2 Modellbildung und Begriffe der Getriebetechnik

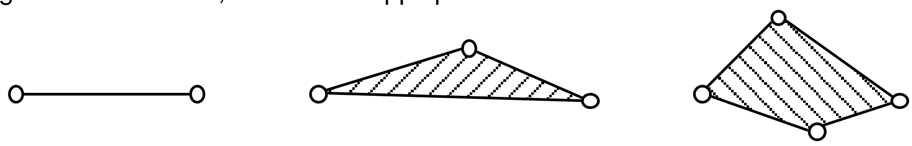
2.1 Glieder

Glieder?

☞ sind **starre Körper** mit Masse und mit **Koppelpunkten** (Anlenkpunkte, Knoten)

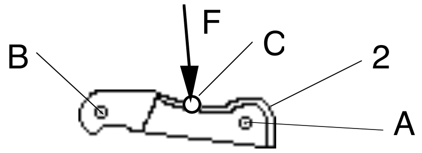
☞ Koppelpunkte sind Punkte am Glied, an denen Gelenke angebracht sind,
Kräfte eingeleitet werden oder die Bewegung ausgewertet werden soll.

☞ Benennung der Glieder mit 2, 3 oder k Koppelpunkten

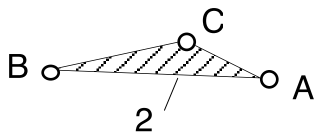


2-Gelenkglied *3-Gelenkglied* *4-Gelenkglied, falls Punkte = Gelenke*

Beispiel Drücker (Glied 2) des Tischfeuerzeuges aus 1.1



⇒ Symbol



☞ Koppelpunkte können als Koppellinie ausarten oder auf Linie (Fläche) wandern

☞ Ein Glied des Getriebes wird als raumfest betrachtet und wird **Gestell** genannt.

☞ Ist die Bewegung (Kraft/Moment) eines Gliedes bekannt, so ist das ein **Antriebsglied**,
ist die Bewegung (Kraft/Moment) eines Gliedes gesucht, so ist das ein **Abtriebsglied**.
Glieder dazwischen sind die **Koppelglieder.**

Ebene Betrachtung

☞ alle Drehachsen sind senkrecht zur Planebene, alle Koppelpunkte in einer Ebene,
bzw. können in eine Ebene projiziert werden

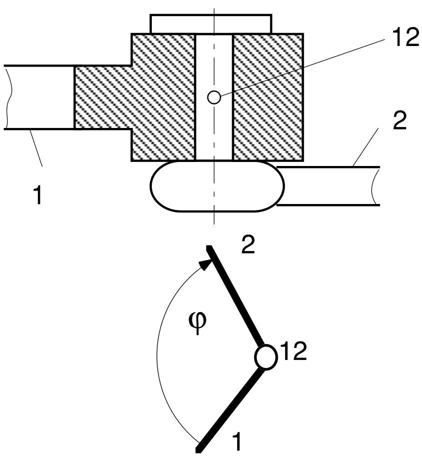
2.2 Gelenke

Gelenke?

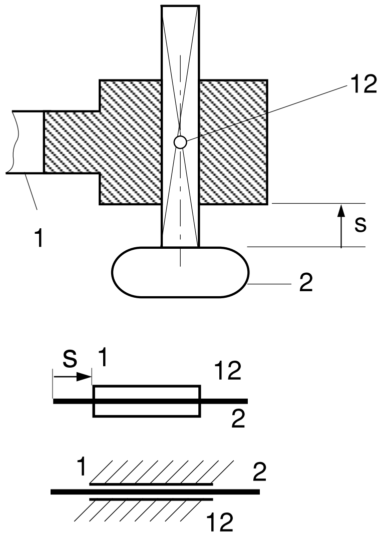
☞ verbinden zwei Glieder und schränken somit die Relativbewegung der beiden Glieder ein

☞ Einfache Gelenke sind das **Drehgelenk**, das **Schubgelenk** und das **Schraubgelenk**
sie bewirken eine Flächenberührung der Glieder,

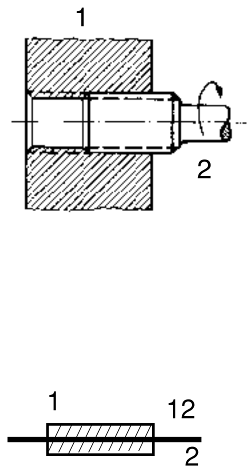
Die Zahl der Gelenkfreiheitsgrade einfacher Gelenke ist $f = 1$



Drehgelenk (D)



Schubgelenk (S)



Schraubgelenk (W)

☞ Gelenke mit Punkt- oder Linienberührung sind wegen hohem Verschleiß zu vermeiden,
z.B. Kugel auf Platte, Rolle auf Platte, usw.

☞ **Formschlüssige** Gelenke erfüllen immer die Relativbewegung, siehe Drehgelenk,
kraftschlüssige Gelenke nur bei Auftreten einer ausreichenden Normalkraft (Kurvengetriebe)
reibschlüssige Gelenke nur bei Auftreten einer ausreichenden Reibkraft (Riemenantrieb)

Freiheitsgrade (FHG) und Zwänge eines Gelenkes?

☞ Ein Gelenk schränkt die freie Bewegung des Gliedes 2 gegenüber dem Nachbarglied 1 ein.

Ein freies Glied hat 6 FHG im Raume (3D), d.h. **b = 6**, 3 FHG in der Ebene (2D), d.h. **b = 3**

☞ Ein Gelenk hat f = 1 bis 5 Freiheitsgrade, die Anzahl hängt von der Form der Gelenke ab.

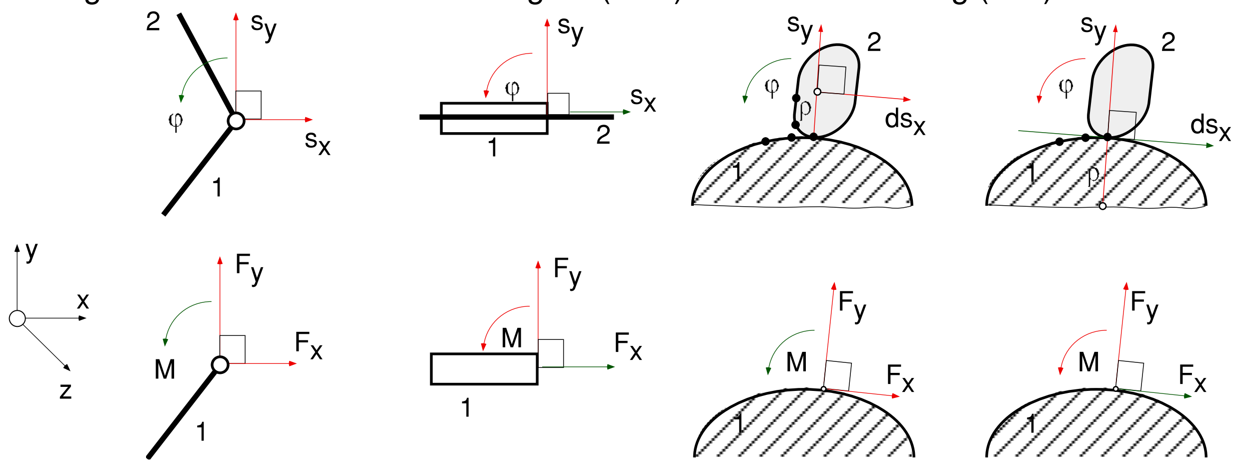
☞ Anzahl der Bewegungseinschränkungen (Unfreiheiten) längs eines Gelenkes **u = b – f**

Sonderfälle:

f = 6 wäre freie Bewegung des Gliedes 2 gegenüber 1 im Raume, folglich u = 0.

f = 0 wäre eine feste Verbindung beider Glieder folglich u = 6.

Wichtige Gelenke mit einem Freiheitsgrad (f = 1) bei 2D-Betrachtung (b=3)



Gelenktyp:	D	S	Rollen	Gleiten
FHG & Unfreih.:	f=1, u=2	f=1, u=2	f=1, u=2	f=1, u=2
Gelenkkoordinate:	φ	$s = s_x$	φ	s_x
Zwangsbedg.:	$s_x=0$, $s_y=0$	$\varphi=0$, $s_y=0$	$ds_x=-\rho d\varphi$, $s_y=0$	$d\varphi= -1/\rho\ ds_x$, $s_y=0$
eingeprägte Kraft:	M	F_x	M	F_x
Zwangskraft:	F_x, F_y	M, F_y	$F_x=+M/\rho$, F_y	$M =+\rho\ F_x$, F_y

Momentanpol?

siehe Abschn. 2.11

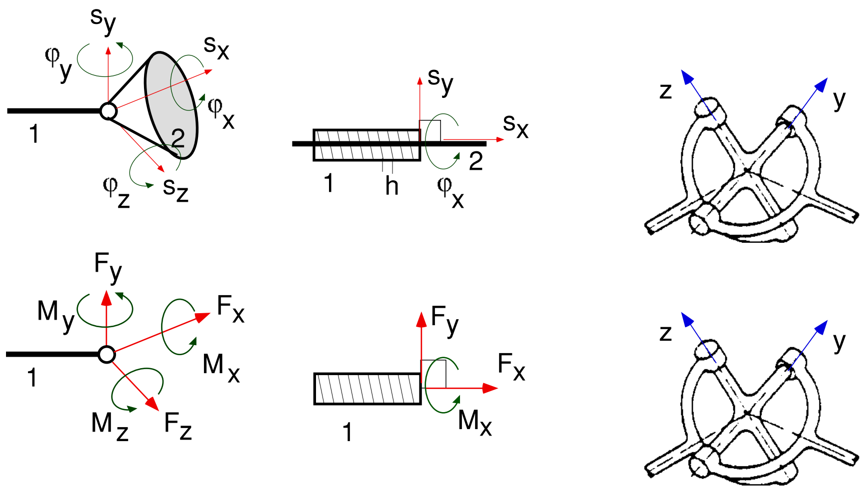
Wälzen ist eine Mischform von Drehen und Schieben mit f = 2,

weitere Mischformen siehe (VDI-2127 1988)

Kontaktkräfte (Rollen, Gleiten, Schieben) wirken stets normal zur Kontakt-Oberfläche!

Hinweis: ρ ist der Krümmungsradius

Wichtige Gelenke für räumliche Mechanismen (b=6)



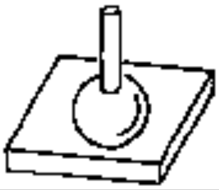
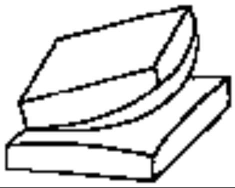
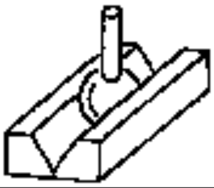
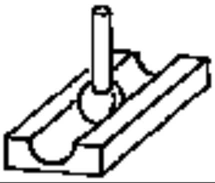
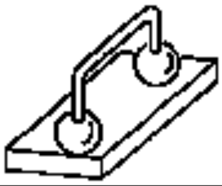
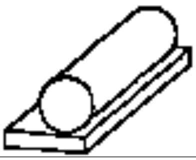
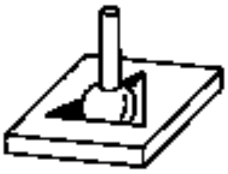
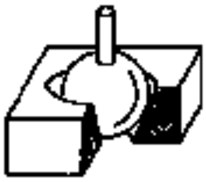
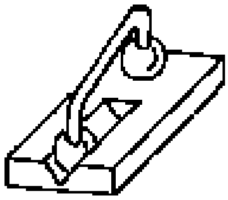
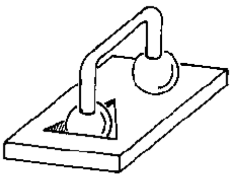
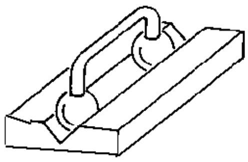
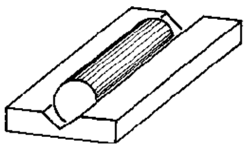
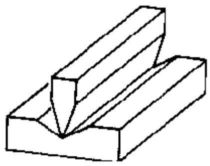
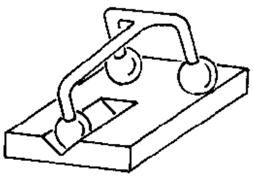
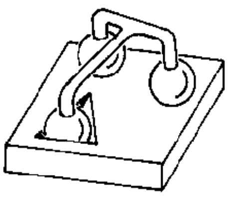
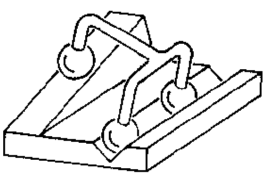
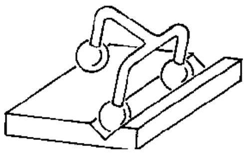
Gelenktyp	**D_3 (Kugelgelenk)**	**W (Schrauben)**	**Übung 2.1: Kardangelenk**
FHG & Unfreih.:	f=3, u=3	f=1, u=5	f= , u=
Gelenkkoordinate:	φ_x, φ_y, φ_z	φ_x	
Zwangsbedg.:	$s_x=s_y=s_z=0$	$s_x=h/2\pi\ \varphi_x$	
		$s_y=s_z=\varphi_y=\varphi_z=0$	
eingeprägte Kraft:	M_x, M_y, M_z	M_x	
Zwangskraft:	F_x, F_y, F_z	$F_x=-2\pi/h\ M_x$,	
		F_y, F_z, M_y, M_z	

Tafel 2.1: Kraftschlüssige Gelenke aus (Dizioglu 1965)

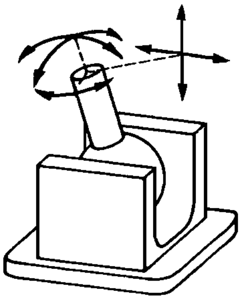
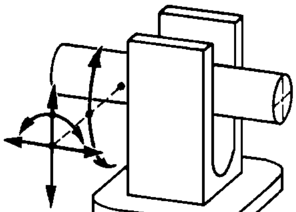
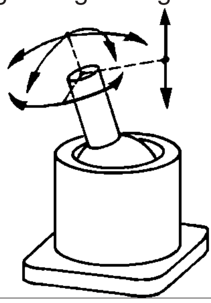
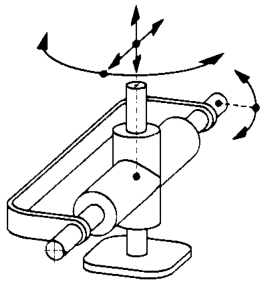
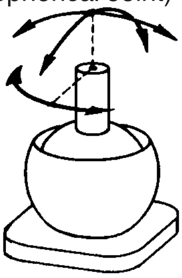
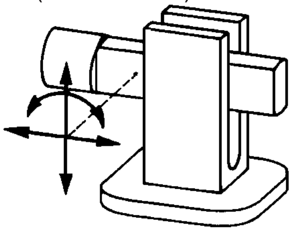
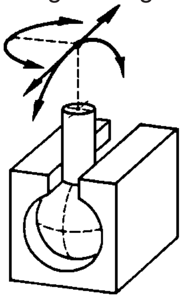
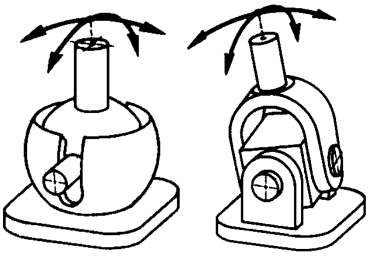
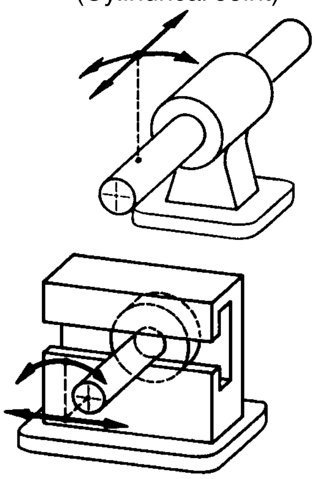
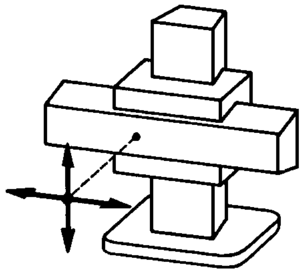
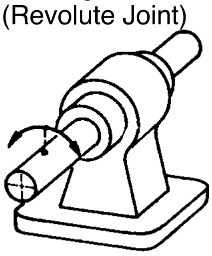
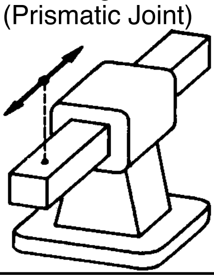
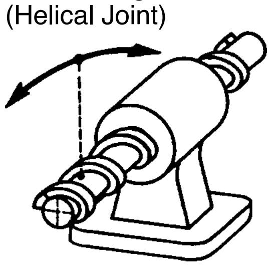
Tafel 2.2, 2.3: Formschlüssige Gelenke, vgl. (VDI-2156 1975; VDI-2127 1988)

HW: Aufgabe 2.1, 2.2, 2.18

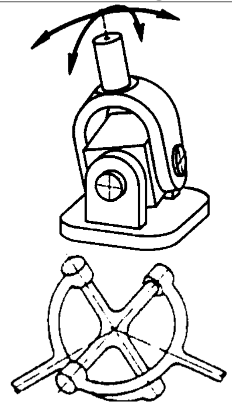
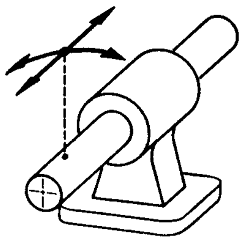
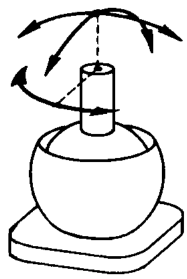
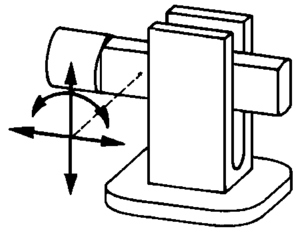
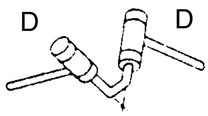
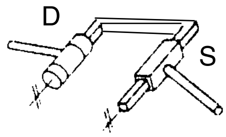
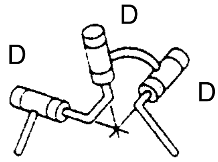
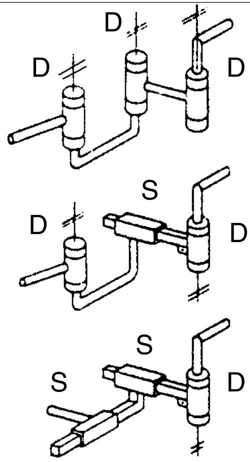
Tafel 2.1: Kraftschlüssige Gelenke mit 1 bis 5 Gelenkfreiheitsgraden

FHG				
5	1 	2 	3 	4 
5	5 			
4	6 	7 	8 	9 
4	10 			
3	11 	12 	13 	14 
2	15 	16 	17 	18 
2	19 			
1	20 	21 	22 	

Tafel 2.2: Formschlüssige Gelenke mit 1 bis 5 Gelenkfreiheitsgraden

FGH			
5	23) D_3S_2- Kugelflächengelenk 		
4	24) D_2S_2- Zylinderflächengelk. 	25) D_3S- Kugelrohrgelenk 	26) D_2S_2 - Doppeldrehschubg. 
3	27) D_3 - Kugelgelenk (Spherical Joint) 	28) DS_2- Plattengelenk (Planar Joint) 	29) D_2S Kugelrillengelenk 
2	30) D_2 - Kreuz-(Kardan-)gelenk (Universal (Tait-Bryan) Joint) 	31) DS - Drehschubgelenk (Cylindrical Joint) 	32) S_2 - Doppelschubgelenk 
1	33) D - Drehgelenk (Revolute Joint) 	34) S - Schubgelenk (Prismatic Joint) 	35) W - Schraubgelenk (Helical Joint) 

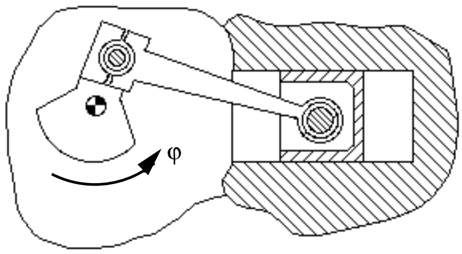
Tafel 2.3: Aufbau von Gelenken aus Dreh- und Schubgelenken

D_2- Kardangelenk	*DS-Drehschubgelenk*	*D_3-Kugelgelenk*	*DS_2-Plattenelenk*
			
			

2.3 Abbildungen eines Getriebes

Getriebekonstruktion

☞ realistisches Getriebe mit Gestell und Antrieb



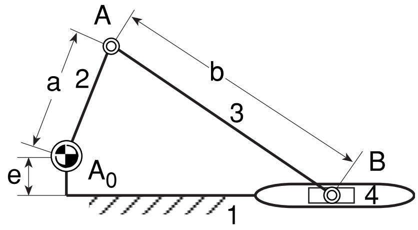
Getriebeschema

☞ maßstäbliche Skizze der kinematisch wichtigen Elemente,

Bezeichnung der Glieder und Gelenke

Markierung des Gestells oder

Gelenke: D zwischen 1 und 2 in A_0
D zwischen 2 und 3 in A
D zwischen 3 und 4 in B
S zwischen 1 und 4



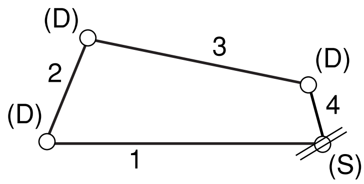
Kinematische Kette

☞ gibt an, welches Glied mit welchem über ein Gelenk verbunden ist. (Topologie)

Somit findet man die Gliederzahl n und Gelenkzahl g.

Achte auf Mehrfachgelenk!

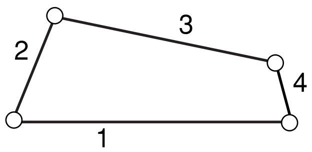
Keine Festlegung des Gestells, Gelenke nur sinnbildlich!



(Ebene kinematische Drehgelenkkette - wenig genutzt)

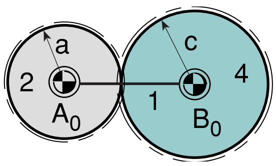
☞ Schubgelenke, Wälzgelenke, etc. werden durch Drehgelenke ersetzt, Mehrfachgelenk werden aufgelöst.

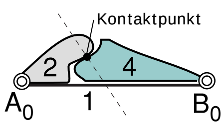
Gibt die Zahl der Drehgelenk im Getriebe an.

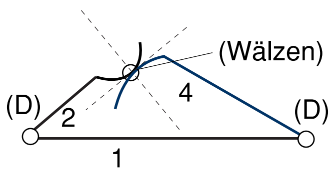


Beispiel: Zahnradgetriebe (zwei Zähne (Glied 2 und 4) gleiten aufeinander ab)

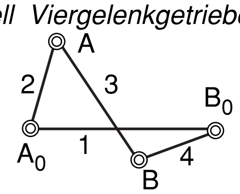
Getriebekonstruktion *Schema* *Kinematische Kette (mit Wälzgelenk)*







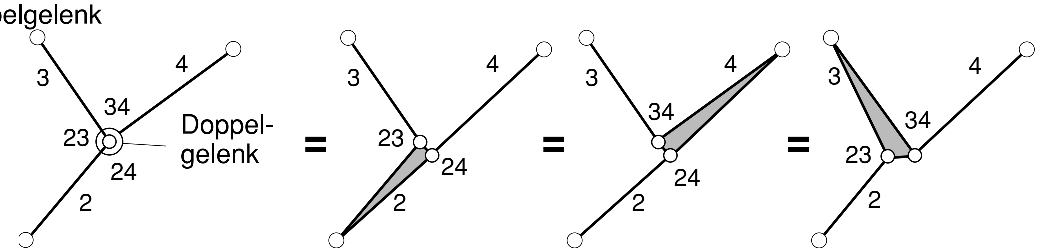
oder Ersatzmodell Viergelenkgetriebe



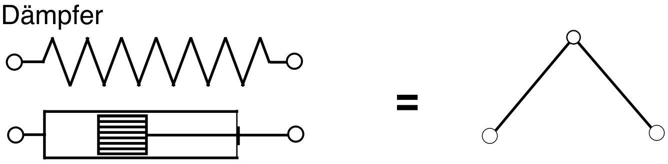
$l_3 = \rho_2 + \rho_4$. Finde so A und B.

Besonderheiten

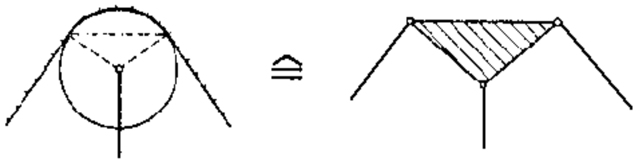
☞ Doppelgelenk



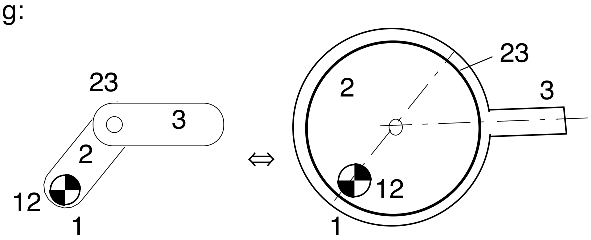
☞ Ersatz für Feder und Dämpfer



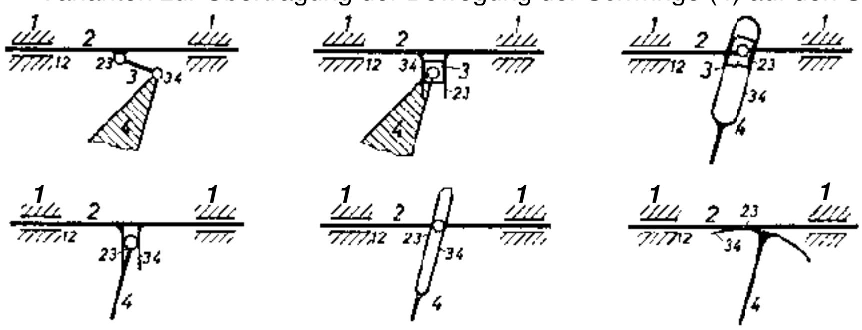
☞ Ersatz des Riemens durch Stäbe, am Kontaktpunkt angreifend



☞ Drehzapfenerweiterung:



Beispiel: Varianten zur Übertragung der Bewegung der Schwinge (4) auf den Schlitten (2)



HW: Aufgabe 2.3

2.4 Freiheitsgrade oder Laufgrad eines Mechanismus

2.4.1 Laufgrad F

☞ Laufgrad **F** entspricht den Freiheitsgraden (FHG) des Getriebes,

F ist die Anzahl der erforderlichen Antriebe, um Zwangslauf zu erzielen

F = 0 : Getriebe ist blockiert

F = 1: Zwangslauf mit einem Antrieb

F = n: Zwangslauf mit n Antrieben

F < 0: statisch unbestimmtes System (zu viele Zwänge), statisch überbestimmt gelagert!

Laufgradformel

Wenn

b = 6 der Elementarbewegungen eines Gliedes im Raum (b = 3 in der Ebene)

n = Anzahl aller Glieder, einschließlich dem Gestell

g = Anzahl der Gelenke

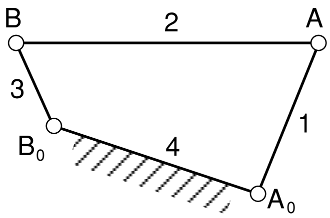
f_i = Zahl der Gelenkfreiheitsgraden für das Gelenk i und u_i Gelenkzwänge; $u_i = b - f_i$

dann gilt **(Grübler-Bedingung)**

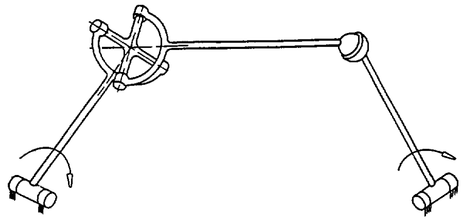
☞ $$F = b\,(n-1) - \sum_{i=1}^{g} u_i = b\,(n-1-g) + \sum_{i=1}^{g} f_i$$

Übung 2.2:

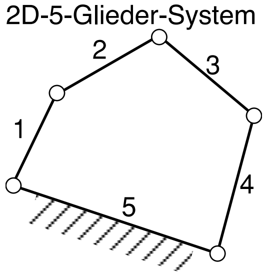
2D-Viergelenk



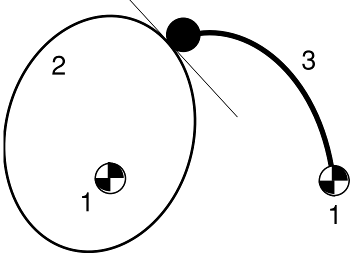
3D-Viergelenk



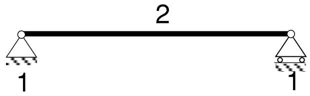
2D-5-Glieder-System



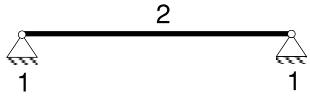
2D-Kurvengetriebe



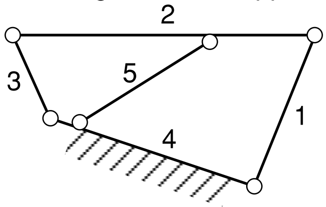
2D-Balken auf Lager (1)



2D-Balken auf Lager (2)



2D-Viergelenk mit Koppel 5

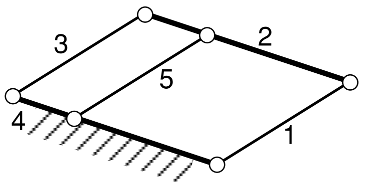


Ausnahmen der Grübler-Bedingung

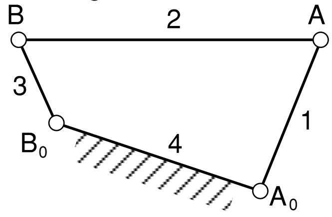
☞ 1. Die Freiheitsgrade müssen unabhängig sein:

überflüssige, **passive** Starrheitsbedingungen, **s** genannt, sind hinzunehmen

Übung 2.3: 2D-Viegelenk mit Koppel 5

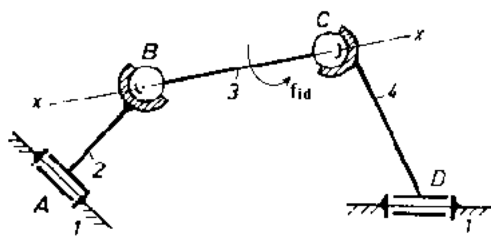


2D-Viegelenk bei 3D-Betrachtung

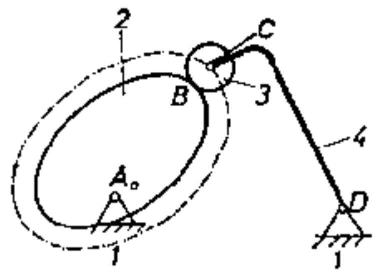


☞ 2. **identische** FHG $\mathbf{f_{id}}$ in Gelenken sind zu eliminieren

Übung 2.4: 3D-Viergelenk mit Koppelstange und Kugelgelenken



Rolle an Kurvenscheibe



Damit:

☞ $$F = b\,(n-1) - \sum_{i=1}^{g} u_i - \sum_j f_{id\,j} + \sum_k s_k \quad = \quad b\,(n-1-g) + \sum_{i=1}^{g} f_i - \sum_j f_{idj} + \sum_k s_k$$

HW: Aufgabe 2.4 bis 2.10

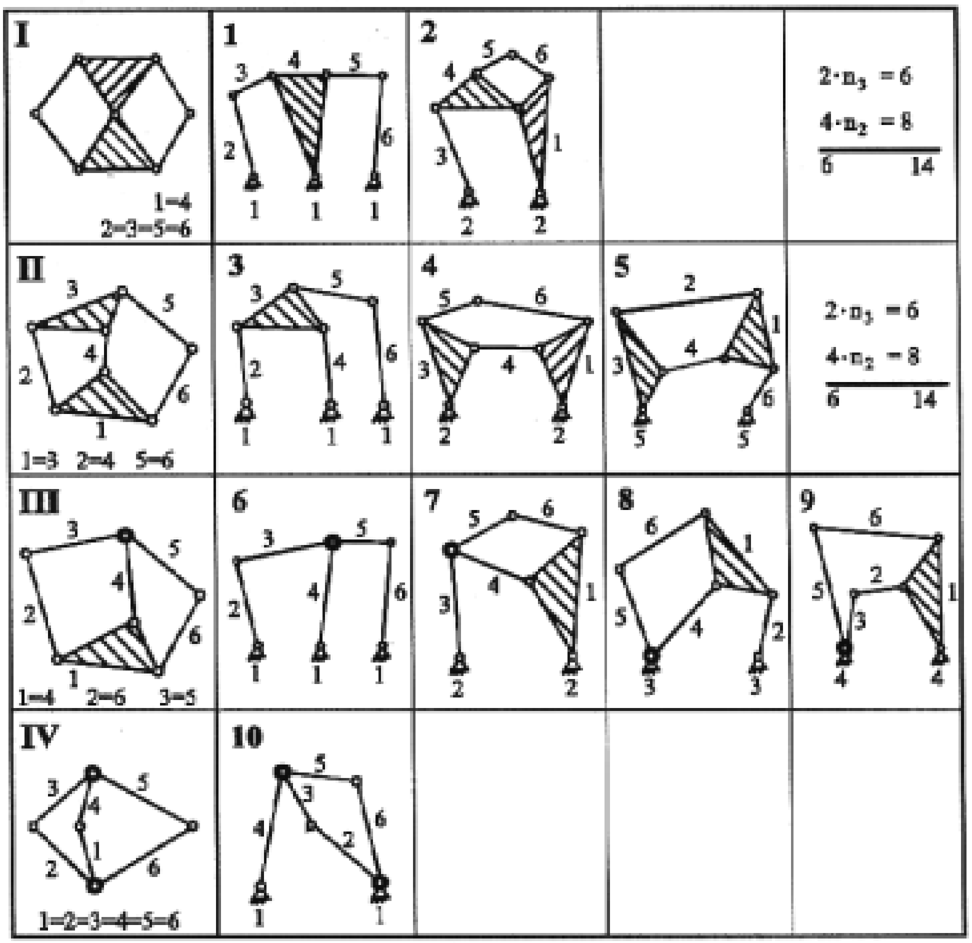
2.4.2 Ebene kinematische Ketten mit einem Freiheitsgrad

Für F = 1 folgt bei $f_i = 1$, $s_k = 0$ und $f_{idj} = 0$

☞ **1 = 3(n-1-g)+g ==>** $\mathbf{3n - 2g = 4}$

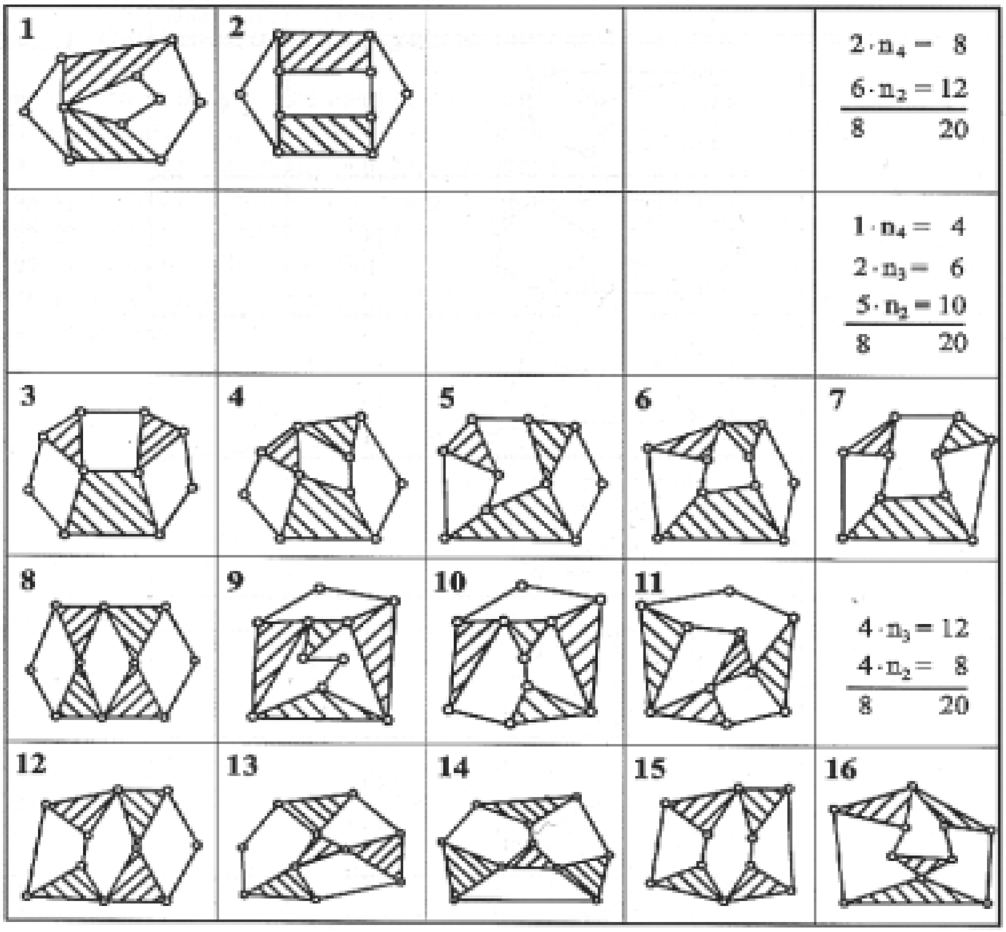
Sinnvolle Ketten sind für n und g ganzzahlig aus g = 3/2 n - 2 zu finden.

Zahl n	2	4	6	8
Zahl g	1	4	7	10
Typ	offene Kette, Zweischlag	Viergelenkkette	6-glied.Kette, Tafel 2.4	8-glied.Kette, Tafel 2.5



Tafel 2.4: Sechs-gliedrige Ketten mit Laufgrad F = 1 und daraus abgeleitete Mechanismen nach (Kerle and Pittschellis 1998).

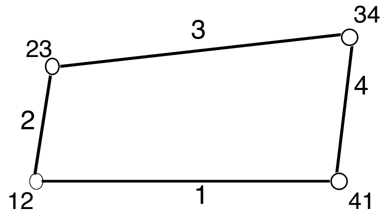
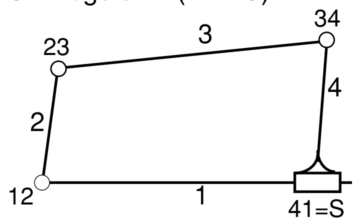
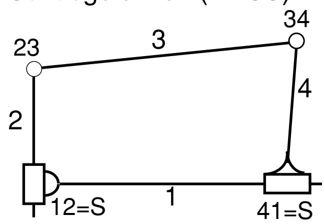
Typ I wird als Watt'sche Kette, Typ II als Stephenson'sche Kette bezeichnet.



Tafel 2.5: Acht-gliedrige Ketten mit Laufgrad F = 1 nach (Kerle and Pittschellis 1998).

2.5 Mechanismen der Viergelenkkette

Aus der Viergelenkkette lassen sich Ketten mit Drehgelenken und Ketten mit Dreh- und Schubgelenken ableiten

4-gliedrige Drehgelenkkette mit 4 Drehgelenken (DDDD)	4-gliedrige Schubkurbelkette mit 3 Drehgelenken und 1 Schubgelenk (DDDS)	4-gliedrige Kreuzschubkurbel mit 2 Drehgelenken und 2 Schubgelenken (DDSS)
		

2.5.1 Getriebe der 4-gliedrigen Drehgelenkkette – Satz von GRASHOF

☞ **Glied a läuft voll um**, wenn

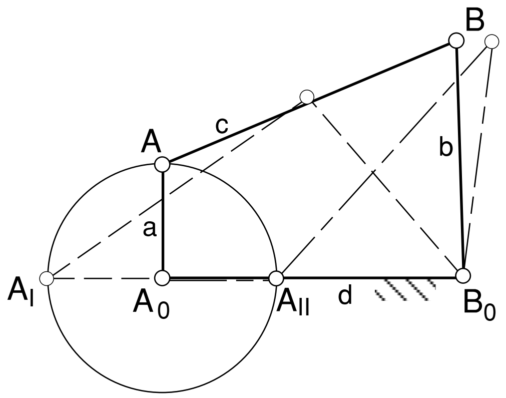
1. $d + a \leq b + c$

2. $d - a \geq |c - b|$

für $c \geq b$ 2a. $c + a \leq b + d$

für $c < b$ 2b. $b + a \leq c + d$

folgt: Glied **a** muß das kleinste Glied sein!



Kurbelschwinge mit a=lmin, c=lmax, b=l', d=l"

> Satz von GRASHOF:
> Ein Viergelenkgetriebe hat mindestens ein umlauffähiges Glied der Länge l_{min}, wenn
>
> $$l_{min} + l_{max} < l' + l''$$
>
> Hierin sind l_{min} und l_{max} die Längen des kleinsten und längsten Gliedes,
> $l' + l''$ die Längen der übrigen Glieder.

<u>Beispiel Kurbelschwinge</u>: l_{min} = , l_{max} = , l' = , l'' =

Mögliche Fälle (siehe Tafel 2.6)

a) l_{min} ist Gestell -> **Doppelkurbel**

b) Nachbarglied von l_{min} ist Gestell -> **Kurbelschwinge** mit l_{min} als Antrieb

c) das l_{min} gegenüberliegende Glied ist Gestell -> **Doppelschwinge** mit Totlagen

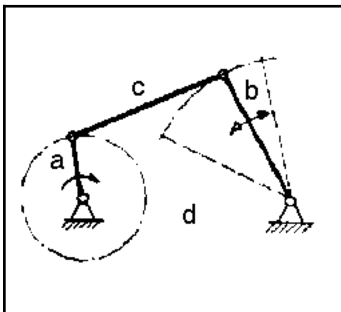
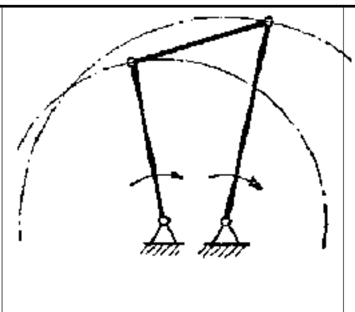
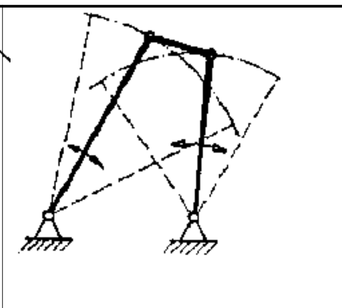
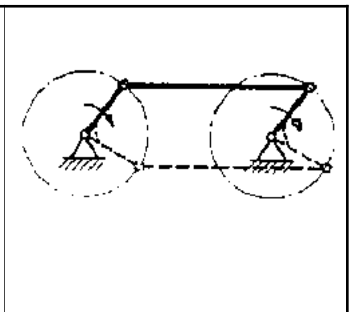
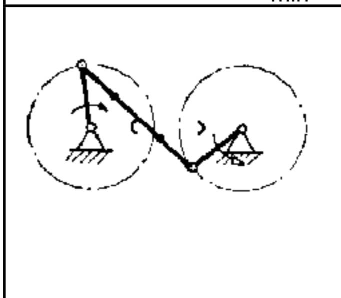
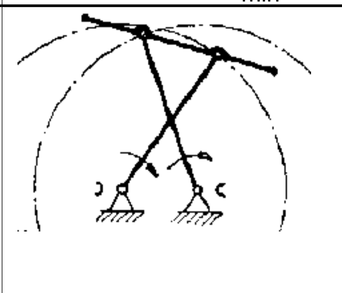
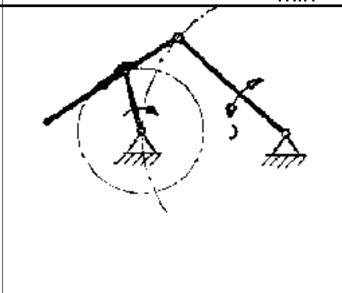
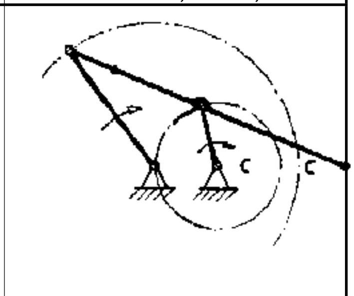
d) $l_{min} + l_{max} = l' + l''$ -> Viergelenk mit einer Verzweigungslage

e) $l_{min} + l_{max} = l' + l''$ und $a = b$, $c = d$ -> Parallelkurbelgetriebe mit 2 Verzweigungslagen

f) $l_{min} + l_{max} = l' + l''$ und $a = c$, $b = d$ -> gleichschenklige Kurbelschwinge mit 2 Verzweigungslagen

g) $l_{min} + l_{max} > l' + l''$ Schwinggetriebe mit vier Grenzlagen möglich

> ☞ Verzweigungslagen und Totlagen ergeben technische Probleme!
> Sie sind zu vermeiden bzw. zu beachten!

			
Kurbelschwinge, $a = l_{min}$	Doppelkurbel, $d = l_{min}$	Doppelschwinge, $c = l_{min}$	Parallelkurbel, a = b, c = d
			
Parallelkurbel, a = b, c = d	Antiparalleldoppelkurbel	Gleichschenklige Kurbelschwinge, a = c	Gleichschenklige Doppelkurbel, a = c

Tafel 2.6 Getriebe der 4-gliedrigen Drehgelenkkette

HW: Aufgabe 2.10

2.5.2 Getriebe der 4-gliedrigen Schubkurbelkette

Abhängig von der Festlegung des Gestells erhält man

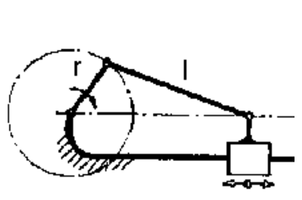
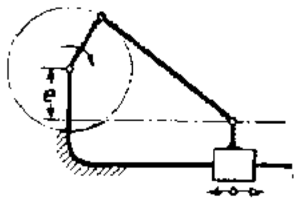
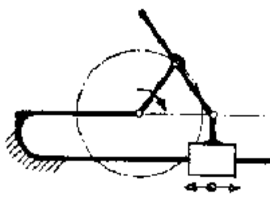
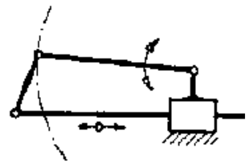
Schubkurbelgetriebe

☞ das am Schubgelenk befindliche Glied ist Gestell, Tafel 2.7

Festlegung der Exzentrizität (kinematische)

☞ Exzentrizität e ist senkrechter Abstand zur Schubrichtung zwischen den Drehgelenken der am Schubglied beteiligten Glieder.

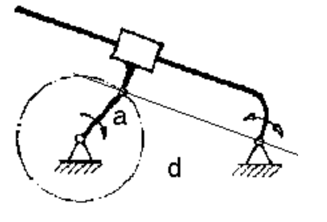
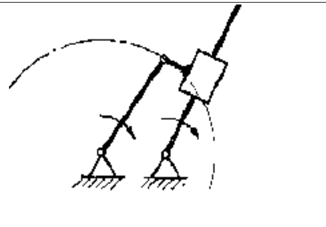
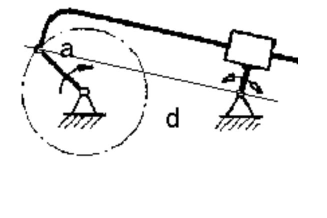
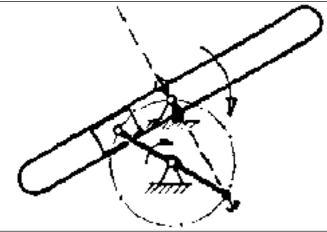
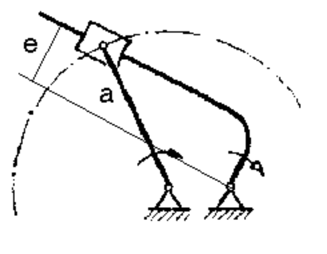
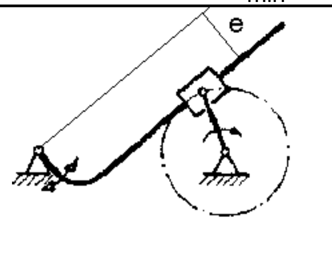
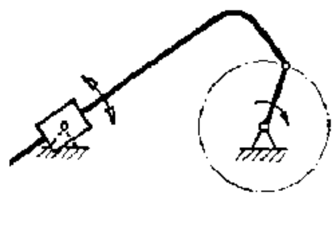
$e = 0$	-> Zentrische Schubkurbel
$e \neq 0$	-> Exzentrische Schubkurbel

			
Zentrische Schubkurbel	Exzentrische Schubkurbel	Gleichschenklige Schubkurbel, r = l	Schwingende Schubkurbel

Tafel 2.7 Getriebe der 4-gliedrigen Schubkurbelkette

Kurbelschleifengetriebe

☞ das am Schubgelenk befindliche Glied ist nicht Gestell, Tafel 2.8

			
Zentrische, schwingende Kurbelschleife, $a = l_{min}$	Umlaufende Kurbelschleife, $d = l_{min}$	Zentrische, schwingende Kurbelschleife, $a = l_{min}$	Gleichschenkl. umlauf. Kurbelschleife
			
Exzentrische, umlauf. Kurbelschleife	Exzentrische, schwing. Kurbelschleife	Exzentrische, schwing. Kurbelschleife	

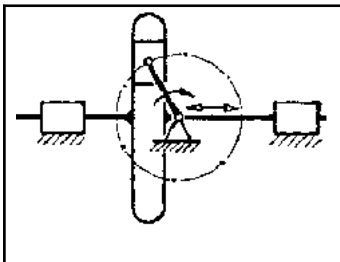
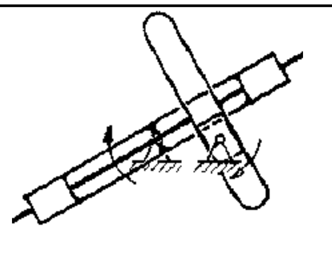
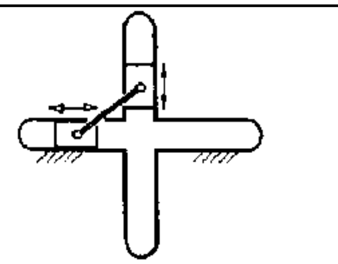
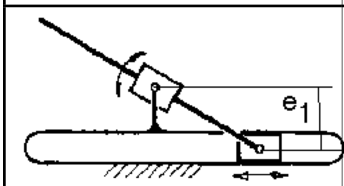
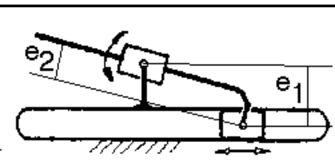
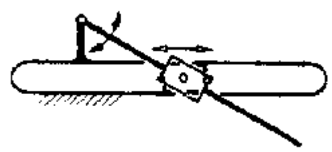
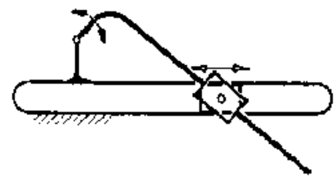
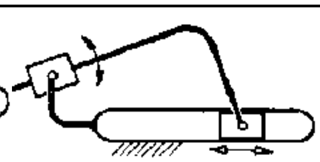
Tafel 2.8 Getriebe der 4-gliedrigen Schubkurbelkette

Kreuzschleifengetriebe

☞ Ein Glied besitzt zwei aufeinander senkrecht stehende Schubgelenke, Tafel 2.9

Schubschleifengetriebe

☞ Jedes Glied ist mit einem Drehgelenk und einem Schubgelenk verknüpft, Tafel 2.9

			
Hin- u. hergehende Kreuzschleife	Umlaufende Kreuzschleife	Feststehende Kreuzschleife	
			
Einfach exzentr. Schubschleife	Zweifach exzentr. Schubschleife	Einfach exzentr. Schubschleife	Zweifach exzentr. Schubschleife
			
Einfach exzentr. Schubschleife	Zweifach exzentr. Schubschleife	Einfach exzentr. Schubschleife	Zweifach exzentr. Schubschleife

Tafel 2.9 Getriebe der Kreuz- und Schubschleife

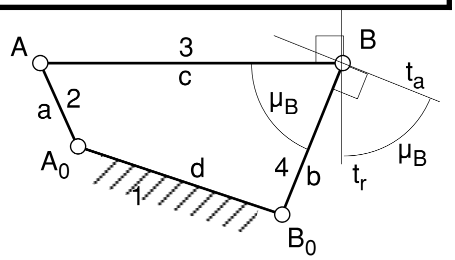
2.6 Laufgüte und Übertragungswinkel μ

☞ Allgemein gilt: μ ist der Winkel zwischen der Richtung der Abtriebsgeschwindigkeit (t_a) und der Richtung der Relativgeschwindigkeit (t_r).

μ stets $\leq 90°$ nehmen, Maximalwert ist 90°!

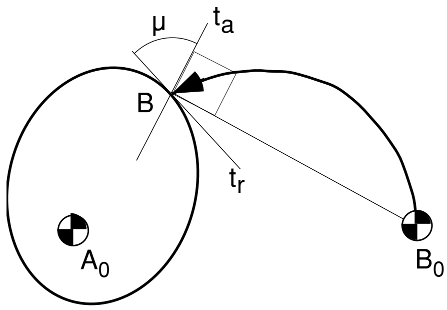
t_r ist stets senkrecht zum relativem Polstrahl der Glieder Antrieb/Abtrieb, also hier P_{24}, siehe Absch. 3.2.1.

Beispiel Kurbelschwinge, mit Glied 2 als Antrieb, Glied 4 als Abtrieb:



☞ Abtriebsgeschwindigkeit (t_a) senkrecht zu BB_0,
Relativgeschwindigkeit (t_r) senkrecht zu BA:
Übertragungswinkel μ_B ist Winkel zwischen Abtriebsglied 4 und Koppelglied 3.

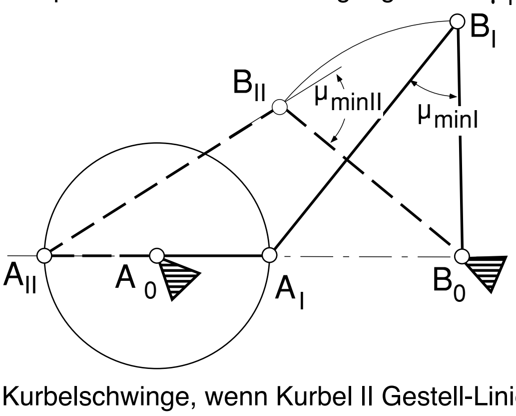
Beispiel Kurvenscheibe, mit Scheibe als Antrieb, Schwinge als Abtrieb



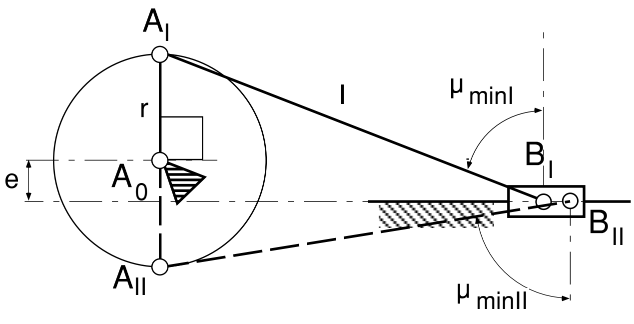
☞ Abtriebsgeschwindigkeit (t_a) ist senkrecht zu BB_0,
Relativgeschwindigkeit (t_r) ist tangential zur Bahn im Kontaktpunkt

☞ Gute Laufgüte ist gewährleistet, wenn der kleinste Übertragungswinkel μ_{min} stets größer als μ_{erf} ist.
Kurbelschwinge $\mu_{erf} > 50°$, Schubkurbel $\mu_{erf} > 40°$, Kurvenscheiben $\mu_{erf} > 60°$

Beispiele: Minimaler Übertragungswinkel μ_{min} im Gelenk B der gezeigten Getriebe:



Kurbelschwinge, wenn Kurbel II Gestell-Linie, Steglage I oder II.



Schubkurbel, wenn Kurbel $\perp$ zur Schubrichtung, Lage I oder II

Übung 2.5: Sonderfall zentrisches Schubkurbelgetriebe.

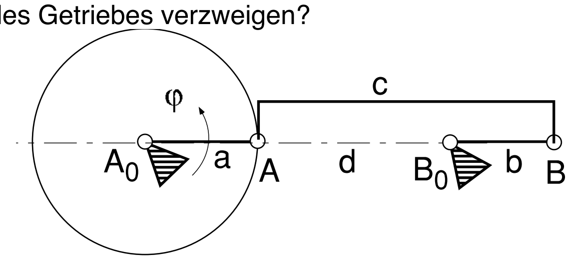
Sonderfall $\mu_{min} = 0$!

☞ Bei Lagen mit $\mu = 0$ geht das Getriebe in eine Verzweigungslage über.

Übung 2.6: Bestimme den Übertragungswinkel μ_{min} in B

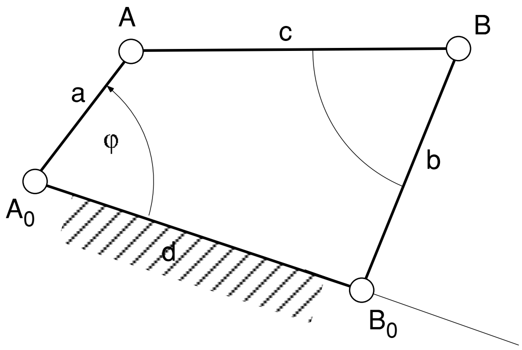
zwischen Abtriebsglied und Koppel des gezeigten Getriebes, wo a = b und c = d.

Wie kann sich die Bewegung des Getriebes verzweigen?



Übung 2.7: Bestimme μ_{min} in B der Kurbelschwinge

für a = 2cm, b = 3 cm, c = 4 cm, d = 4 cm. Gebe die Formel hierfür an.

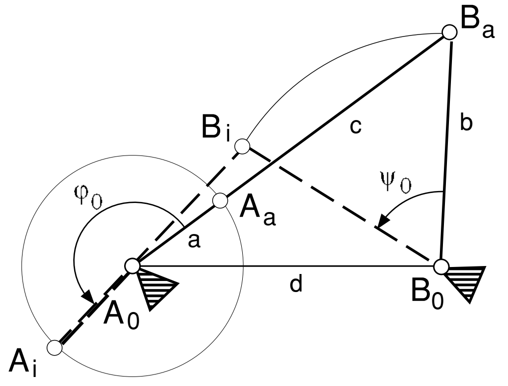


HW: Aufgabe 2.11, 2.12

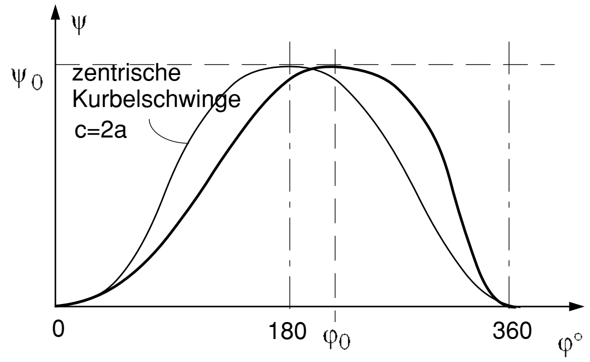
2.7 Totlagen der Kurbelschwinge und Schubkurbel

☞ Totlagen erhält man bei Strecklagen der Kurbel und Koppel ==> Umkehrpunkte des Abtriebes

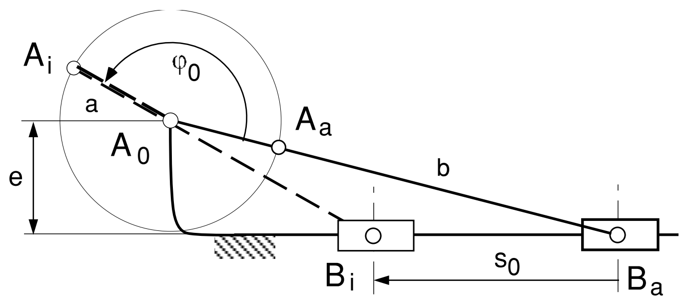
Kurbelschwinge mit Totlagenwinkel φ_0 und ψ_0



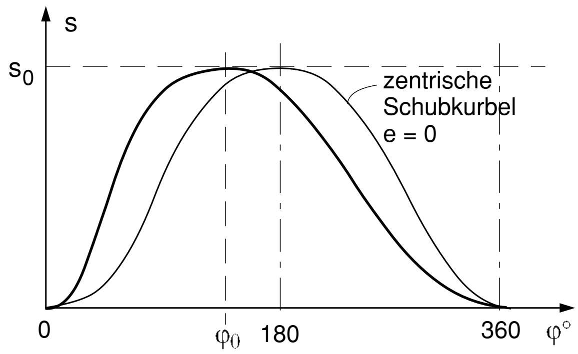
Übertragungsfunktion



Schubkurbel mit Totlagenwinkel φ_0 und Hub s_0



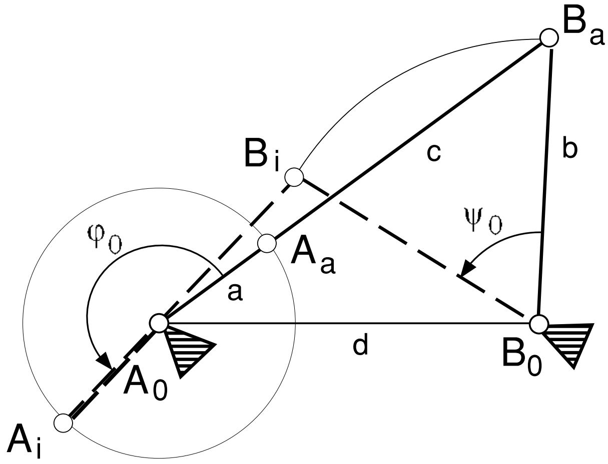
Übertragungsfunktion



Übung 2.8: Sonderfall zentrisches Schubkurbelgetriebe.

Übung 2.9: Bestimme φ_0 und ψ_0

der Kurbelschwinge für a = 2cm, b = 3 cm, c = 4 cm, d = 4 cm.



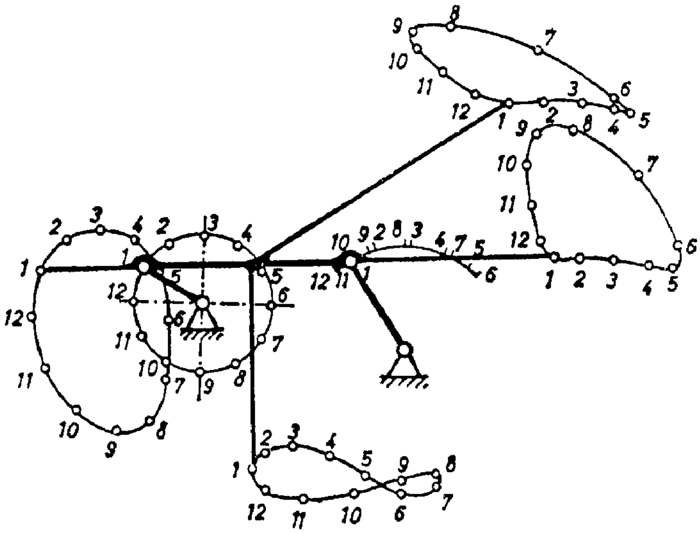
HW: Aufgabe 2.11, 2.13

2.8 Koppelkurven von Getrieben

Koppelkurven?

☞ sind Bahnen von Punkten eines Mechanismus infolge einer Antriebsbewegung

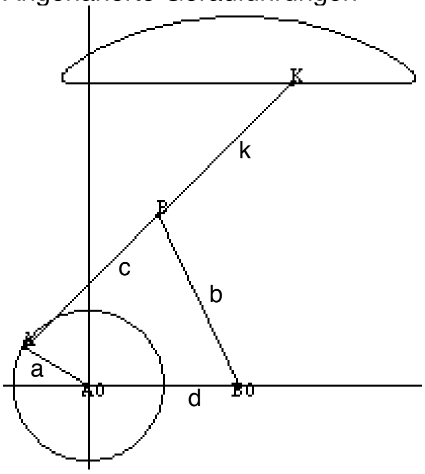
☞ Nach **ROBERTS** läßt sich jede ebene Koppelkurve durch **drei** verschiedene Gelenkvierecke erzeugen siehe Getriebesynthese, Kap. 7.



Koppelkurven einer Kurbelschwinge

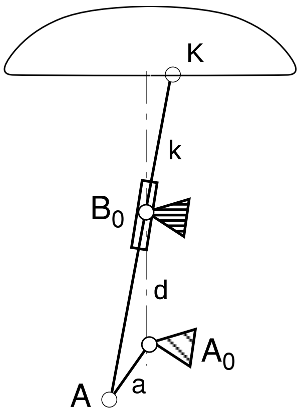
Geradführungen?

Angenäherte Geradführungen

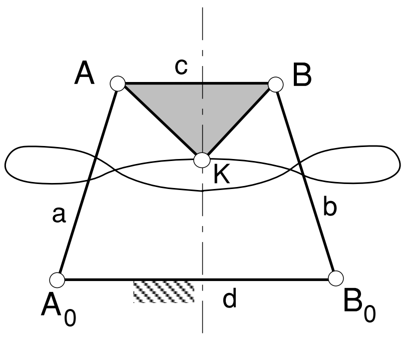


nach HOECKEN:

a=1, b=c=k=2.5, d=2 Längeneinheiten

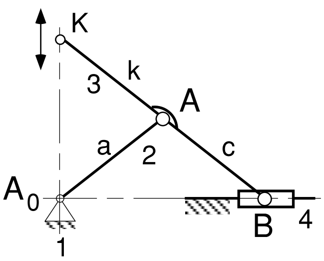


Konchoidenlenker

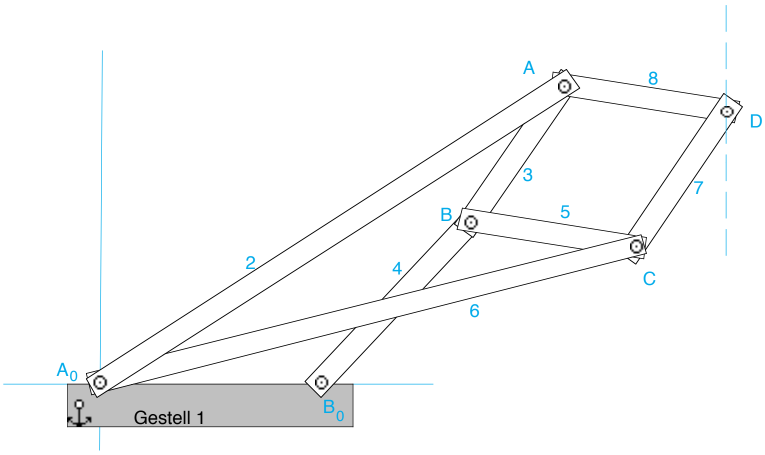


nach TSCHEBYSCHEW

Exakte Geradführungen



mit einem Schubkurbelgetriebe

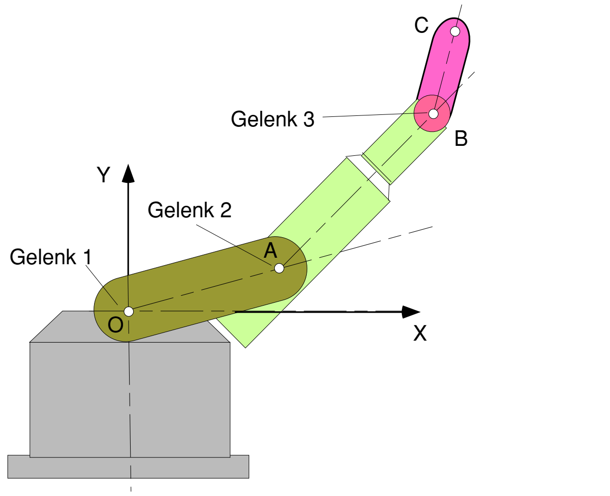


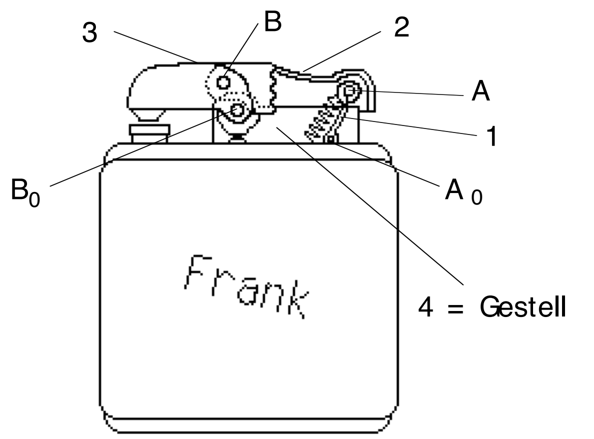
PEAUCELLIER-Lenker

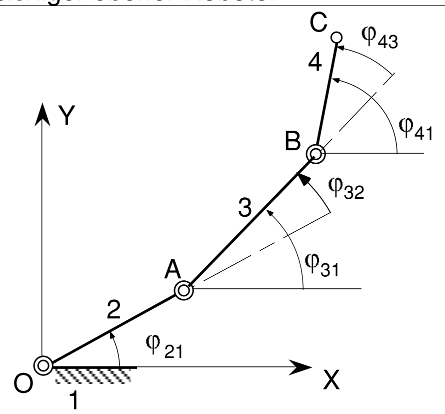
HW: Aufgabe 2.14, 2.15

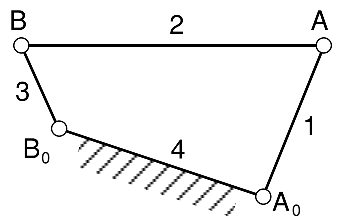
2.9 Offene und geschlossene Ketten

Beispiele aus 2D-Bereich

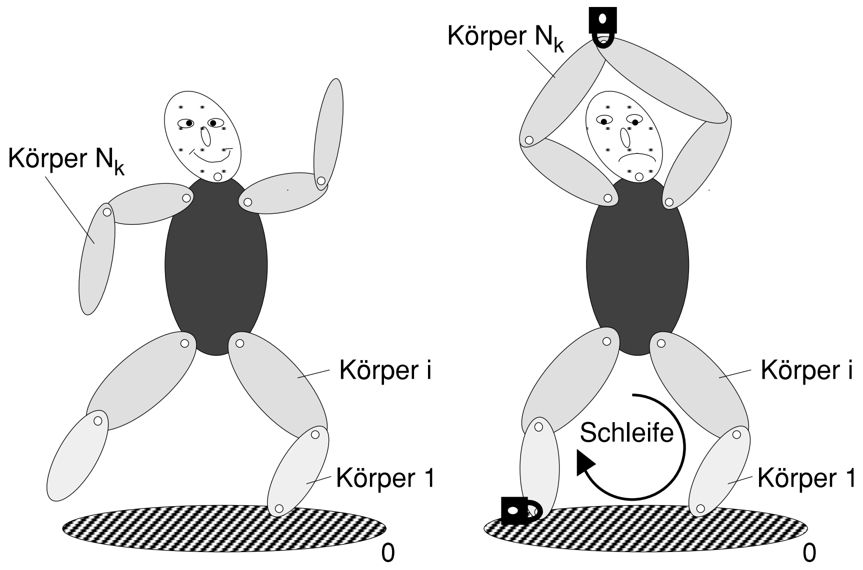
<table>
<tr>
<td>


3-achsichiger ebener Roboter
</td>
<td>


Feuerzeug
</td>
</tr>
<tr>
<td>


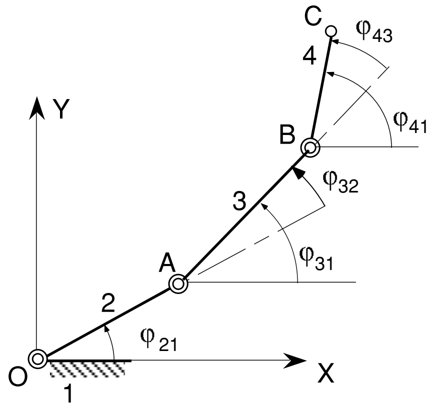
</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td>??</td>
<td>??</td>
</tr>
<tr>
<td>n = 4, g = 3,
F = 3 (4 – 1 – 3) + 3 · 1 = 3 FHG</td>
<td>n = 4, g = 4,
F = 3 (4 – 1 – 4) + 4· 1 = 1 FHG</td>
</tr>
</table>



Offenes und geschlossenes Mehrkörpermodell

2.9.1 Offene Ketten von Körpern (Gliedern)



Beispiele sind Mehrfachpendel, Roboter, siehe TM2

Beispiel: offene Kette des Roboters

☞ Für F = 3 FHG sind 3 unabhängige Koordinaten erforderlich

☞ Die Bewegung eines Gliedes zum Vorgängerglied ist durch die **Gelenkkoordinate** φ_{ji} eindeutig beschrieben:

2 gegenüber 1
3 gegenüber 2   Vorwärtsrekursion: $\varphi_{j1} = \varphi_{ji} + \varphi_{i1}$, j=2, ...n, i=1, .. n-1
4 gegenüber 3

Merke:

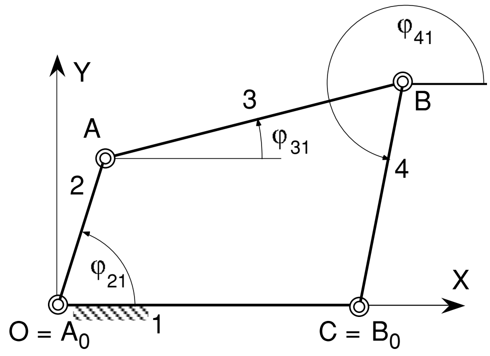
Koordinaten $\varphi_{21}, \varphi_{31}, \varphi_{41}$ sind **Absolutkoordinaten** bezüglich Gestell 1

Gelenkkoordinaten $\varphi_{21} = \varphi_{21}$, $\varphi_{32} = \varphi_{31} - \varphi_{21}$, $\varphi_{43} = \varphi_{41} - \varphi_{31}$ sind **Relativkoordinaten**

2.9.2 Geschlossene Ketten von Körpern (Gliedern)

Getriebe sind fast ausschließlich geschlossene Ketten

Beispiel: geschlossene Kette der Kurbelschwinge



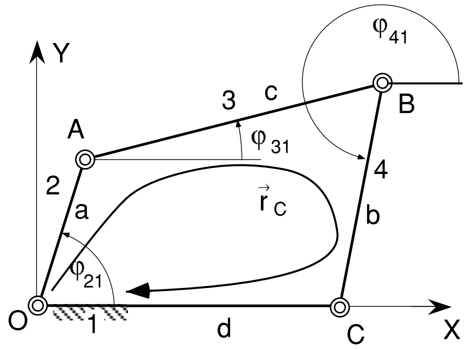
☞ Für F = 1 FHG ist **eine unabhängige Koordinate** erforderlich:

☞ wähle $\varphi = \varphi_{21}$, dann sind

$\varphi_{31} = \varphi_{31}(\varphi)$, $\varphi_{41} = \varphi_{41}(\varphi)$ abhängige Koordinaten

Die Bewegung der gesamten geschlossenen Kette hängt von der Koordinate φ ab.

Dazu sind **Schließbedingungen** erforderlich:



☞ Hier: Glied 4 in C mit Glied 1 durch Drehgelenk verbinden

Bedingung: $\vec{r}_C = \vec{0}$ -->

=> $r_{Ax}(\varphi_2) + r_{BAx}(\varphi_3) + r_{CBx}(\varphi_4) - d = 0$ (1)

=> $r_{Ay}(\varphi_2) + r_{BAy}(\varphi_3) + r_{CBy}(\varphi_4) = 0$ (2)

F = 3 FHG - 2 Schließgedg. = 1 FHG

☞ (1) und (2) sind **implizite Zwangsbedingungen!**
Allegemein $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$,

Dimensionen**:** $n_\Phi = F_{offen} - F_{geschloss}$, $n_q = F_{offen}$

Übung 2.10: Finde die 2 Schließbedingungen. Diskutiere deren Lösbarkeit

Implizite Zwangsbedingungen:

Explizite Zwangsbedingungen

2.9.3 Lösen der Schließbedingungen

Problematik der geschlossenen Ketten:

1. Implizite Schließbedingungen formulieren,
2. Bedingungen in Kinematik der offenen Kette einarbeiten und
3. nach unabhängiger Koordinate auflösen, d.h. explizite Schließbedingungen finden:
   i) von Hand mittels geometrischer Betrachtungen (ist bei einfachen Systemen möglich)
   ii) numerisch durch Lösen nichtlinearer Gleichungen => Newton-Raphson-Iteration

Lösen nichtlinearer Gleichungen

Geg: $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$,

Ges: $\mathbf{x}$

Lös: Iteration nach Newton-Raphson:

Lösung zur Iteration i: $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + \Delta\mathbf{x}_i$

Funktionswert für $\mathbf{x}_i$ mit Taylorreihe: $\mathbf{F}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_{i-1} + \Delta\mathbf{x}_i) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_{i-1}) + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}_{i-1})}{\partial \mathbf{x}_{i-1}} \Delta\mathbf{x}_i + O^2(\Delta\mathbf{x}_i) + ... = \mathbf{0}!$

Mit Jakobimatrix $\mathbf{J}(\mathbf{x}_{i-1}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}_{i-1})}{\partial \mathbf{x}_{i-1}}$

folgt die Lösung $\Delta\mathbf{x}_i = -\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_{i-1})\,\mathbf{F}(\mathbf{x}_{i-1})$

Lösbar, wenn ???

Interationsschleife:

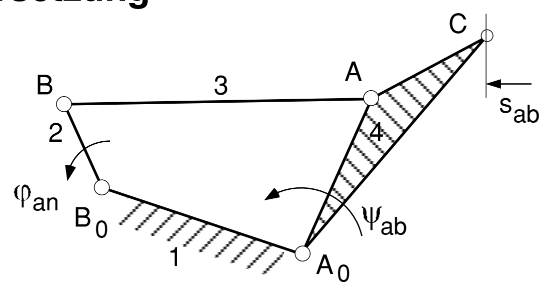
1. i = 1 setzen, $\mathbf{x}_{i-1}$ als Startwert vorlegen
2. $\mathbf{F}(\mathbf{x}_{i-1})$ berechnen
3. $\mathbf{J}(\mathbf{x}_{i-1})$ berechnen
4. $\Delta\mathbf{x}_i$ berechnen
5. $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + \Delta\mathbf{x}_i$ berechnen
6. Abbruch prüfen: Falls $\Delta\mathbf{x}_i < \boldsymbol{\varepsilon}$, (z.B. 10^{-8}) Ende der Iteration

   Sonst, i = i + 1, zurück nach 2.

HW: Aufgabe 2.16

2.10 Übertragungsfunktionen und Übersetzung

Antrieb, Abtrieb?



- ☞ Durch den Antrieb von Gliedern in Form von Verdrehungen oder Schiebungen wird eine eindeutige Bewegung des Mechanismus bewirkt.
- ☞ Ein Mechanismus hat so viele kinematisch geführte Bewegungen (Antriebe) wie er Freiheitsgrade besitzt (Zwangslauf)
- ☞ Ein Kraft- oder Momentenantrieb bewirkt **keinen** Zwangslauf (z.B. Feuerzeug) -> *Dynamik*
- ☞ Ein Getriebe hat beliebig viele Abtriebe in Form von Verdrehungen, Schiebungen, Kräfte, Momente

Übertragungsfunktionen?

- ☞ Funktionen zwischen Abtrieben und Antrieb werden **Übertragungsfunktionen** genannt!

Lagebeziehung
$$\psi_{ab} = f_1(\varphi_{an}) \qquad s_{ab} = f_2(\varphi_{an})$$
mit f als **Übertragungsfunktion 0. Ordnung**

Geschwindigkeit
$$\omega_{ab} = \dot{\psi}_{ab} = \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_{an}}\dot{\varphi}_{an} = g_1(\varphi_{an})\,\omega_{an}, \quad \text{wo} \quad g_1(\varphi_{an}) = f_1'(\varphi_{an}) = \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_{an}}, \quad \omega_{an} = \dot{\varphi}_{an}$$
$$v_{ab} = \dot{s}_{ab} = \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{an}}\dot{\varphi}_{an} = g_2(\varphi_{an})\,\omega_{an}, \quad \text{wo} \quad g_2(\varphi_{an}) = f_2'(\varphi_{an}) = \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_{an}},$$

mit $g = f'$ als **Übertragungsfunktion 1. Ordnung**
die erste Ableitung von f nach φ.

Beschleunigung mit $h = g' = f''$ als **Übertragungsfunktion 2. Ordnung**
die zweite Ableitung von f nach φ.

$$\alpha_{ab} = \ddot{\psi}_{ab} = \frac{\partial g_1}{\partial \varphi_{an}}\dot{\varphi}_{an}^2 + g_1(\varphi_{an})\ddot{\varphi}_{an} = h_1(\varphi_{an})\omega_{an}^2 + g_1(\varphi_{an})\alpha_{an}, \quad \text{wo} \quad h_1(\varphi_{an}) = g_1'(\varphi_{an}) = f_1''(\varphi_{an}) = \frac{\partial g_1}{\partial \varphi_{an}}$$
$$a_{ab} = \ddot{s}_{ab} = \frac{\partial g_2}{\partial \varphi_{an}}\dot{\varphi}_{an}^2 + g_2(\varphi_{an})\ddot{\varphi}_{an} = h_2(\varphi_{an})\omega_{an}^2 + g_2(\varphi_{an})\alpha_{an}, \quad \text{wo} \quad h_2(\varphi_{an}) = g_2'(\varphi_{an}) = f_2''(\varphi_{an}) = \frac{\partial g_2}{\partial \varphi_{an}}$$

und $\alpha_{an} = \dot{\omega}_{an}$

Übung 2.11: Finde die Übertragungsfunktionen 1. und 2. Ordnung von $x(\varphi) = a\cos^2\varphi$.

Bestimme dx/dt und d^2x/dt^2 und d^3x/dt^3.

Übung 2.12: Was bedeutet Ruck?

Übersetzungsverhältnis?

Rädergetriebe (DIN 3960) $\quad i = \frac{\omega_{an}}{\omega_{ab}} = \text{konstant} = ???$

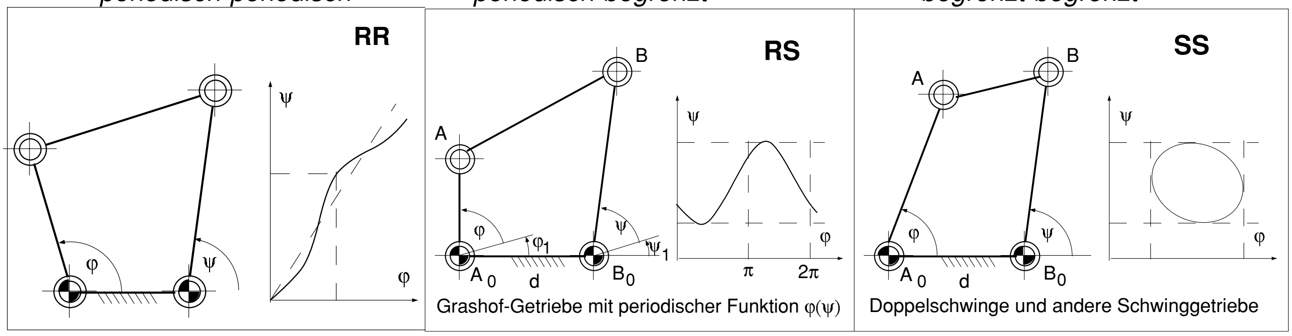
Mechanismen $\quad i_{42} = \frac{\dot{\psi}_{ab}}{\dot{\varphi}_{an}} = \frac{\omega_{ab}}{\omega_{an}} = g_1(\varphi_{an}) = f_1'(\varphi_{an})$ = nichtlineare Fkt. in φ_{an}

Andere Darstellungen der partiellen Ableitung: $\frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} = f'(\varphi) = f_{\varphi}(\varphi)$

Typische Übertragungsformen:

(R = unbegrenzte Rotation, S = begrenzte Rotation)

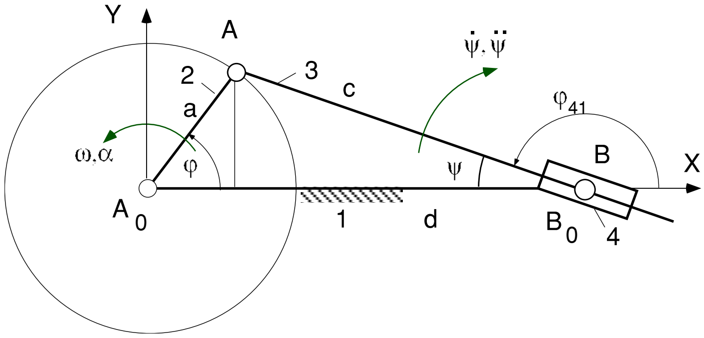
periodisch-periodisch | *periodisch-begrenzt* | *begrenzt-begrenzt*



Grashof-Getriebe mit periodischer Funktion φ(ψ)

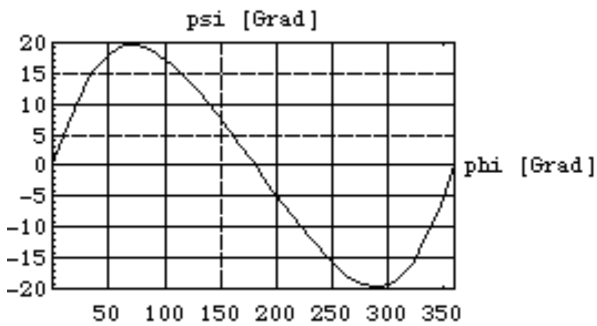
Doppelschwinge und andere Schwinggetriebe

Beispiel für RS: Zentrische, schwingende Kurbelschleife

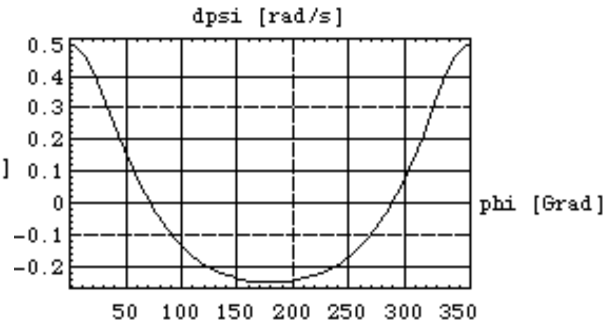


mit a = 2 cm und d = 6 cm, ω = 1 rad/s

Übertragungsfunktion 0. Ordnung



Übertragungsfunktion 1. Ordnung



HW: Aufgabe 2.17

2.11 Geschwindigkeitspol eines Gliedes

☞ Geschwindigkeitspol **P** eines Gliedes ist der Punkt des Gliedes (innerhalb oder außerhalb), für den immer oder momentan in diesem Zusatnd die Translationsgeschwindigkeit null ist!

Ist der Punkt **P** körperfest, nennt man ihn **Drehpol**, anderfalls **Momentanpol**.

Beispiel: Körper 2 ist mit dem Gestell 1 durch ein Gelenk verbunden:

Drehgelenk:	Schubgelenk:	Rollgelenk:	Gleitgelenk:

Antwort:

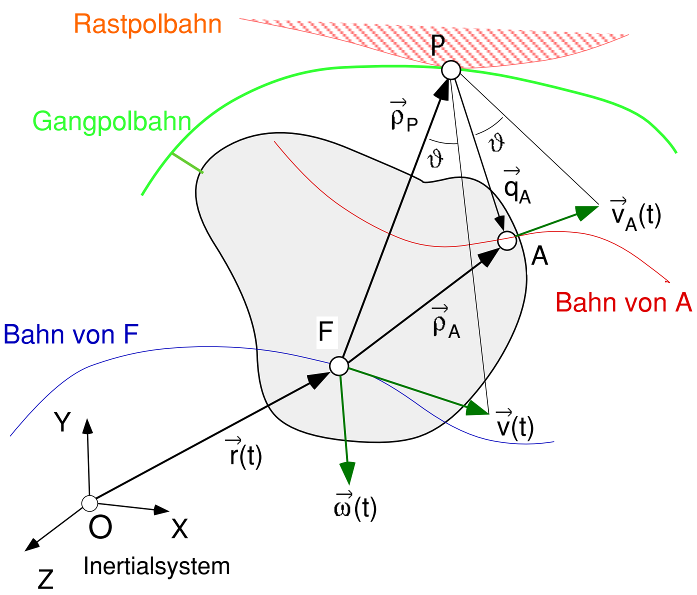
P_{21} ist	P_{21} ist	P_{21} ist	P_{21} ist

Generale Definition:

☞ *Jede beliebige Elementarbewegung einer Ebene ist eine Drehung um einen eindeutig bestimmten Punkt, um den Geschwindigkeitspol P,* (Drehpol, Momentanpol, Drehzentrum)

☞ **P** liegt im Schnittpunkt der Bahnnormalen der Bahnkurven zweier Punkte z.B. **F** und **A**

Es gilt: $\vec{v}_P = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_P \equiv 0$ oder $\mathbf{v} + \mathbf{A}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\rho}_P = \mathbf{0}$. (1)



Punkte aller Momentanpole im Inertialsystem ergeben die Rastpolbahn,

Punkte aller Momentanpole im körperfesten System B ergeben die Gangpolbahn:

Die Gesamtbewegung entspricht einem Abrollen der Gangpolbahn auf der Rastpolbahn

Anwendung des Geschwindigkeitspols:

Geschwindigkeit eines Punktes A :

$$\vec{v}_A = \vec{v} + \vec{\omega} \times (\vec{\rho}_P + \vec{q}_A) = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_P + \vec{\omega} \times \vec{q}_A \quad \text{mit (1) folgt}$$

$$\equiv \vec{\omega} \times \vec{q}_A \quad \text{bzw.} \quad v_A = \omega q_A$$

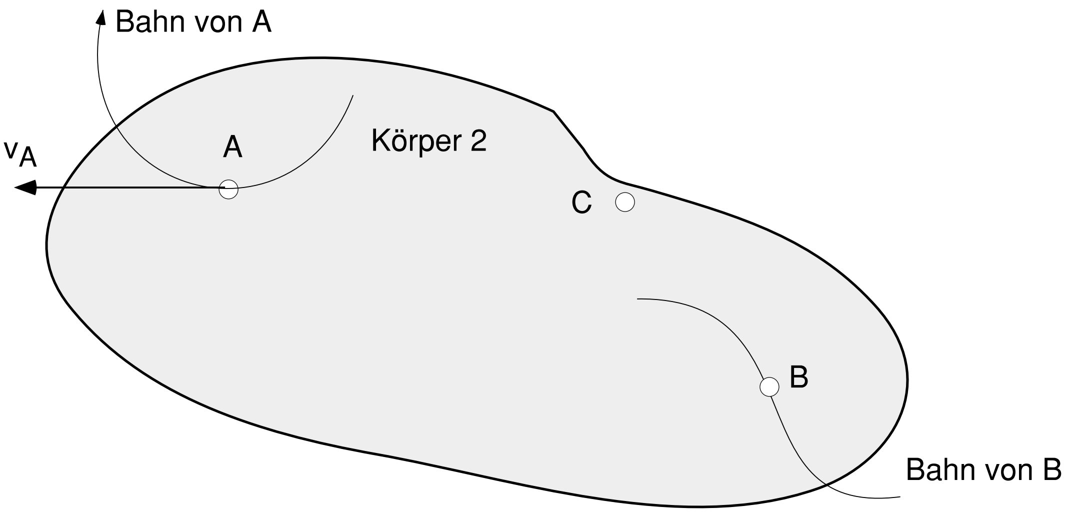
☞ Geschwindigkeit anderer Punkte mit Abstand q_A, q_B, q_F von P:

$$\boxed{\omega = \tan\vartheta = \frac{v_A}{q_A} = \frac{v_B}{q_B} = \frac{v_F}{q_F}}$$

☞ Ist der Geschwindigkeitspol P bekannt, ergibt sich die Geschwindigkeit beliebiger Punkte des Körpers aus Polabstand mal Winkelgeschwindigkeit.

Geschwindigkeit steht senkrecht zum Polabstand.

Übung 2.13: Finde graphisch den Geschwindigkeitspol P_{21} des Körpers 2 bezüglich Körper 1 und die Geschwindigkeit der Punkte B und C.

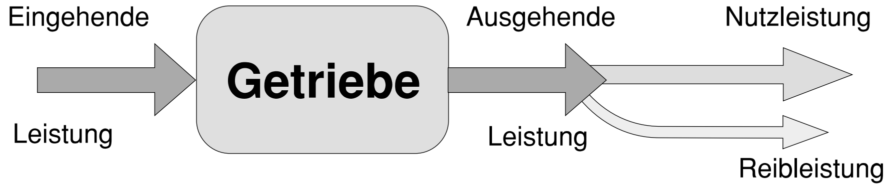


2.12 Leistungsbilanz, Wirkungsgrad, mechanische Äquivalenz

☞ Leistung einer Kraft i $P_i = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \mathbf{F}_i^T \, \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^T \, \mathbf{F}_i$ Dimension = Nm/s = W

Leistung eines Momentes i $P_i = \vec{M}_i \cdot \vec{\omega}_i = \mathbf{M}_i^T \, \boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_i^T \, \mathbf{M}_i$

☞ Leistungsfluß im Getriebe



Eingehende Leistung $P_{an} = \sum \vec{M}_{an} \cdot \vec{\omega}_{an} + \vec{F}_{an} \cdot \vec{v}_{an}$ (Antriebsleistung)

Ausgehende Leistung $P_{ab} = \sum \vec{M}_{ab} \cdot \vec{\omega}_{ab} + \vec{F}_{ab} \cdot \vec{v}_{ab}$ (Abtriebsleistung, negativ)

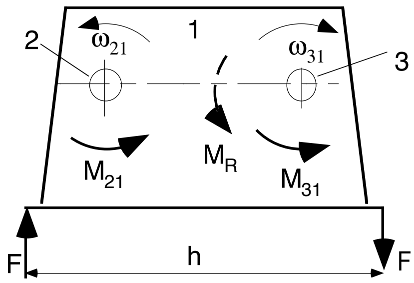
= Nutzleistung + Reibleistung $P_{ab} = P_{Nutz} + P_{Reib}$

Leistungsbilanz $\sum P_i = 0$: -> $P_{an} + P_{ab} = P_{an} + P_{Nutz} + P_{Reib} = 0$

☞ **Wirkungsgrad** im Getriebe $\eta = \dfrac{|\overline{P}_{Nutz}|}{\overline{P}_{an}} = 1 - \dfrac{|\overline{P}_{Reib}|}{\overline{P}_{an}}$ **< 1**

wo $\overline{P} = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(\varphi)| \, d\varphi$ der Mittelwert der Leistungen über eine volle Umdrehung ist.

Übung 2.14: Stirnradgetriebe mit Übersetzung $i = \omega_{21} / \omega_{31}$ (1):



Ohne Reibung:

$P_{an} + P_{ab} = \omega_{21} M_{21} - \omega_{31} M_{31} = 0$

—> $M_{31} / M_{21} = \omega_{21} / \omega_{31} = i$ (2)

Mit Reibung:

$P_{an} + P_{ab} = \omega_{21} M_{21+R} - \omega_{31} M_{31} - \omega_{31} M_R = 0$

—> $M_{21+R} = (M_{31} + M_R) / i$ (3)

—> Wirkungsgrad $\eta = \dfrac{|P_{Nutz}|}{P_{an}} = \dfrac{|\omega_{31} M_{31}|}{\omega_{21} M_{21+R}} \overset{\text{mit}(1)}{=} \dfrac{1}{i} \dfrac{|M_{31}|}{M_{21+R}} \overset{\text{erweitern um } M21}{=} \dfrac{|M_{31}|}{M_{21}} \dfrac{M_{21}}{M_{21+R}} \overset{\text{mit}(2)}{=} \dfrac{M_{21}}{M_{21+R}} < 1$

Mechanische Äquivalenz aus Leistungsbilanz $P_{an} + P_{ab} = 0$

☞ Bei mechanischen Systemen gilt (ohne Reibung und einer Antriebs- und einer Abtriebsgröße)

Übertragungsfkt. 1. Ordg $$g = f' = \frac{\text{Ausgangsgeschw.}}{\text{Eingangsgeschw.}} = -\frac{\text{Eingangskraftgröße}}{\text{Ausgangskraftgröße}}$$

Merke: Die Vektoren der Geschwindigkeiten und Kraftgrößen sind gleichgerichtet!

Übung 2.15: Für ein System gilt die kinematische Beziehung von Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_a = \mathbf{g}\ \mathbf{v}_b$.
Die Kräfte zu $\mathbf{v}_a$ lauten $\mathbf{F}_a$, die Kräfte zu $\mathbf{v}_b$ lauten $\mathbf{F}_b$: Wie lautet der Zusammenhang der Kräfte?

Übung 2.16: Für die Aufgabe 2.17, finde das Drehmoment M_2 an der Kurbel, das sich infolge der Kraft F_4 am Gleitstein 4 einstellt..

Übung 2.17: Welchen Wert nimmt die Übertragungsfunktion 1. Ordg. g im Falle einer Totlage ein?

HW: Aufgabe 2.17