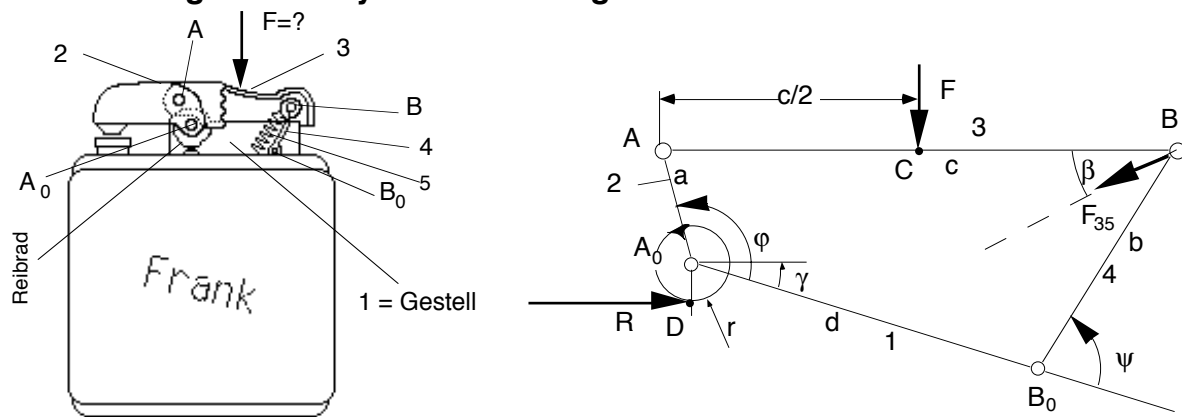
$$\begin{aligned} \text{aus (3)+(9): } M_{21} = & M_{T3} - s_{3y} T_{3x} + s_{3x} T_{3y} + s_{3x} F_{g3} + b_x L \\ & - a_y T_{3x} + a_x (T_{3y} + F_{g3} + L) + M_{T2} - s_{2y} T_{2x} + s_{2x} T_{2y} + s_{2x} F_{g2} \end{aligned} \quad (12)$$



Nach Einsetzen aller kinematischen Beziehungen, ergeben sich aus (7) bis (12) die Antriebsmomente und Gelenkkräfte als Funktion der Gelenkkoordinaten, der Last und den d'Alembertschen Kräften und Momenten

HW: Aufgabe 6.2

6.4.2 Übung 6.2: Analytisches Gleichgewichtsverfahren - Statik Tischfeuerzeug



Gegeben: Der Aufklappmechanismus eines Tischfeuerzeuges besteht aus einem Viergelenkgetriebe mit Gehäuse 1, Schwingen mit Haube und Reibrad für Zündstein 2, Drücker 3, Stütze 4 sowie der Spannfeder 5. Die Feder ist mit einer Zugkraft F_{35} vorgespannt. Der Deckel öffnet sich, wenn man mit einer entsprechenden Kraft F am Ort C auf den Deckel drückt.

Daten: Abmessungen $a = 15 \text{ mm}$, $b = 34 \text{ mm}$, $c = 68 \text{ mm}$, $d = 48 \text{ mm}$, $r = 5 \text{ mm}$, $\varphi = 122.2^\circ$, $\psi = 74.7^\circ$, $\beta = 28^\circ$, $\gamma = 17.2^\circ$, Federkraft $F_{35} = 0.9 \text{ N}$, Reibkraft $R = 3 \text{ N}$

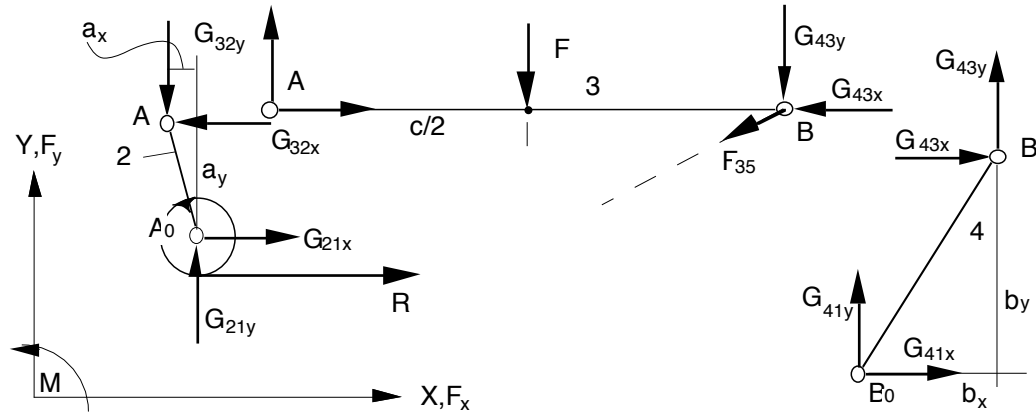
Gesucht: Druckkraft F ,

Gelenkkräfte in den Gelenken A_0 , A , B , B_0

Alle Ergebnisse sind in der Inertialbasis darzustellen sowie die Beträge zu bestimmen!

Lösung:

1. Da sich das Getriebe noch im Ruhezustand befindet, liegt ein statischer Fall vor. Das Getriebe hat, wenn F wirkt, null FHG.
2. Freischneiden der Glieder und Kräfte einzeichnen



3. Bilanz der Unbekannten und Gleichungen:

$$\mathbf{u}^T = (G_{21x}, G_{21y}, G_{32x}, G_{32y}, G_{43x}, G_{43y}, G_{41x}, G_{41y}, F), \text{ dazu } 3 \times 3 \text{ GGB} = 9 \text{ lineare Glgn.}$$

4. Abstände (Beträge) für Momentenbilanz:

$$\text{Glied 2: A: } a_x = a \sin(\varphi - \gamma - 90^\circ), \quad a_y = a \cos(\varphi - \gamma - 90^\circ),$$

$$\text{Glied 4: B: } b_x = b \cos(\psi - \gamma), \quad b_y = b \sin(\psi - \gamma),$$

5. Gleichgewichtsbedingungen, in Matrizendarstellung $\mathbf{S} \mathbf{u} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$

$$\begin{array}{l}
 F_{x-\text{Glied2}} \\
 F_{y-\text{Glied2}} \\
 M_{A0-\text{Glied2}} \\
 F_{x-\text{Glied3}} \\
 F_{y-\text{Glied3}} \\
 M_{A-\text{Glied3}} \\
 F_{x-\text{Glied4}} \\
 F_{y-\text{Glied4}} \\
 M_{B-\text{Glied4}}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{cccccccccc}
 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a_y & a_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & -c/2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_y & -b_x & 0 & 0
 \end{array} \right)
 \begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{c}
 G_{21x} \\
 G_{21y} \\
 G_{32x} \\
 G_{32y} \\
 G_{43x} \\
 G_{43y} \\
 G_{41x} \\
 G_{41y} \\
 F
 \end{array} \right)
 -
 \begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{c}
 -R \\
 0 \\
 -rR \\
 F_{35} \cos \beta \\
 F_{35} \sin \beta \\
 c F_{35} \sin \beta \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{array} \right)
 = \mathbf{0}
 \end{array}
 \end{array}$$

$\mathbf{S} \quad \mathbf{u} \quad \mathbf{b}$

6. Lösen des Gleichungssystems $\mathbf{u} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{b}$
per Computer (Mathematica), siehe home page.

$G_{21x} \rightarrow -5.16824$, $G_{21y} \rightarrow 4.22829$, $G_{21} = 6.67751$

$G_{32x} \rightarrow -2.16824$, $G_{32y} \rightarrow 4.22829$, $G_{32} = 4.75181$

$G_{43x} \rightarrow -2.9629$, $G_{43y} \rightarrow -4.65082$, $G_{43} = 5.5142$

$G_{41x} \rightarrow 2.9629$, $G_{41y} \rightarrow 4.65082$, $G_{41} = 5.51442$

$F \rightarrow 8.45658$

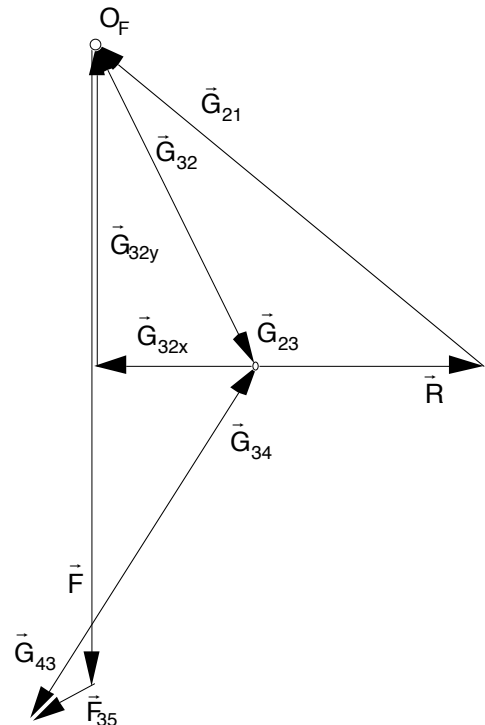
Es ist mindestens eine Kraft von $\mathbf{F} = 8,5 \text{ N}$ erforderlich, um das Feuerzeug zu öffnen!

Bilanz zum Kräfteplan:

Glied 2: $\vec{R} + \vec{G}_{21} + \vec{G}_{23} = 0$, $\vec{G}_{23} = -\vec{G}_{32}$

Glied 3: $\vec{F} + \vec{F}_{35} + \vec{G}_{32} + \vec{G}_{34} = 0$

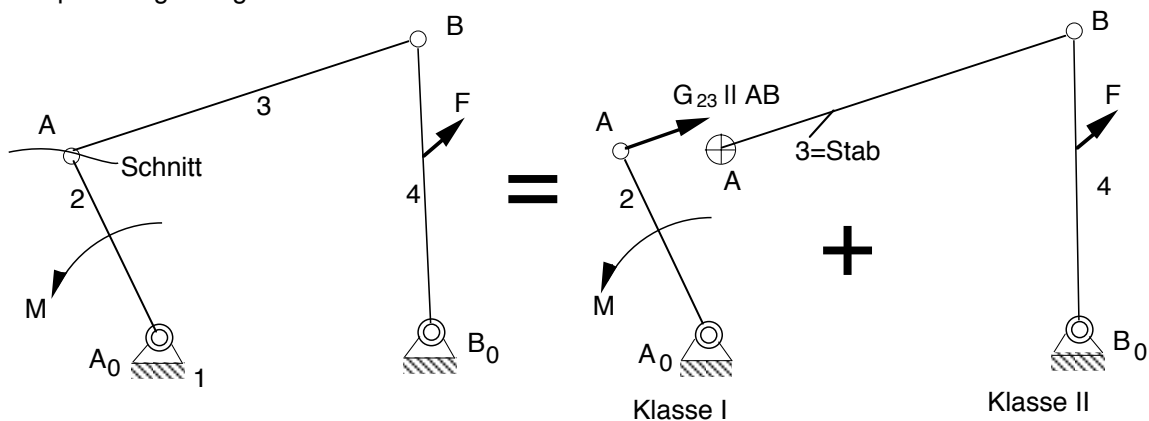
Glied 4: $\vec{G}_{43} + \vec{G}_{41} = 0$, $\vec{G}_{43} = -\vec{G}_{34} \Rightarrow \vec{G}_{41} = \vec{G}_{34}$



6.4.3 Graphisches Gleichgewichtsverfahren- nur eine äußere Kraft je Gruppe

Vorgehensweise:

1. Pro Glied sollte nur **eine** eingeprägte Kraft (bekannt oder unbekannt) vorliegen.
2. Mehrere eingeprägte Kräfte am Glied, wie Lasten, Abtriebskräfte, Gewicht, d'Alembertsche Kräfte, zu einer Resultierenden zusammenfassen
3. Momente durch Kräftepaare ersetzen.
4. Aufteilen der Getriebe in Gliedergruppen nach ASSUR, siehe z.B. auch LUCK & MODLER, Beispiel Viergelenkgetriebe:



⊕ repräsentiert ein Drehgelenk zum Gestell, damit die Gruppe statisch bestimmt gelagert ist.

Verwende Klasse I für die Antriebskurbel mit Antriebsmoment als Gleichgewichtsgröße.

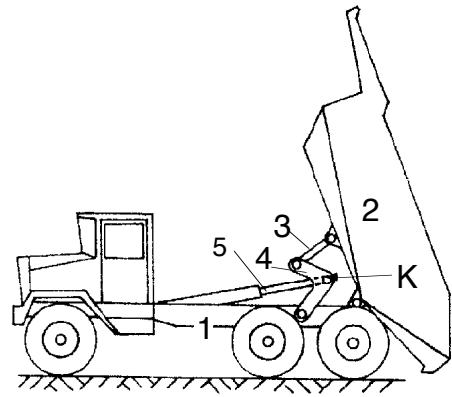
Weitere Gruppen und Klassen siehe LUCK & MODLER

5. Prüfe den Laufgrad der Getriebe und setze ebensoviel Antriebskräfte an, damit das Getriebe statisch bestimmt gelagert ist (null FHG).
6. Bilde das Kräftegleichgewicht nach Abschn. 6.3 an allen Gliedern und ermittle so die unbekannten Kräfte im Antrieb und Gelenken.
Beginne mit der Gruppe bzw. Glied, die / das mit einer bekannten Kraft belastet ist.
7. Definiere einen Kräftemaßstab $M_F = \hat{F} / F [\text{cm} / \text{N}] \rightarrow \hat{F} = M_F F [\text{cm}]; \quad F = \hat{F} / M_F [\text{N}]$
8. Zeichne den Kräfteplan mit Ursprung O_F und bestimme die unbekannten Kräfte

Beispiel: Kippvorrichtung

Gegeben: Das Bild zeigt eine Kippvorrichtung der Ladefläche eines LKW-Muldenkippers. Die genauen Abmessungen und Kipperstellung sind dem Lageplan zu entnehmen.

Daten: Nutzlast 200 kN,
Eigengewicht der Mulde 50 kN,
Maßstab $M_F = 3 \text{ cm} / 100 \text{ kN}$

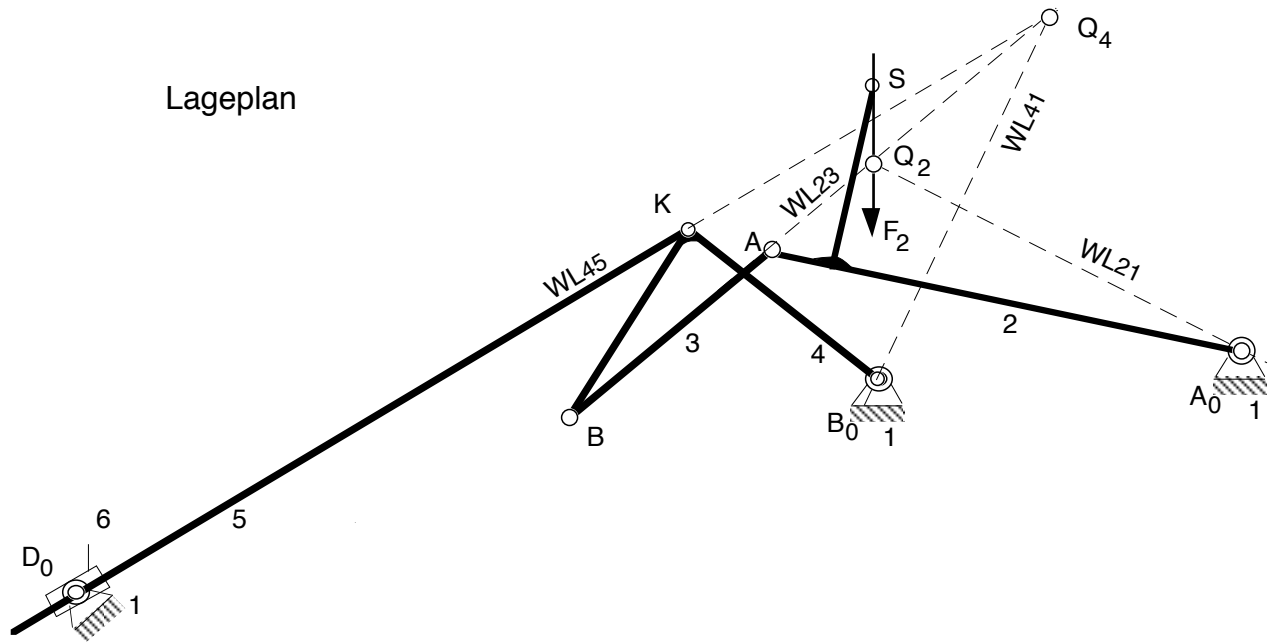


Gesucht: Die Kraft in der Kolbenstange des Hydraulikzylinders (Glieder 5) sowie alle Gelenkkräfte.

Lösung:

1. Das Getriebe hat 1 FHG. Ersetzt man die Wirkung der Kolbenstange durch eine Kraft G_{45} in K, so liegt ein Viergelenkgetriebe A_0ABB_0 vor mit null FHG.
Die bekannte Last ist $F_2 = 250 \text{ kN}$ in S an Glied 2. Die unbekannte Kraft ist G_{45} in K an Glied 4.
2. Das Getriebe wird zerlegt:
 1. in eine Gruppe der Klasse II mit den Gliedern 1, 2, und 3, wobei Glied 3 ein reiner Stab ist, d.h. er überträgt nur Kräfte in Stabrichtung.
 2. in eine Gruppe der Klasse I mit dem Glied 4.

Lageplan



3. Beginne mit Glied 2: unter Beachtung von Punkt 3 aus Abschn. 6.3:

$$\text{GGB: } \sum \vec{F} = \vec{G}_{23} + \vec{F}_2 + \vec{G}_{21} = 0 \quad (1)$$

Wirkungslinien (WL) und Schnittpunkt Q_2 :

($WL_{23} \parallel AB$ & WL_{F_2}) $\rightarrow Q_2 \rightarrow WL_{21}$
 muß durch A_0 und Q_2 gehen, damit am
 Glied 2 Momentenfreiheit und Gleichgewicht
 herrscht.

Glg. (1) in Kräfteplan mit Ursprung O_F einzeichnen:

$$\hat{F}_2 = M_F F_2 = 3 \text{ cm} / 100 \text{ kN} \quad 250 \text{ kN} = 7,5 \text{ cm},$$

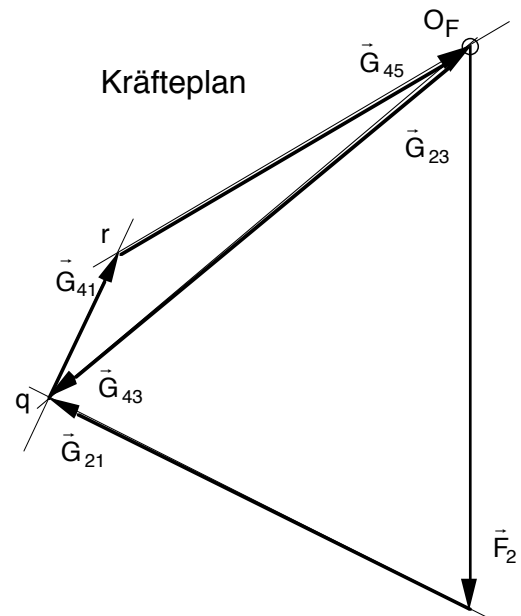
F_2 an O_F antragen,

WL_{23} an O_F und WL_{21} an Spitze von F_2

antragen,

Schnittpunkt q liefert Gelenkkräfte \vec{G}_{21} und \vec{G}_{23}

Kräfteplan



4. Glied 3 ist Teil der ersten Gruppe und repräsentiert nur einen Stab mit

$$\text{Druckkraft } \vec{G}_{43} = - \vec{G}_{23} \quad (2)$$

5. Weiter mit Glied 4:

$$\text{GGB: } \Sigma \vec{F} = \vec{G}_{43} + \vec{G}_{45} + \vec{G}_{41} = 0 \quad (3)$$

WL und Q₄: (WL₄₃ || AB & WL₄₅ || D₀K) --> Q₄ --> WL₄₁ muß durch B₀ und Q₄ gehen

Glg. (2) und (3) in Kräfteplan einzeichnen:

\vec{G}_{43} markieren,

WL₄₅ an O_F und WL₄₁ an Spitze von \vec{G}_{43} einzeichnen,

Schnittpunkt r liefert Gelenkkräfte \vec{G}_{41} und \vec{G}_{45}

6. Ergebnisse:

$$\hat{G}_{21} = 6,2 \text{ cm}, \rightarrow G_{21} = \frac{100 \text{ kN}}{3 \text{ cm}} 6,2 \text{ cm} = 207 \text{ kN}$$

$$\hat{G}_{23} = 7,3 \text{ cm}, \rightarrow G_{23} = \frac{100 \text{ kN}}{3 \text{ cm}} 7,3 \text{ cm} = 243 \text{ kN} \rightarrow \text{Druckkraft}$$

$$\hat{G}_{41} = 2,1 \text{ cm}, \rightarrow G_{41} = \frac{100 \text{ kN}}{3 \text{ cm}} 2,1 \text{ cm} = 70 \text{ kN}$$

$$\hat{G}_{45} = 5,4 \text{ cm}, \rightarrow G_{45} = \frac{100 \text{ kN}}{3 \text{ cm}} 5,4 \text{ cm} = 180 \text{ kN} \rightarrow \text{Druckkraft}$$

6.5 Analyse der Statik und Kinetostatik nach dem Prinzip der virtuellen Leistungen

- ☞ In gebundenen Systemen, wie Getrieben, treten zunächst zu den eingprägten Kräften noch unbekannte Gelenkkräfte (auch Reaktionskräfte, Zwangskräfte genannt) auf, vgl. die Analyse von Getrieben nach den Gleichgewichtsverfahren in Abschnitt 6.4.
- ☞ Gelenkkräfte haben auf die Bewegung des Getriebes keinen direkten Einfluß. Sie gewährleisten nur den Zusammenhalt des Getriebes, d.h. sie sind erforderlich, um die kinematischen Bedingungen zu gewährleisten.
- ☞ Gelenkkräfte treten stets paarweise auf und ergeben so in der Bilanz, z.B. der Leistung eines Systems keinen Beitrag:

Prinzip der virtuellen Leistungen:

Gelenkkräfte und -momente liefern keinen Beitrag zu den virtuellen Leistungen eines mechanischen Systems oder Mechanismus:

$$\delta P = \sum_{i=1}^n \vec{G}_{ij} \cdot \delta \vec{v}_j + \vec{M}_{Gij} \cdot \delta \vec{\omega}_j = 0$$

Dabei sind $\delta \vec{v}_j$ und $\delta \vec{\omega}_j$ virtuelle, d.h. beliebig gedachte, aber mit dem System verträgliche **absolute Geschwindigkeiten** der Translation und Rotation an den Punkten der Gliedern, an denen die Gelenkkräfte und -momente angreifen.

Jourdainsches Prinzip:

Die Summe der virtuellen Leistungen der **eingepprägten** Kräfte und Momente und d'Alembertschen Kräfte und Momente aller Glieder $i = 1, n$ muß verschwinden:

$$\delta P = \sum_{i=1}^n \left((\vec{T}_i + \vec{F}_{ei}) \cdot \delta \vec{v}_i + (\vec{M}_{Ti} + \vec{M}_{ei}) \cdot \delta \vec{\omega}_i \right) = 0$$

Oder die Jourdainischen Gleichungen, mit \vec{a}_{Si} als Beschleunigung des Massenmittelpunktes und $\vec{\alpha}_i$ als Winkelbeschleunigung des Gliedes i :

$$\delta P = \sum_{i=1}^n \left((m_i \vec{a}_{Si} - \vec{F}_{ei}) \cdot \delta \vec{v}_i + (\vec{J}_{Si} \cdot \vec{\alpha}_i + \vec{\omega}_i \times \vec{J}_{Si} \cdot \vec{\omega}_i - \vec{M}_{ei}) \cdot \delta \vec{\omega}_i \right) = 0$$

\vec{F}_{ei} ist die resultierende Kraft und \vec{M}_{ei} das resultierende Moment um den Massenmittelpunkt S aller eingepprägten Kräfte am Glied i .

$\delta \vec{v}_j$ und $\delta \vec{\omega}_j$ sind virtuelle, d.h. beliebig gedachte, aber mit dem System verträgliche absolute Geschwindigkeiten der Translation und Rotation an den Punkten der Gliedern, an denen die Kräfte und Momente angreifen.

Es existieren soviel unabhängige virtuelle Geschwindigkeitskoordinaten, wie das System FHG besitzt.

Koordinatendarstellung

Raum (3D):
$$\delta P = \sum_{i=1}^n \left((m_i \vec{a}_{Si} - \vec{F}_{ei})^T \delta \vec{v}_i + (\vec{J}_{Si} \vec{\alpha}_i + \vec{\omega}_i \vec{J}_{Si} \vec{\omega}_i - \vec{M}_{ei})^T \delta \vec{\omega}_i \right) = 0$$

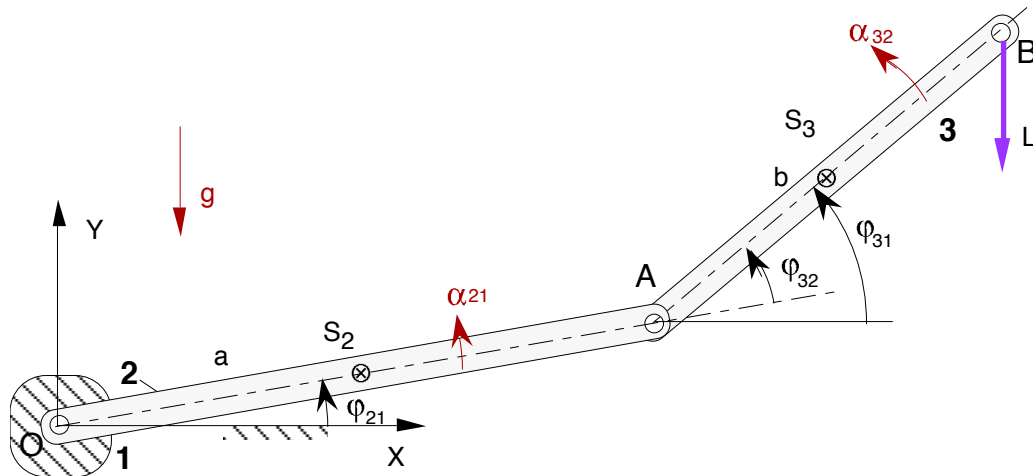
Ebene (2D):
$$\delta P = \sum_{i=1}^n \left((T_{ix} + F_{eix}) \delta v_{ix} + (T_{iy} + F_{eiy}) \delta v_{iy} + (M_{Ti} + M_{ei}) \delta \omega_i \right) = 0$$

Bei den Prinzipien ist ein Aufschneiden des Systems an den Gelenken nicht erforderlich!

- ☞ Setze in die obigen Gleichungen für Probleme aus der
 - ◇ **Statik:** die Größen \vec{T}_i und \vec{M}_{Ti} gleich null,
 - ◇ **Kinetostatik:** \vec{T}_i und \vec{M}_{Ti} als bekannte Größen nach Punkt 2, Abschn. 6.3
 - ◇ **Kinetik:** \vec{T}_i und \vec{M}_{Ti} als Funktion der unbekannten Beschleunigungen \vec{a}_{Si} und $\vec{\alpha}_i$ oder verwende direkt die Jourdainischen Gleichungen
- ☞ In Analogie dazu das d'Alembertsche Prinzip in der Lagrangeschen Fassung und das Prinzip der virtuellen Arbeit: Verwende in den obigen Gleichungen anstelle der virtuellen Geschwindigkeiten virtuelle Verrückungen (Verschiebungen und Verdrehungen)!

6.5.1 Analytische Auswertung der Kinetostatik des zweiarmigen Roboters

Gegeben: Aufgabenstellung aus Abschn. 6.4.1



Gesucht: nur die Antriebsmomente in den Gelenken O und A, deshalb Anwendung des Prinzips der virtuellen Leistungen!

Lösung:

1. Virtuelle Leistung der **eingepprägten Kräfte** und **d'Alembertschen Kräfte** der Glieder 2 und 3, siehe Bild in Abschn. 6.4.1:

$$\begin{aligned} \delta P = & -T_{2x} \delta v_{S2x} - (T_{2y} + F_{g2}) \delta v_{S2y} + (-M_{T2} + M_{21} - M_{32}) \delta \omega_{21} \\ & - T_{3x} \delta v_{S3x} - (T_{3y} + F_{g3}) \delta v_{S3y} - L \delta v_{By} + (-M_{T3} + M_{32}) \delta \omega_{31} = 0 \end{aligned}$$

2. Die erforderlichen virtuellen Geschwindigkeiten sind gemäß der Kinematikanalyse, siehe Abschnitt 5.2.1, als Funktion der **zwei** beliebig gewählten **unabhängigen virtuellen absoluten Geschwindigkeiten** $\delta \omega_{21}$ und $\delta \omega_{31}$ darzustellen, da das System **2 FHG** besitzt:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{v}_{S2} &= \begin{pmatrix} \delta v_{S2x} \\ \delta v_{S2y} \\ 0 \end{pmatrix} = \delta \tilde{\omega}_{21} \mathbf{r}_{S2} = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} -\sin \varphi_{21} \\ \cos \varphi_{21} \\ 0 \end{pmatrix} \delta \omega_{21} \\ \delta \mathbf{v}_{S3} &= \begin{pmatrix} \delta v_{S3x} \\ \delta v_{S3y} \\ 0 \end{pmatrix} = \delta \mathbf{v}_A + \delta \mathbf{v}_{S3A} = \delta \mathbf{v}_A + \delta \tilde{\omega}_{31} \mathbf{r}_{S3A} = a \begin{pmatrix} -\sin \varphi_{21} \\ \cos \varphi_{21} \\ 0 \end{pmatrix} \delta \omega_{21} + \frac{b}{2} \begin{pmatrix} -\sin \varphi_{31} \\ \cos \varphi_{31} \\ 0 \end{pmatrix} \delta \omega_{31} \\ \delta \mathbf{v}_B &= \begin{pmatrix} \delta v_{Bx} \\ \delta v_{By} \\ 0 \end{pmatrix} = \delta \mathbf{v}_A + \delta \mathbf{v}_{BA} = \delta \mathbf{v}_A + \delta \tilde{\omega}_{31} \mathbf{r}_{BA} = a \begin{pmatrix} -\sin \varphi_{21} \\ \cos \varphi_{21} \\ 0 \end{pmatrix} \delta \omega_{21} + b \begin{pmatrix} -\sin \varphi_{31} \\ \cos \varphi_{31} \\ 0 \end{pmatrix} \delta \omega_{31} \end{aligned}$$

Beachte: $\delta \omega_{31} = \delta \omega_{21} + \delta \omega_{32}$

3. Die virtuellen Geschwindigkeiten in das Prinzip eingesetzt und geordnet nach Termen in $\delta\omega_{21}$ und $\delta\omega_{31}$ liefert:

$$\begin{aligned} \delta P = & \left(+T_{2x} \frac{a}{2} \sin \varphi_{21} - (T_{2y} + F_{g2}) \frac{a}{2} \cos \varphi_{21} - M_{T2} + M_{21} - M_{32} + \right. \\ & \left. T_{3x} a \sin \varphi_{21} - (T_{3y} + F_{g3}) a \cos \varphi_{21} - L a \cos \varphi_{21} \right) \delta\omega_{21} + \\ & + \left(+T_{3x} \frac{b}{2} \sin \varphi_{31} - (T_{3y} + F_{g3}) \frac{b}{2} \cos \varphi_{31} - L b \cos \varphi_{31} - M_{T3} + M_{32} \right) \delta\omega_{31} = 0 \end{aligned}$$

4. Da $\delta\omega_{21}$ und $\delta\omega_{31}$ beliebige Größen sind, müssen die Ausdrücke in den Klammern für sich verschwinden:

Aus der zweiten Klammer erhält man das Gelenkmoment

$$M_{32} = -T_{3x} \frac{b}{2} \sin \varphi_{31} + (T_{3y} + F_{g3}) \frac{b}{2} \cos \varphi_{31} + L b \cos \varphi_{31} + M_{T3}$$

Aus der ersten Klammer erhält man das Gelenkmoment

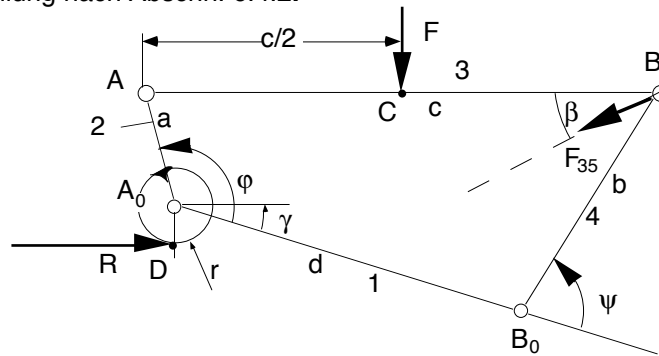
$$\begin{aligned} M_{21} = & -T_{2x} \frac{a}{2} \sin \varphi_{21} + (T_{2y} + F_{g2}) \frac{a}{2} \cos \varphi_{21} + M_{T2} + M_{32} \\ & - T_{3x} a \sin \varphi_{21} + (T_{3y} + F_{g3}) a \cos \varphi_{21} + L a \cos \varphi_{21} , \end{aligned}$$

in das noch der Ausdruck für M_{32} einzusetzen wäre.

Die Ergebnisse sind mit denen aus Abschnitt 6.4.1 identisch, wenn man dort die Ausdrücke für die Abstände einsetzt.

6.5.2 Übung 6.3: Analytische Auswertung der Statik des Tischfeuerzeuges

Gegeben: Aufgabenstellung nach Abschn. 6.4.2.



Gesucht: nur die Druckkraft am Drücker 3, deshalb Anwendung des Prinzips der virtuellen Leistungen!

Lösung:

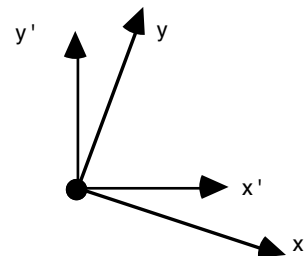
1. Virtuelle Leistung der eingeprägten Kräfte (Reibkraft R, Druckkraft F, Federkraft F_{35}) an den Gliedern 2 und 3,

Beachte beide Koordinatensysteme: In der x-y-Ebene gilt

$$\delta P = \mathbf{R}^T \delta \mathbf{v}_D + \mathbf{F}^T \delta \mathbf{v}_C + \mathbf{F}_{35}^T \delta \mathbf{v}_B = 0$$

in der x'-y'-Ebene:

$$\delta P = R \delta v'_{Dx} - F \delta v'_{Cy} - F_{35} \cos \beta \delta v'_{Bx} - F_{35} \sin \beta \delta v'_{By} = 0$$



2. Die erforderlichen virtuellen Geschwindigkeiten sind gemäß der Kinematikanalyse eines Viergelenkgetriebes, siehe Abschn. 3.3.2, als Funktion der beliebig gewählten **unabhängigen virtuellen Geschwindigkeit** $\delta \omega_{21}$ darzustellen, da das System nur **1 FHG** besitzt: Mit der Annahme von $\delta \omega_{21}$ in Richtung von φ_{21} folgt:

$$\delta v'_{Dx} = r \delta \omega_{21}$$

$$\delta \mathbf{v}'_B = \begin{pmatrix} \delta v'_{Bx} \\ \delta v'_{By} \\ 0 \end{pmatrix} = \delta \tilde{\omega}'_{41} \mathbf{r}'_{BB0} = \mathbf{b} \begin{pmatrix} -\sin(\psi - \gamma) \\ \cos(\psi - \gamma) \\ 0 \end{pmatrix} \delta \omega_{41} = \mathbf{b} i_{42} \begin{pmatrix} -\sin(\psi - \gamma) \\ \cos(\psi - \gamma) \\ 0 \end{pmatrix} \delta \omega_{21}, \quad i_{42} = \frac{\omega_{41}}{\omega_{21}}$$

Da in Abschnitt 3 die X-Achse parallel zu Gestell 1 gelegt wurde, ist für $\delta v'_{Cy}$ noch die Transformation mit Winkel γ erforderlich:

$$\delta v'_{Cy} = -\delta v_{Kx} \sin \gamma + \delta v_{Ky} \cos \gamma = p_F \delta \omega_{21}$$

$$\delta v_{Kx} = \left(-a \sin \varphi + \frac{ac}{c2} \sin \varphi \right) \delta \omega_{21} - \frac{bc}{c2} \sin \psi i_{42} \delta \omega_{21} = \left(-\frac{a}{2} \sin \varphi - \frac{b}{2} \sin \psi i_{42} \right) \delta \omega_{21}$$

$$\delta v_{Ky} = \left(a \cos \varphi - \frac{ac}{c2} \cos \varphi \right) \delta \omega_{21} + \frac{bc}{c2} \cos \psi i_{42} \delta \omega_{21} = \left(\frac{a}{2} \cos \varphi + \frac{b}{2} \cos \psi i_{42} \right) \delta \omega_{21}$$

3. Die virtuellen Geschwindigkeiten in das Prinzip eingesetzt und geordnet nach Termen in $\delta\omega_{21}$:

$$\begin{aligned}\delta P &= (Rr - F p_F + F_{35} \cos\beta b_{i_{42}} \sin(\psi - \gamma) - F_{35} \sin\beta b_{i_{42}} \cos(\psi - \gamma)) \delta\omega_{21} \\ &= \left(Rr - F p_F + F_{35} \underbrace{b_{i_{42}} \sin(\psi - \gamma - \beta)}_{p_{F35}} \right) \delta\omega_{21} = 0\end{aligned}$$

4. Da $\delta\omega_{21}$ eine beliebige Größe ist, muß Klammerausdruck (..) für sich verschwinden:

--> liefert Gleichung für F. Mit den angegebenen Daten erhält man

$$F = \frac{Rr + F_{35} p_{F35}}{p_F} \stackrel{\text{siehe Anhang 6B}}{=} 8,46\text{N}$$

- ☞ Der geringe Ergebnisunterschied zum Gleichgewichtsverfahren, Abschnitt 6.4.2, ist mit ungenauen Winkelangaben verbunden.

- ☞ Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten liefert nur die eingepprägten Kräfte. Werden auch die Gelenkkräfte gewünscht, muß man noch das Gleichgewichtsverfahren anwenden.

6.5.3 Graphisches Verfahren zum Prinzip der virtuellen Leistungen

Vorgehensweise:

1. Bei der graphischen Auswertung benutze die Vektorgleichung des Prinzips der virtuellen Leistung

$$\delta P = \sum_{j=1}^p (\vec{F}_j \cdot \delta \vec{v}_j) = 0$$

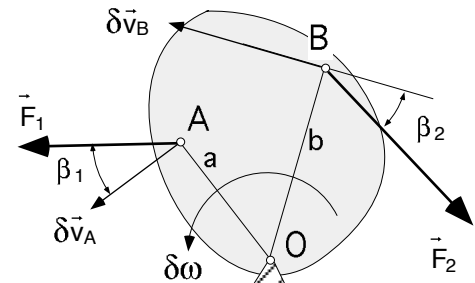
mit \vec{F}_j als die im System zu berücksichtigten eingeprägten Kräfte (und d'Alembertschen Kräfte)

Beispiel: Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 in A und B eines rotierenden

Körpers

Für neben stehendes Bild gilt:

$$\begin{aligned} \delta P &= F_1 \delta v_A \cos \beta_1 - F_2 \delta v_B \cos \beta_2 \\ &= (F_1 a \cos \beta_1 - F_2 b \cos \beta_2) \delta \omega = 0 \end{aligned}$$

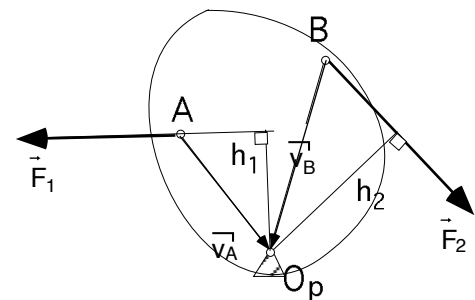


2. Die erforderlichen virtuellen Geschwindigkeiten $\delta \vec{v}_j$ werden graphisch bestimmt in Abhängigkeit einer frei gewählten Antriebsgeschwindigkeit, z.B. $\delta \omega$.
3. Zeichne den Geschwindigkeitsplan mit gedrehten Geschwindigkeiten, deren Spitzen alle zu einem Punkt O_P zeigen. Wähle $\hat{v}_A = a$ und $\hat{v}_B = b$.

4. Am Fuß der Geschwindigkeitsvektoren trage die Kräfte an und bilde die "Momentenbilanz" um O_P , wobei man die Abstände h_j zu den Wirklinien ausmisst.

Für neben stehendes Bild gilt:

$$(F_1 a \cos \beta_1 - F_2 b \cos \beta_2) = (F_1 h_1 - F_2 h_2) = 0$$



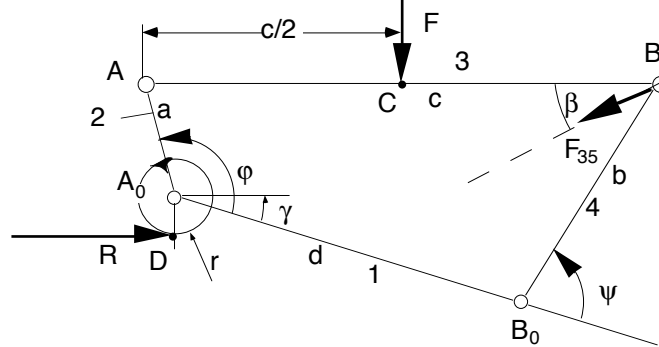
5. Das Prinzip liefert die Gleichung für die unbekannten Kräfte:

Merke:

$$\delta P = \sum_{j=1}^p (F_j h_j) \delta \omega = 0 \quad \xrightarrow{\delta \omega \neq 0} \quad \sum_{j=1}^p (F_j h_j) = 0$$

Beispiel: Druckkraft des Tischfeuerzeuges

☞ Aufgabenbeschreibung und Bild aus Abschnitt 6.4.2: Bestimme die Kraft F !



1. Zu berücksichtigende Kräfte und deren virtuellen Geschwindigkeiten in Abhängigkeit der Antriebsgeschwindigkeit $\delta\omega_{21}$ sind:

◇ Reibkraft R in Punkt D Glied 2,

Geschwindigkeit δv_D aus $\delta v_A / a = \delta v_D / r = \delta\omega_{21}$

◇ Druckkraft F in Punkt C Glied 3,

Geschwindigkeit δv_C aus δv_A und Pol P_{31}

◇ Federkraft F_{35} in Punkt B Glied 3,

Geschwindigkeit δv_B aus δv_A und Pol P_{31}

Wähle $\hat{v}_A = AP_{31} = AO_P$.

2. Virtuelle Leistung:

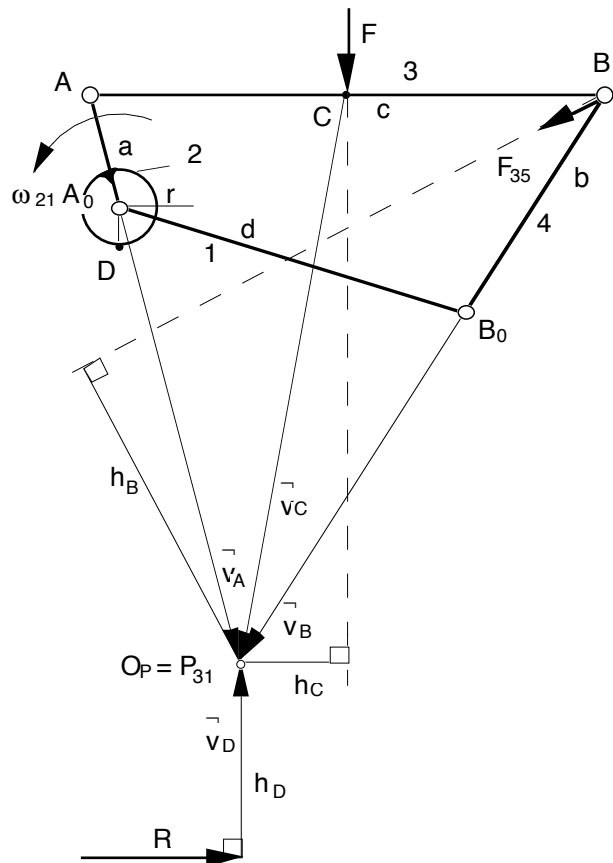
$$\delta P = \vec{R} \cdot \delta \vec{v}_D + \vec{F} \cdot \delta \vec{v}_C + \vec{F}_{35} \cdot \delta \vec{v}_B = 0$$

3. Aus dem Plan der gedrehten Geschwindigkeiten entnimmt man die Abstände h_D , h_C , h_B und berechnet:

$$R h_D - F h_C + F_{35} h_B = 0$$

--> Druckkraft F :

$$F = \frac{R h_D + F_{35} h_B}{h_C} = \frac{3 \cdot 26 + 0,9 \cdot 45}{14} = 8,5 \text{ N}$$



6.6 Berücksichtigung von Reibung in Gelenken

☞ Reibkräfte behindern die Bewegung, sie ergeben eine Verlustleistung, die i.a. in Wärme umgewandelt wird.

Die Reibkraft in einem Gelenk ist stets der Relativbewegung entgegengerichtet.

☞ Vereinfachtes Modellgesetz für konstante Relativgeschwindigkeit v_{21} : $R_{21} = \mu N_{21}$

mit N als Normal- oder Zwangskraft und μ als Gleitreibkoeffizient

I.a. ist μ nicht konstant über v_{21} : für $v_{21} = 0$ gilt Haftreibkoeffizient $\mu_0 > \mu$.

☞ Typische Werte:

| Werkstoffpaarung | μ trocken | μ gefettet |
|----------------------|---------------|----------------|
| Stahl auf Stahl | 0,15 | 0,01 |
| Metall auf Holz | 0,4 ... 0,5 | 0,1 |
| Stahl auf Eis | 0,015 | - |
| Holz auf Holz | 0,2 .. 0,4 | 0,08 |
| Bremsbelag auf Stahl | 0,5 .. 0,6 | 0,3 .. 0,5 |

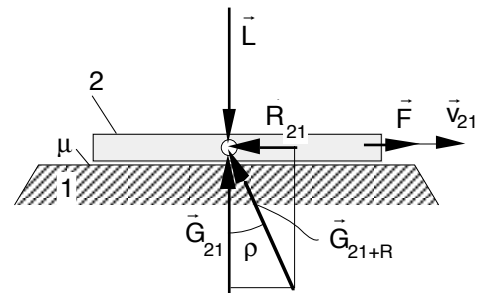
Schubgelenk:

Reibkraft $\vec{R}_{21} = -\mu G_{21} \frac{\vec{v}_{21}}{|\vec{v}_{21}|}$

Betrag $R_{21} = \mu G_{21}$

Gesamt-Gelenkkraft $G_{21+R} = \sqrt{G_{21}^2 + R_{21}^2} = G_{21} \sqrt{1 + \mu^2}$

Reibwinkel $\rho = \arctan \mu$



Drehgelenk:

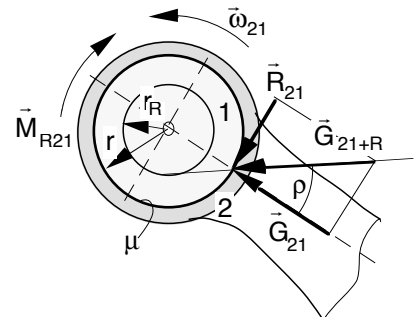
Zapfenradius r

Reibradius $r_R \approx \mu r$

Reibkraftbetrag $R_{21} = \mu G_{21}$

Reibmoment $\vec{M}_{R21} = -\mu r G_{21} \frac{\vec{\omega}_{21}}{|\vec{\omega}_{21}|}$

Betrag $M_{R21} = r R_{21} = r_R G_{21+R}$

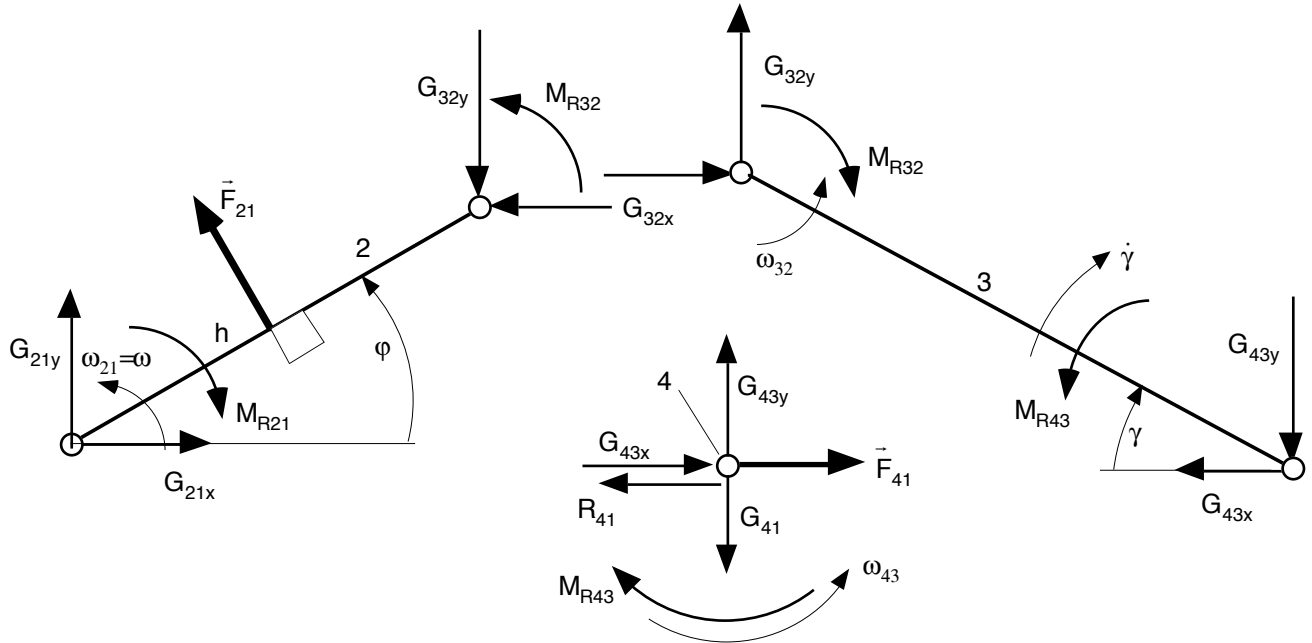


Beachte: Reibkräfte sind eingeprägte Kräfte und werden als Verlustleistung gerechnet, vgl. Abschn. 2.11

Zur Aufgabe 6.1: Abtriebskraft $F_{41} = 500 \text{ N}$, Hebelarm der Kraft F_{21} an Kurbel: $h = 15 \text{ cm}$
 Alle Drehgelenke Zapfenradius $r = 4 \text{ cm}$, $\mu = 0,25 \rightarrow r_R = 4 \cdot 0,25 = 1 \text{ cm}$
 Schubgelenk $\mu = 0,15 \rightarrow \rho = \arctan 0,15 = 8^\circ$.
 Maßstäbe $M_S = 1 \text{ cm} / 5 \text{ cm}$, $M_F = 1 \text{ cm} / 100 \text{ N}$

B. Rechnerisch

Gleichgewicht an allen Gliedern unter Beachtung der Reibkräfte bzw. -momente



Reibmomente: $M_{Rij} = -\mu r G_{ij} \frac{\omega_{ij}}{|\omega_{ij}|}$ mit $G_{ij} = \sqrt{G_{ijx}^2 + G_{ijy}^2}$

Reibkraft: $R_{ij} = -\mu G_{ij} \frac{v_{ij}}{|v_{ij}|}$

Winkelgeschwindigkeiten: $\omega_{21} = \omega$
 $\omega_{41} = \omega_{43} + \omega_{32} + \omega_{21} = \omega_{43} + \omega_{31} = 0 \Rightarrow \omega_{43} = -\omega_{31} = \omega_{34};$
 $\omega_{34} = -\dot{\gamma} \Rightarrow \omega_{31} = -\dot{\gamma}$
 $\omega_{31} = \omega_{32} + \omega_{21} \Rightarrow \omega_{32} = -\dot{\gamma} - \omega;$

aus Aufgabe 2.17: $\dot{\gamma} = \omega \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{l^2 - (e + r \sin \varphi)^2}}$

Geschwindigkeit: $v_{41} = \dot{s} = -r \omega \sin \varphi - l \dot{\gamma} \sin \gamma$ mit $\sin \gamma = \frac{e + r \sin \varphi}{l}$

Antriebsmoment: $M_{21} = h F_{21}$

Gleichgewicht liefert wegen den Reibmomenten ein nichtlineares Gleichungssystem der Art:

$$\mathbf{S} \mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{b}$$

↑↑

nichtlinearer Term

Lösung nur noch iterativ zu finden.

Aufgaben zu Kap. 6 (siehe auch home page)

Aufgabe 6.1: Kinetostatik der exzentrischen Schubkurbel (analytisch)

Geg.: Schubkurbel entsprechend Aufgabe 2.17 mit Längen $r = 30$ cm, $l = 60$ cm, $e = 10$ cm,

Winkel $\varphi = 30^\circ$ bewegt sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 4$ rad/s = konstant.

Auf den Kolben wirkt eine konstante äußere Last von $F_{41} = 500$ N.

Die Reibung im Schubgelenk 41 wird mit $\mu = 0.15$ angenommen.

Die Erdbeschleunigung wirkt in $-Y$ mit $g = 10$ m/s².

Die Massendaten sind: Masse der Kurbel $m_2 = 3$ kg, Trägheitsradius $i_2 = 10$ cm, Schwerpunkt S_2

liegt in A_0 , Masse der Koppel $m_3 = 6$ kg, homogener Stab, Masse des Kolbens $m_4 = 1$ kg,

Schwerpunkt S_4 in B.

Ges.:

- a) Alle Gelenkkräfte und Antriebsmoment M_{21} als Funktion von φ unter Beachtung der Massenkräfte, Gewichtskräfte und der äußeren Last. Reibung wird vernachlässigt.

Verwende dazu die in Aufgabe 2.17 entwickelten kinematischen Beziehungen:

$$\sin \gamma = \frac{e + r \sin \varphi}{l}, \quad \cos \gamma = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma} = \frac{1}{l} \sqrt{l^2 - (e + r \sin \varphi)^2}$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\omega r \cos \varphi}{\sqrt{l^2 - (e + r \sin \varphi)^2}}$$

$$\ddot{\gamma} = \frac{\alpha r \cos \varphi}{\sqrt{l^2 - (e + r \sin \varphi)^2}} - \frac{\omega^2 r \sin \varphi}{\sqrt{l^2 - (e + r \sin \varphi)^2}} + \frac{\dot{\gamma}^2 l \sin \gamma}{\sqrt{l^2 - (e + r \sin \varphi)^2}}$$

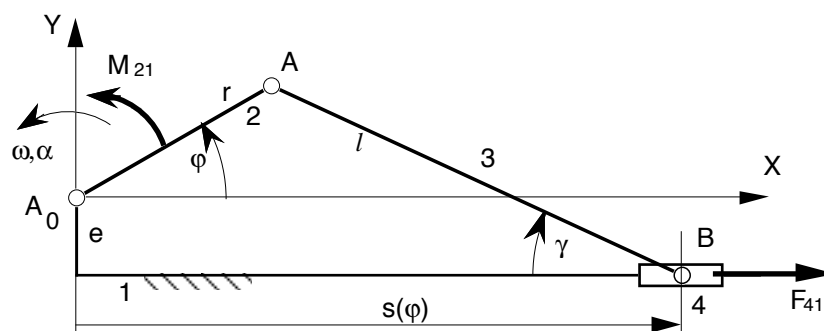
$$a_{S3x} = -\alpha r \sin \varphi - \omega^2 r \cos \varphi - \ddot{\gamma} \frac{l}{2} \sin \gamma - \dot{\gamma}^2 \frac{l}{2} \cos \gamma$$

$$a_{S3y} = +\alpha r \cos \varphi - \omega^2 r \sin \varphi - \ddot{\gamma} \frac{l}{2} \cos \gamma + \dot{\gamma}^2 \frac{l}{2} \sin \gamma$$

$$a_{S4x} = -\alpha r \sin \varphi - \omega^2 r \cos \varphi - \ddot{\gamma} l \sin \gamma - \dot{\gamma}^2 l \cos \gamma$$

Wende die Gleichgewichtsmethode an.

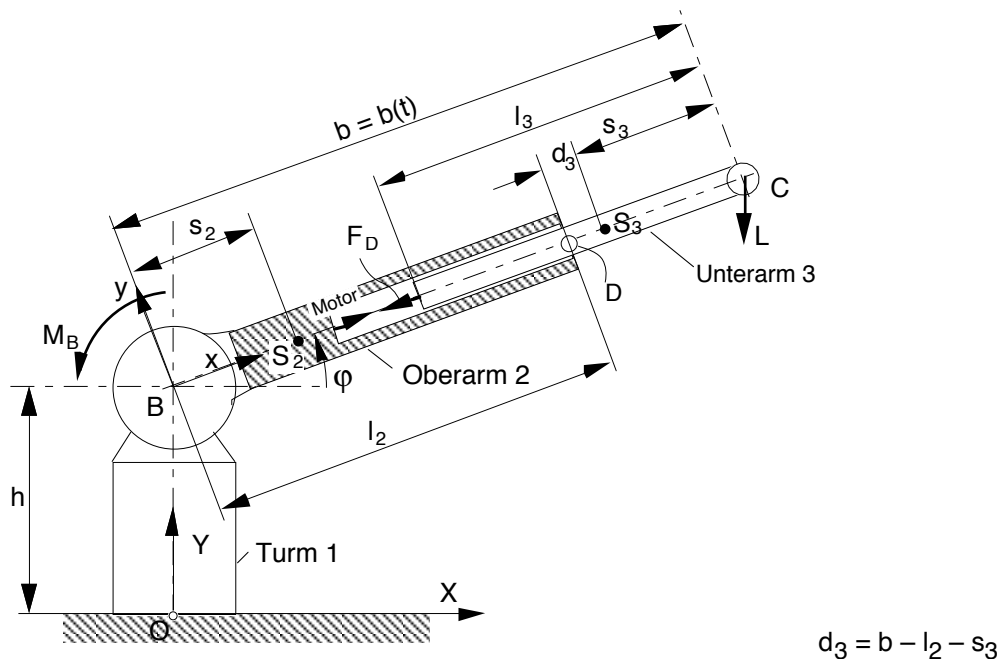
- b) Werte der Gelenkkräfte und das Antriebsmoment für $\varphi = 30^\circ$ und $\omega = 4$ rad/s, $\alpha = 0$ aus.
- c) Welches Antriebsmoment M_{21} ist erforderlich, wenn man die Gewichtskräfte und Massenkräfte vernachlässigt?
- d) Welches Antriebsmoment M_{21} ist erforderlich, wenn man die Gewichtskräfte und Massenkräfte vernachlässigt aber die **Reibung** in Gelenk 41 hinzunimmt?
- e) Alternativ zu c) bestimme das Antriebsmoment nach dem Prinzip der virtuellen Leistungen.



Lösung: b) $G_{21x} = -534.28$ N = G_{32x} , $G_{21y} = 293.78$ N, $G_{32y} = 263.78$ N, $G_{43x} = -505.45$ N, $G_{43y} = 210.98$ N, $G_{41y} = 200.98$ N, $M_{21} = 148.67$ Nm, c) $M_{21} = 134.54$ Nm, d) $M_{21} = 144.47$ Nm,

Aufgabe 6.2 Roboter mit ausfahrbarem Arm (Glieder 3) unter Last, vgl. Aufgabe 3.1.Gesucht:

- a) Bestimme alle Gelenkkräfte sowie das Antriebsmoment M_B in Gelenk B und die Antriebskraft F_D in der Spindel des Ausfahrmechanismus (Gelenk D), wenn am Greifer eine Last $L = 400 \text{ N}$ vorliegt und der Greifer sich in seiner maximalen Stellung befindet, d. h. $Y_C = 0$ und Arm voll ausgefahren ($b = 90 \text{ cm}$). Der Roboter sei dabei in Ruhe (keine Massenträgheitskräfte einbeziehen). Weitere Daten: $h = 30 \text{ cm}$, Masse Oberarm $m_2 = 40 \text{ kg}$, Schwerpunkt bei $s_2 = 20 \text{ cm}$, $l_2 = 70 \text{ cm}$, Masse Unterarm $m_3 = 15 \text{ kg}$, Länge $l_3 = 40 \text{ cm}$, Schwerpunktsabstand $s_3 = 20 \text{ cm}$.
- Empfehlung:** Verwende das körperfeste Koordinatensystem und Kontaktpunkt D!
- b) Gebe M_B und F_D an, wenn der Arm eingezogen werden soll und dabei im Gelenk D eine Haftreibungskoeffizient von $\mu = 0.2$ vorliegt.
- c) Gebe M_B und F_D an, wenn die Last $L = 0$ ist.
- d) Hat die Lage des Gelenkpunktes D im Oberarm einen Einfluß auf die Ergebnisse von M_B und F_D ?
- e) Ergänzung zu b): Bestimme die Antriebsleistung des Roboters, wenn im genannten Lagezustand a) der Oberarm mit $\omega = 3 \text{ rad/s}$ hoch und der Unterarm mit $\dot{b} = -10 \text{ cm/s}$ einfährt.

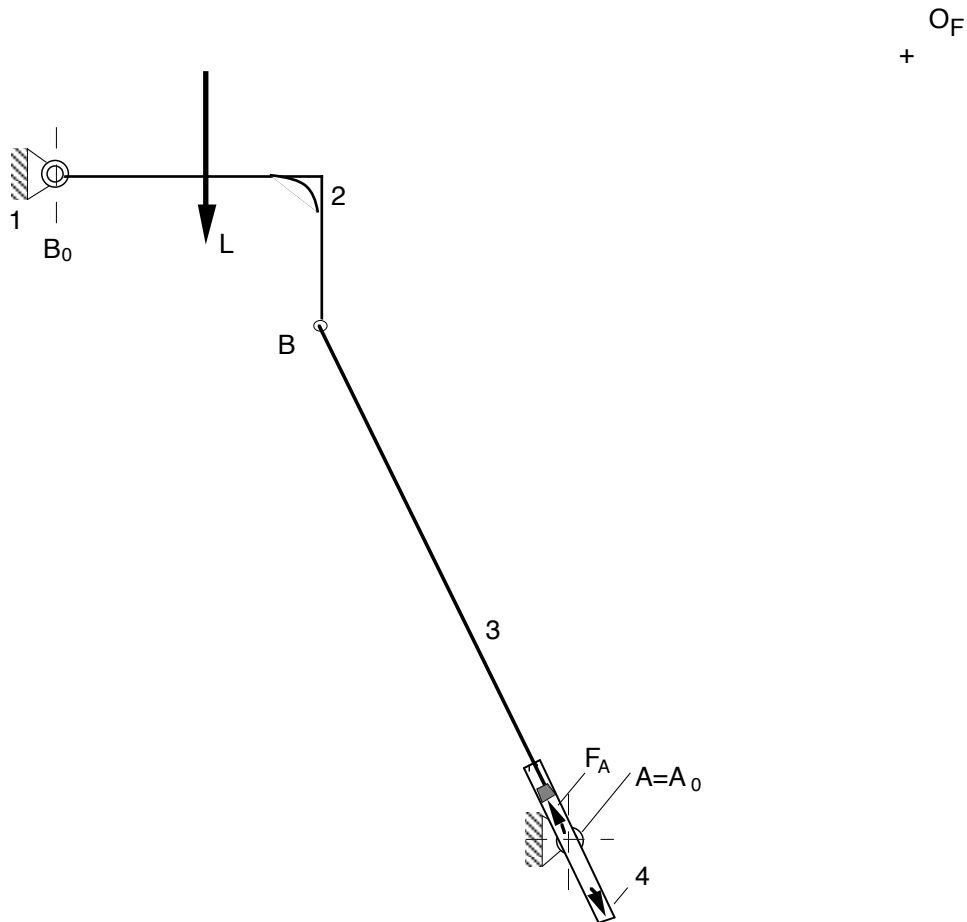


Lösung: a) $G_{21x} = -317 \text{ N}$, $G_{21y} = 896 \text{ N}$, $G_{32} = 518 \text{ N}$, $M_{G32} = 7542 \text{ Ncm}$, $F_D = 183 \text{ N}$, $M_B = 51383 \text{ Ncm}$,
 b) $F_D = 287 \text{ N}$, c) $F_D = 78 \text{ N}$, $M_B = 17442 \text{ Ncm}$, d) nein e) $P = 1,57 \text{ kW}$

Aufgabe 6.11 Ein Klapptisch (Glieder 2) wird durch einen Hydraulikzylinder (Glieder 4) mit Kolbenstange (Glieder 3) in verschiedene Positionen gebracht.

Gesucht:

1. Für den maßstäblich dargestellten Klapptisch ermittle graphisch nach dem Gleichgewichtsverfahren die erforderliche Kolbenkraft F_A sowie alle Gelenkkräfte, wenn eine Last von $L = 700 \text{ N}$ vorliegt.
Maßstäbe: $M_S = 10 \text{ cm} / 1 \text{ m}$, $M_F = 1 \text{ cm} / 100 \text{ N}$.



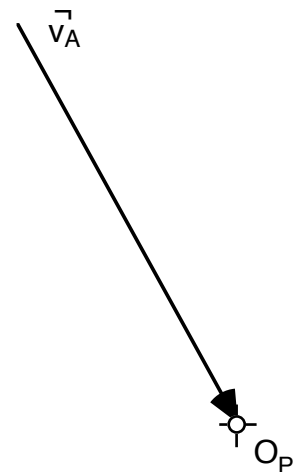
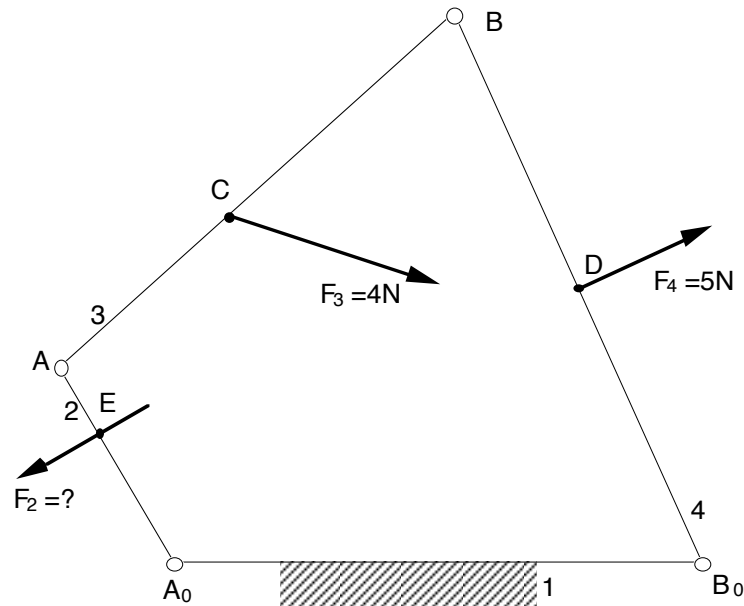
Lösung: $G_{21} = 320 \text{ N}$, $F_A = 610 \text{ N}$, $G_{41} = 610 \text{ N}$

Aufgabe 6.12 Das Viergelenkgetriebe mit den gezeigten Abmessungen wird durch Lasten F_3 und F_4 belastet.

Gesucht:

Finde graphisch die Gleichgewichtskraft F_2 nach dem Prinzip der virtuellen Leistungen.

Verwende $\hat{v}_A = 6 \text{ cm}$, Maßstäbe $M_S = 1 \text{ cm} / 1 \text{ cm}$, $M_F = 1 \text{ cm} / 1 \text{ N}$



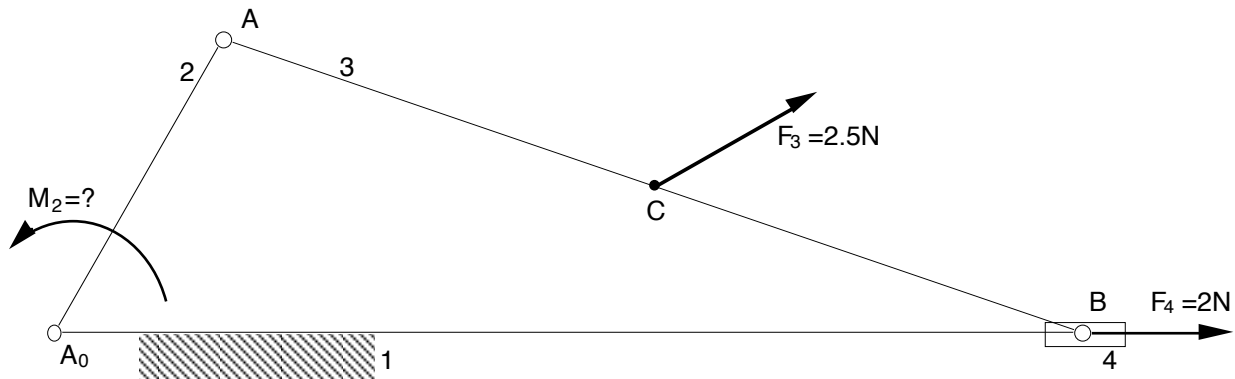
Lösung: $F_2 = 8.1 \text{ N}$

Aufgabe 6.13 Die Schubkurbelgetriebe mit den gezeigten Abmessungen wird durch die Lasten F_3 und F_4 belastet.

Geg.: $A_0A = r = 6 \text{ cm}$, $AB = 16 \text{ cm}$, Maßstäbe $M_S = 1 \text{ cm} / 1.333 \text{ cm}$, $M_F = 2 \text{ cm} / 1 \text{ N}$

Ges.:

- Alle Gelenkkräfte und das Gleichgewichtsmoment M_2 am Glied 2 nach dem Gleichgewichtsverfahren
- Gleichgewichtsmoment M_2 nach dem Prinzip der virtuellen Leistungen. Verwende $\hat{v}_A = 4.5 \text{ cm}$.



O_F
+

Lösung: $M_2 = 22.8 \text{ Ncm}$, $G_{32} = 4.15 \text{ N}$, $G_{34} = 1.7 \text{ N}$

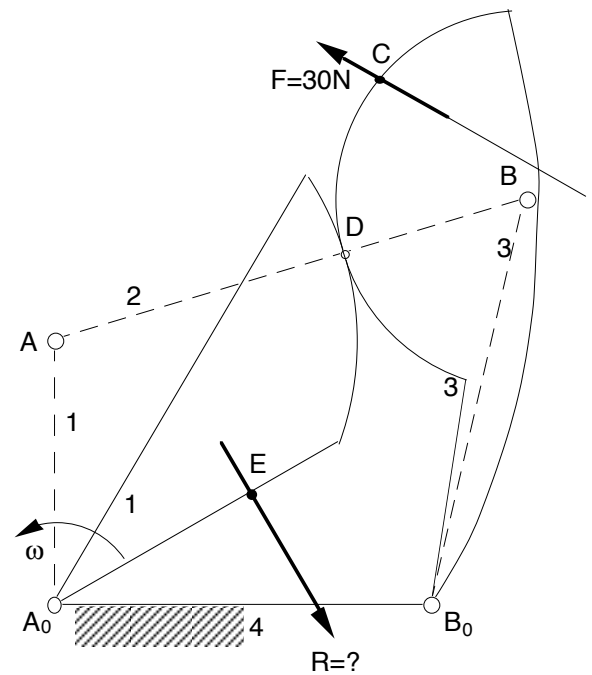
Aufgabe 6.14: Graphische Lösung der Statik eines Kurvengetriebes

Geg.: Kurvengetriebe mit den gegebenen Abmessungen und der Last F an Glied 3.

$A_0A = a = 8,75 \text{ cm}$, $AB = c = 16,25 \text{ cm}$, $A_0B_0 = b = 12,5 \text{ cm}$, $B_0B = 13,75 \text{ cm}$, $AD = 10 \text{ cm}$, $A_0E = 7,5 \text{ cm}$, $B_0C = 17,5 \text{ cm}$, Maßstäbe $M_s = 1 \text{ cm} / 2,5 \text{ cm}$, $M_F = 1 \text{ mm} / 1 \text{ N}$

Ges.:

- Alle Gelenkkräfte und die Gleichgewichtskraft R am Glied 1 nach dem Gleichgewichtsverfahren
- Welche Leistung fließt momentan durch das Getriebe, wenn $\omega = -2 \text{ rad/s}$.



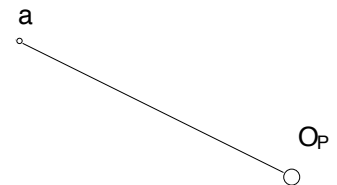
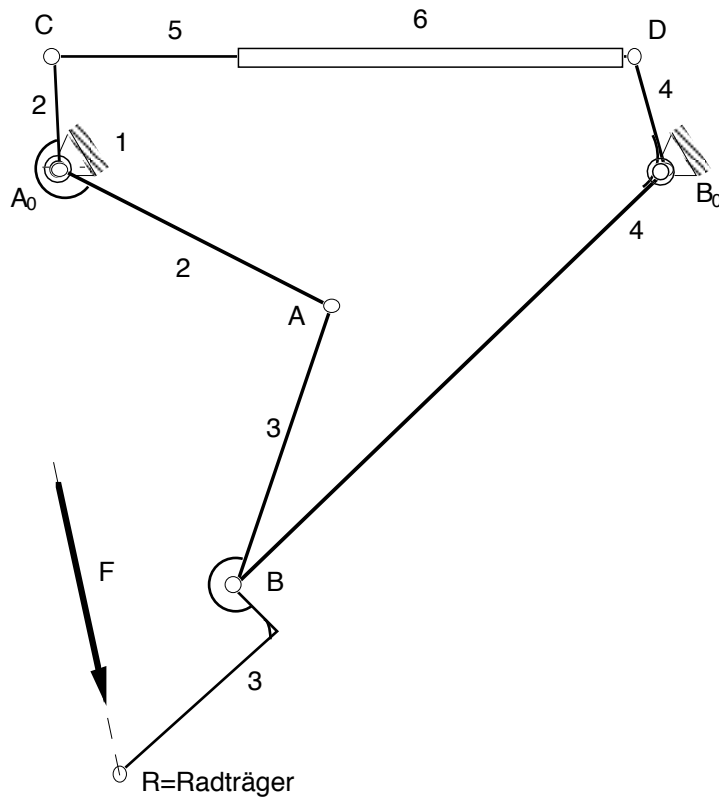
Lösung: a) $G_{21} = 36 \text{ N} = G_{32}$, $G_{34} = 27 \text{ N}$, $G_{14} = 47 \text{ N}$, $R = 40 \text{ N}$, b) $P = 6 \text{ W}$

Aufgabe 6.15: Graphische Lösung der Statik eines Flugzeugfahrwerks

Geg.: Flugzeugfahrwerk in gezeichneter Stellung ist mit F belastet. Als Gleichgewichtskraft wirkt die Kolbenkraft K im Glied 6.

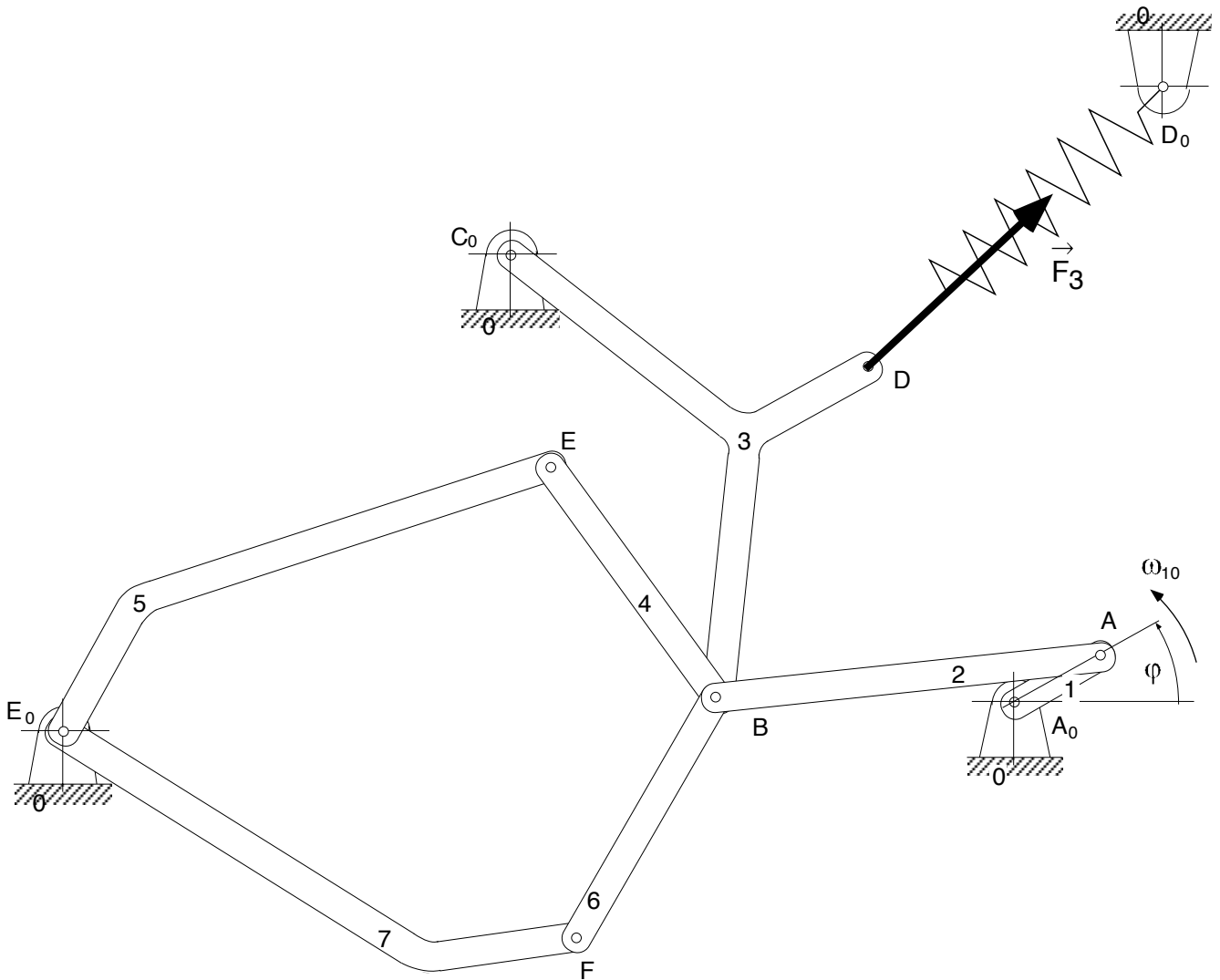
Ges.:

- a) Die Gleichgewichtskraft K im Glied 6 als Funktion von F nach dem Prinzip der virtuellen Leistungen. Wähle $\hat{v}_A = (A_0A)$.



Aufgabe 6.16 Statik des 7-Körper-Mechanismus aus SCHIEHLEN, 1990, vgl. Aufgabe 3.14Gesucht:

- a) Gesucht ist das Antriebsmoment am Glied 1 nach dem Prinzip der virtuellen Leistungen, wenn die Feder mit $F_3 = 20 \text{ N}$ Zugkraft in der gezeichneten Getriebestellung vorgespannt ist. Benutze die Ergebnisse aus A 3.14, $\hat{v}_A = 7 \text{ cm}$.
- b) Wie groß ist der aktuelle Wirkungsgrad des Getriebes, wenn eine aktuelle Antriebsleistung $P_{\text{an+R}} = 1 \text{ W}$ bei $\omega_{10} = 10 \text{ rad/s}$ erforderlich ist.



Lösung: a) $F_A = 5.7 \text{ N}$, $M = 8 \text{ Ncm}$; b) $\eta = 0.8$

Aufgabe 6.17 Dynamik eines Kolbenmotors.

Der gezeigte Kolbenmotor im Schwerfeld wird bei jedem Umlauf durch eine Kolbenkraft

$$F_K = F_0 \cdot \sin(2\varphi) \text{ zwischen } 0 \text{ und } \pi/2 \text{ angetrieben.}$$

Der Motor besteht aus Kurbelwelle (Index W) mit Schwerpunkt in A, Pleuel (Index P) mit Schwerpunkt in S_P und Kolben (Index K) mit Schwerpunkt in C.

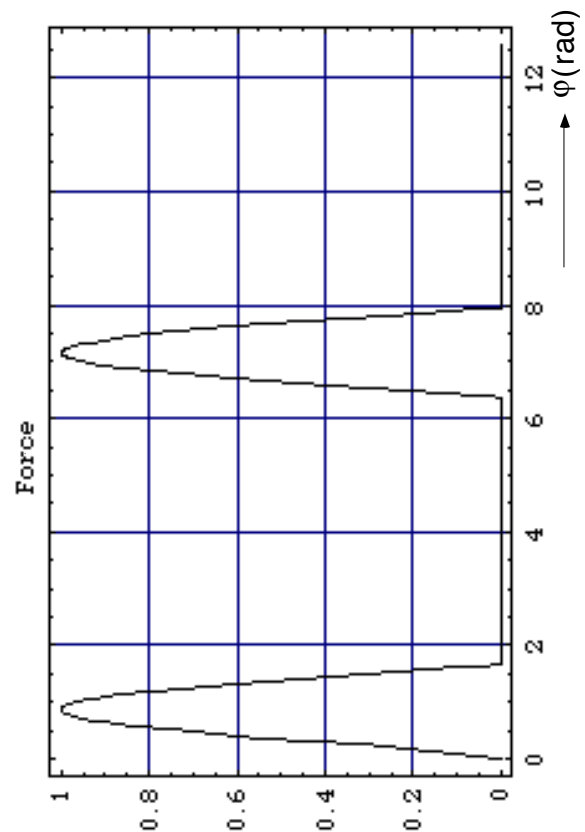
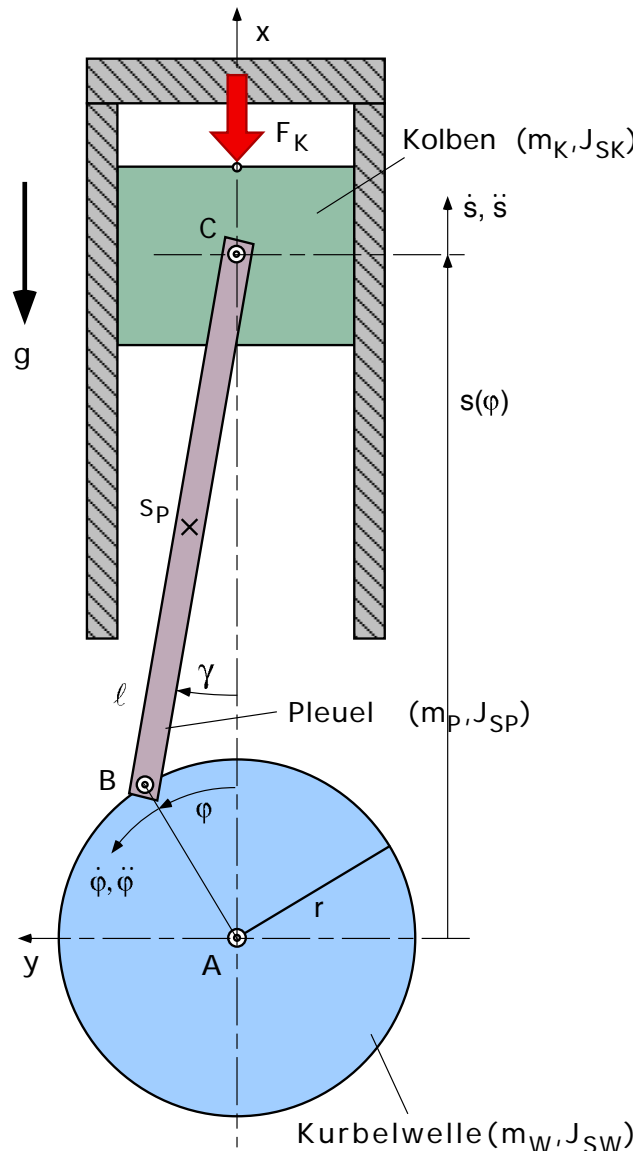
Die **Daten** sind: Kraft $F_0 = 1 \text{ N}$,

Kurbelwelle: Masse $m_W = 0.8 \text{ kg}$, Massenträgheitsmoment $J_{SW} = 2.4e-4 \text{ kgm}^2$, $r = 0.03 \text{ m}$.

Pleuel: Masse $m_P = 0.1 \text{ kg}$, J_{SP} aus dünner Stab, $l = 0.09 \text{ m}$, $b = BS_P = l/2$

Kolben: Masse $m_K = 0.2 \text{ kg}$, $J_{SK} = 5.0e-5 \text{ kgm}^2$.

Anfangsbedingungen für $\varphi(t)$: $\varphi(0) = 0$, $d\varphi(0)/dt = 6 \text{ rad/s}$. Verwende $\lambda = r/l$.

**Gesucht**

Stelle die Bewegungsgleichungen des Motors nach dem Prinzip der virtuellen Leistungen auf und löse die Gleichungen mittels Maple.

Zeichne die Drehbewegung der Kurbelwelle und Linearbewegung des Kolbens als Funktion der Zeit auf.

Für $t = 0 \text{ sec.}$ gebe an: $m_{\text{ges}} = 0.00027 \text{ kgm}^2$, $\varphi = 0 \text{ rad}$, $d\varphi/dt = 6 \text{ rad/s}$, $d^2\varphi/dt^2 = 1.0185 \text{ rad/s}^2$,

$$s = 0.12 \text{ m}, \quad ds/dt = 0 \text{ m/s}, \quad d^2s/dt^2 = -1.44 \text{ m/s}^2.$$

Für $t = 0.5 \text{ sec.}$ gebe an: $\varphi = 10.812 \text{ rad}$, $d\varphi/dt = 26.717 \text{ rad/s}$, $d^2\varphi/dt^2 = -336.27 \text{ rad/s}^2$,

$$s = 0.07956 \text{ m}, \quad ds/dt = 0.7375 \text{ m/s}, \quad d^2s/dt^2 = 1.641 \text{ m/s}^2.$$

