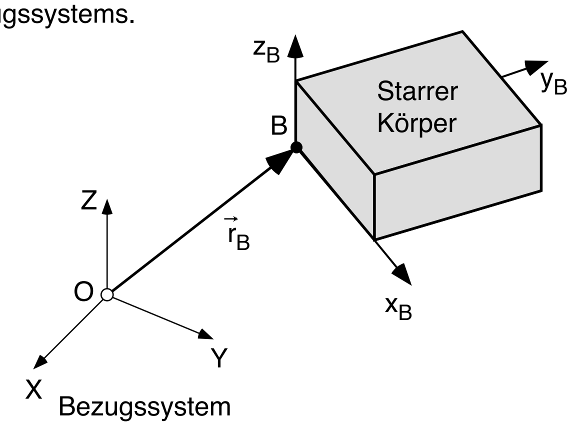
4 Bewegung starrer Körper 1
4.1 Kartesische Koordinatensysteme 1
4.2 Drehmatrizen 2
4.2.1 Darstellung eines Vektors in den kartesischen Systemen K1 und K2 2
4.2.2 Eigenschaften der Drehmatrizen 4
4.2.3 Darstellung eines Vektors in Polar- / Zylinderkoordinaten 6
4.3 Position und Orientierung des freien, starren Körpers im Raum 7
4.4 Verwendung dreier Koordinatensysteme 8
4.5 Einführung homogener Transformationen 9
4.6 Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des starren Körpers 10
4.6.1 Absolute Winkelgeschwindigkeit der Körperbasis 10
4.6.2 Absolute Winkelbeschleunigung der Körperbasis 11
4.6.3 Absolute Lineargeschwindigkeit der Körperbasis 11
4.6.4 Absolute Linearbeschleunigung der Körperbasis 11
4.7 Geschwindigkeiten und Beschleunigungen eines Körperpartikels 12
Aufgaben zu Kap. 4 13

4 Bewegung starrer Körper

Fragen:

1. Wo befindet sich der Körper? --> finde dessen **Position**
2. Wie ist der Körper gedreht? --> finde dessen **Orientierung**

bezüglich eines Bezugssystems.

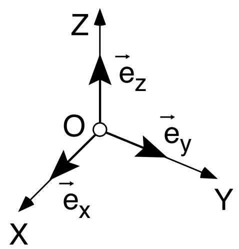


4.1 Kartesische Koordinatensysteme

☞ Vektoren und Tensoren werden meistens in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt!

Definition

O	Ursprung
x, y, z	Basisrichtungen
$\vec{e}_x,\ \vec{e}_y,\ \vec{e}_z$	Basisvektoren mit $\lvert\vec{e}_i\rvert = 1$ und
	$\vec{e}_x \perp \vec{e}_y \perp \vec{e}_z$, d.h. $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0,\ \ \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = 0,\ \ \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0$,
als Rechthandsystem	



Spezielle Systeme:

◊ *Inertialsystem I:*

keine Bewegung, hier gelten die Newton'schen Gesetze (z.B. erdfest, gestellfest)

◊ *körperfestes System B:*

in ihm sind die körperbezogenen Daten konstant (Eulergleichungen)

◊ *mitbewegtes System oder Referenzsystem R:*

zur Aufteilung der Gesamtbewegung z.B. in Bezugsbewegung und Änderungen

4.2 Drehmatrizen

4.2.1 Darstellung eines Vektors in den kartesischen Systemen K_1 und K_2

Koordinatensysteme: K_1 (x_1, y_1, z_1), K_2 (x_2, y_2, z_2):

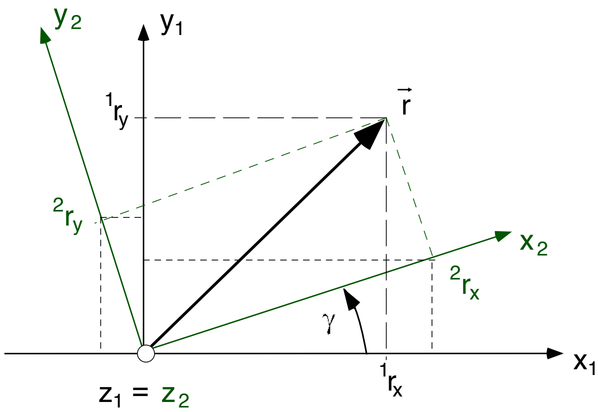
$$\vec{r} = \vec{e}_{1x}\,{}^1r_x + \vec{e}_{1y}\,{}^1r_y + \vec{e}_{1z}\,{}^1r_z = \vec{\mathbf{e}}_1^T\,{}^1\mathbf{r} \quad = \quad \vec{e}_{2x}\,{}^2r_x + \vec{e}_{2y}\,{}^2r_y + \vec{e}_{2z}\,{}^2r_z = \vec{\mathbf{e}}_2^T\,{}^2\mathbf{r}$$

Die Komponenten sind

in K_1 $\quad {}^1\mathbf{r} = \begin{pmatrix} {}^1r_x \\ {}^1r_y \\ {}^1r_z \end{pmatrix}$

in K_2 $\quad {}^2\mathbf{r} = \begin{pmatrix} {}^2r_x \\ {}^2r_y \\ {}^2r_z \end{pmatrix} \neq {}^1\mathbf{r}$

Betrag von $\vec{r}$: $\quad r = \sqrt{{}^1r_x^2 + {}^1r_y^2 + {}^1r_z^2} = \sqrt{{}^2r_x^2 + {}^2r_y^2 + {}^2r_z^2}$



Transformation in der x-y-Ebene

$$\begin{pmatrix} {}^1r_x \\ {}^1r_y \\ {}^1r_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^2r_x \\ {}^2r_y \\ {}^2r_z \end{pmatrix}$$

$$ {}^1\mathbf{r} \quad = \quad \mathbf{A}^{12}(\gamma) \quad {}^2\mathbf{r}$$

☞ $\mathbf{A}^{12}$ ist **Dreh- oder Transformationsmatrix** von Basis K_2 gegenüber K_1

in x-y-Ebene mit Drehwinkel γ: $\quad \mathbf{A}^{12}(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

☞ Für die Basisvektoren gilt ebenso: $\vec{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{A}^{12}\,\vec{\mathbf{e}}_2$

Transformation im Raum, siehe z.B. (Schiehlen 1986; Roberson u. Schwertassek 1988)

☞ Eine allgemeine Drehung kann durch drei Einzeldrehungen erzeugt werden:

a) Kardanwinkel mit den Drehkoordinaten $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ in der Drehfolge 1-2-3 bzw. x -y-z

Drehung der Basis K_1 gegenüber Basis K_2 mit 3 Elementardrehungen:

1. um x_1 - Achse mit Winkel α, -> neue Achsen y', z' und x' bei $x' = x_1$
2. um y' - Achse mit Winkel β, -> neue Achsen x'', z'' und y'' bei y'' = y'
3. um z'' - Achse mit Winkel γ. -> neue Achsen x_2, y_2 und z_2 bei z_2 = z''

Transformation
$$\vec{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{\mathbf{e}}_2 \quad \text{wo} \quad c \equiv \cos,\ s \equiv \sin$$

$$\vec{\mathbf{e}}_1 = \quad \mathbf{A}(\alpha) \quad \mathbf{A}(\beta) \quad \mathbf{A}(\gamma) \quad \vec{\mathbf{e}}_2 \quad = \mathbf{A}^{12}\, \vec{\mathbf{e}}_2$$

mit der Drehmatrix
$$\mathbf{A}^{12} = \begin{pmatrix} c\beta\, c\gamma & -c\beta\, s\gamma & s\beta \\ c\alpha\, s\gamma + s\alpha\, s\beta\, c\gamma & c\alpha\, c\gamma - s\alpha\, s\beta\, s\gamma & -s\alpha\, c\beta \\ s\alpha\, s\gamma - c\alpha\, s\beta\, c\gamma & s\alpha\, c\gamma + c\alpha\, s\beta\, s\gamma & c\alpha\, c\beta \end{pmatrix}$$

b) Andere Drehbeschreibungen:

Kardanwinkel der Drehfolge z-y-x;

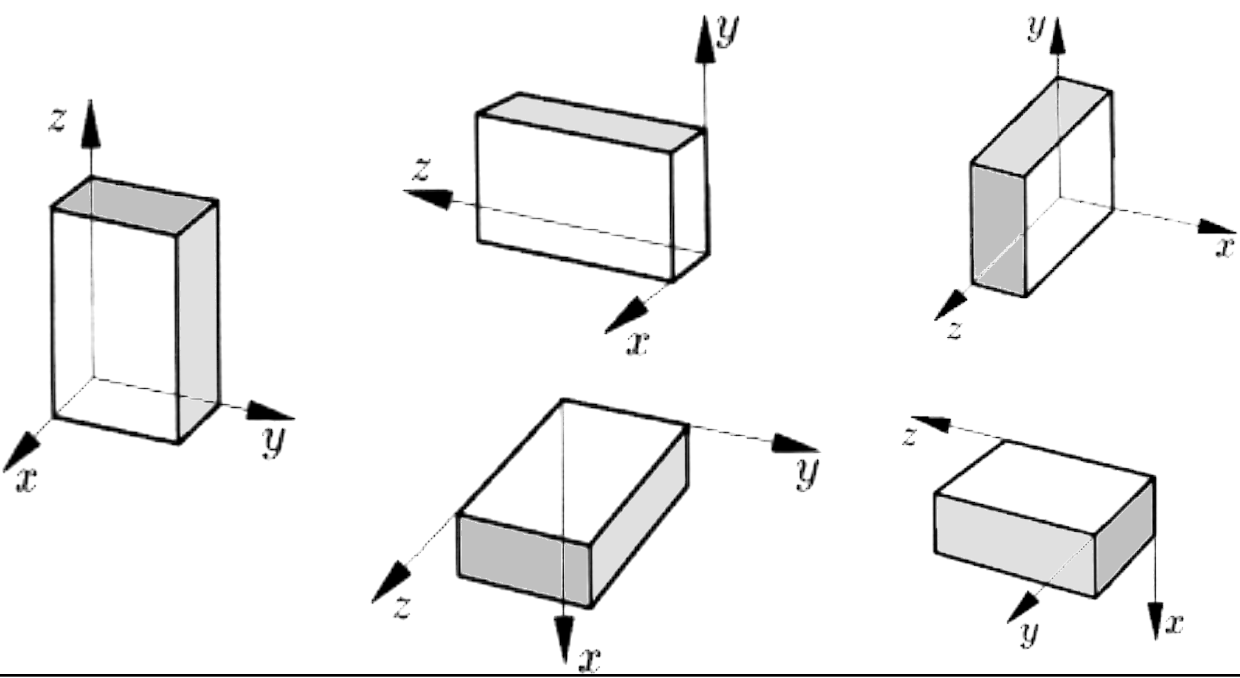
Eulerwinkel mit Drehfolge z-x-z;

Drehzeiger, Eulerparameter, Rodriguesparameter

Übung 4.1: Wir drehen den Quader: a) 1. um α = 90°, 2. um β = 90°

b) 1. um β = 90°, 2. um α= 90°. Wie ist der Quader orientiert?

Startlage Lage nach 1. Drehung Lage nach 2. Drehung



4.2.2 Eigenschaften der Drehmatrizen

☞ Jede Zeile i der Matrix $\mathbf{A}^{12}$ stellt den Basisvektor $\vec{e}_{1i}$ in der Basis $\vec{\mathbf{e}}_2$ dar:

also $\vec{e}_{1x} = \begin{pmatrix} A_{11}^{12} & A_{12}^{12} & A_{13}^{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_{2x} \\ \vec{e}_{2y} \\ \vec{e}_{2z} \end{pmatrix}$, $\vec{e}_{1y} = \begin{pmatrix} A_{21}^{12} & A_{22}^{12} & A_{23}^{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_{2x} \\ \vec{e}_{2y} \\ \vec{e}_{2z} \end{pmatrix}$, $\vec{e}_{1z} = \begin{pmatrix} A_{31}^{12} & A_{32}^{12} & A_{33}^{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_{2x} \\ \vec{e}_{2y} \\ \vec{e}_{2z} \end{pmatrix}$

☞ Jede Spalte j der Matrix $\mathbf{A}^{12}$ stellt den Basisvektor $\vec{e}_{2j}$ in der Basis $\vec{\mathbf{e}}_1$ dar:

also $\vec{e}_{2x} = \begin{pmatrix} \vec{e}_{1x} & \vec{e}_{1y} & \vec{e}_{1z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{12} \\ A_{21}^{12} \\ A_{31}^{12} \end{pmatrix}$, $\vec{e}_{2y} = \begin{pmatrix} \vec{e}_{1x} & \vec{e}_{1y} & \vec{e}_{1z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{12}^{12} \\ A_{22}^{12} \\ A_{32}^{12} \end{pmatrix}$, $\vec{e}_{2z} = \begin{pmatrix} \vec{e}_{1x} & \vec{e}_{1y} & \vec{e}_{1z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{13}^{12} \\ A_{23}^{12} \\ A_{33}^{12} \end{pmatrix}$

somit $\boxed{\mathbf{A}^{12} = \begin{pmatrix} {}^1\mathbf{e}_{2x} & {}^1\mathbf{e}_{2y} & {}^1\mathbf{e}_{2z} \end{pmatrix}}$

☞ $\mathbf{A}^{12}$ ist eine orthonormale Matrix, so gilt: $\mathbf{A}^{12^\mathsf{T}} \equiv \left(\mathbf{A}^{12}\right)^{-1} = \mathbf{A}^{21}$, $\mathbf{A}^{12^\mathsf{T}} \mathbf{A}^{12} = \mathbf{A}^{12} \mathbf{A}^{12^\mathsf{T}} = \mathbf{E}$

☞ Umkehrung: $\vec{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{A}^{12^\mathsf{T}} \vec{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{A}^{21} \vec{\mathbf{e}}_1$

☞ **falls** $\vec{\mathbf{e}}_2 \equiv \vec{\mathbf{e}}_1$: $\mathbf{A}^{12} = \mathbf{E}$; => ${}^1\mathbf{r} \equiv {}^2\mathbf{r}$

☞ **Linearisierung** von $\mathbf{A}^{12}$ (kleine Drehwinkel $\gamma \ll 1$): $\cos\gamma \approx 1$, $\sin\gamma \approx \gamma$

in x-y-Ebene mit Drehwinkel γ: $\mathbf{A}^{12} = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E} + \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}$ mit $\boldsymbol{\vartheta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$

im Raum mit Drehwinkel α, β, γ: $\mathbf{A}^{12} = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E} + \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}$ mit $\boldsymbol{\vartheta} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

Rückrechnung der Drehwinkel α, β, γ aus der Drehmatrix

$$\mathbf{A}^{12} = \begin{pmatrix} c\beta\, c\gamma & -c\beta\, s\gamma & s\beta \\ c\alpha\, s\gamma + s\alpha\, s\beta\, c\gamma & c\alpha\, c\gamma - s\alpha\, s\beta\, s\gamma & -s\alpha\, c\beta \\ s\alpha\, s\gamma - c\alpha\, s\beta\, c\gamma & s\alpha\, c\gamma + c\alpha\, s\beta\, s\gamma & c\alpha\, c\beta \end{pmatrix}$$

1. $\beta = \arcsin\left(A_{13}^{12}\right) = \arctan \dfrac{A_{13}^{12}}{\sqrt{(A_{23}^{12})^2 + (A_{33}^{12})^2}}$ für $-\dfrac{\pi}{2} < \beta < \dfrac{\pi}{2}$
2. $\alpha = \arctan \dfrac{-A_{23}^{12}}{A_{33}^{12}}$ für $-\pi \le \alpha \le \pi$
3. $\gamma = \arctan \dfrac{-A_{12}^{12}}{A_{11}^{12}}$ für $-\pi \le \gamma \le \pi$

☞ Achtung: Verwende die atan2–Funktionen, d.h. arctan(y/x)

☞ **Achtung Taschenrechner: ....**

☞ Achtung: Für $\beta = \pm 90°$ ist $\mathbf{A}^{12}$ singulär, da Winkel α und γ nicht mehr gefunden werden können!

Übung 4.2: Bestimme die Drehwinkel α, β, γ der Drehfolge 1,2,3 der Drehmatrix

$$\mathbf{A}^{12} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.866 \\ -0.75 & -0.5 & 0.433 \\ 0.433 & -0.866 & -0.25 \end{pmatrix}$$ mit Hilfe des Taschenrechners:

HW: Aufgabe 4.1, 4.2

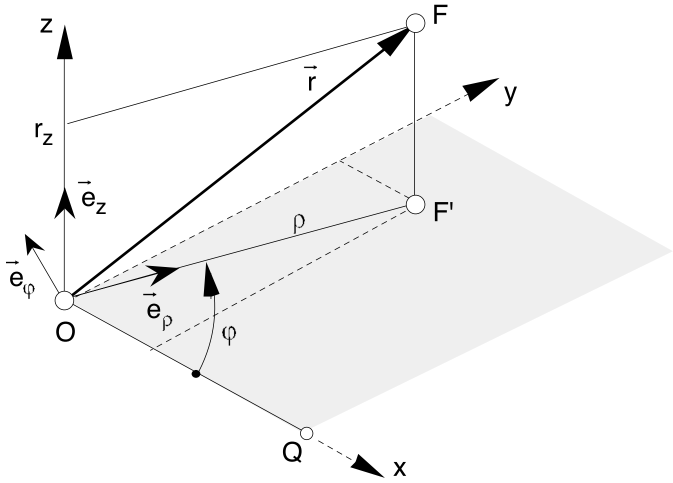
4.2.3 Darstellung eines Vektors in Polar- / Zylinderkoordinaten

☞ vorteilhaft bei Kreisbahnen

Basisvektoren $\vec{e}_\rho \perp \vec{e}_\varphi$ drehen sich

mit Winkel φ in der x-y - Ebene,

gemessen von Bezugsstrahl OQ;
$\vec{e}_z$ ist ortsfest und $\perp \vec{e}_\rho$ und $\perp \vec{e}_\varphi$



Position von F:

Ortsvektor $\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho(\varphi) + r_z \vec{e}_z$

Betrag $|\vec{r}| = r = \sqrt{\rho^2 + r_z^2}$

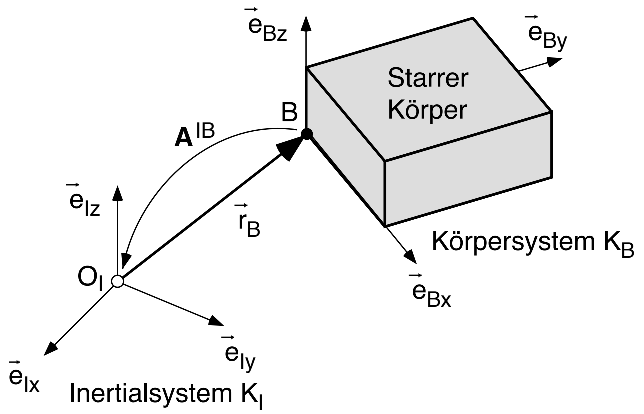
Koordinaten sind ρ, φ, r_z

Matrizenschreibweise

$$\vec{r} \equiv \begin{pmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ r_z \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{e}}_{Zyl}^T \, \boldsymbol{\rho}$$

☞ Weitere Koordinaten sind **Kugelkoordinaten**

4.3 Position und Orientierung des freien, starren Körpers im Raum



Position

Ist O_I der Ursprung und $\vec{\mathbf{e}}_I$ das Feld der Basisvektoren des Inertialsystems K_I und O_B der Ursprung und $\vec{\mathbf{e}}_B$ die Basisvektoren des körperfesten Koordinatensystems K_B, so gilt:

Ortsvektor von O_I nach B in Basis $\vec{\mathbf{e}}_I$: $\vec{r}_{BO} \equiv \vec{r}_B = \vec{e}_{Ix}\, r_{Bx} + \vec{e}_{Iy}\, r_{By} + \vec{e}_{Iz}\, r_{Bz} = \vec{\mathbf{e}}_I^{\,T}\, {}^I\mathbf{r}_B$

Abstand $O_I - B$: $\left|\vec{r}_B\right| = r_B = \sqrt{r_{Bx}^2 + r_{By}^2 + r_{Bz}^2}$

☞ **Merke**: Zur Beschreibung der Position sind 3 Koordinaten (r_{Bx}, r_{By}, r_{Bz}) erforderlich!

In der Ebene sind 2 Koordinaten notwendig.

Orientierung

Die Drehung der Basisvektoren $\vec{\mathbf{e}}_B$ bezüglich $\vec{\mathbf{e}}_I$ lässt sich mit Hilfe der Drehmatrix $\mathbf{A}^{IB}$ beschreiben. Es gilt:

Drehung von $\vec{\mathbf{e}}_B$ bezüglich $\vec{\mathbf{e}}_I$: $\vec{\mathbf{e}}_I = \mathbf{A}^{IB}\ \vec{\mathbf{e}}_B$ wo $\mathbf{A}^{IB} = \mathbf{A}^{IB}(\alpha, \beta, \gamma)$

Nach Abschn. 4.2.1 lassen sich Drehmatrizen z.B. mit Kardanwinkeln α, β, γ beschreiben.

☞ **Merke**: Zur Beschreibung der Orientierung sind 3 Koordinaten (z. B. α, β, γ) erforderlich!

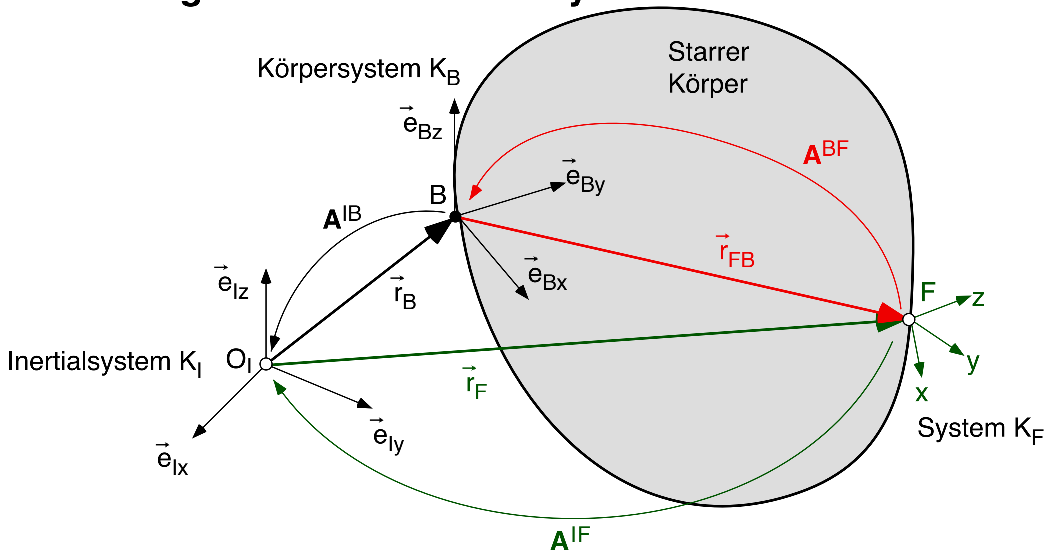
In der Ebene ist eine Koordinate notwendig.

Zusammenfassung

☞ **Zur Festlegung eines freien starren Körpers im Raum sind 6 Koordinaten erforderlich!**

Man kann auch sagen: ist ein Koordinatensystem K_B mit dem Körper verbunden, so beschreibt dessen Bewegung die Lage des Körpers bez. eines Inertialsystems.

4.4 Verwendung dreier Koordinatensysteme



Position und Orientierung eines Partikels F mit Koordinatensystem K_F auf dem Körper.

Ist F der Ursprung und $\vec{\mathbf{e}}_F$ bzw. (x,y,z) das Feld der Basisvektoren des Systems auf F und $\vec{r}_{FB}$ der Ortsvektor des Punktes F bez. B, sowie $\mathbf{A}^{FB}$ die Drehmatrix der Basis $\vec{\mathbf{e}}_F$ bez. $\vec{\mathbf{e}}_B$,

so gilt:

Ortsvektor von O_I nach F in Basis $\vec{\mathbf{e}}_I$: $\vec{r}_F = \vec{r}_{FB} + \vec{r}_B = \vec{\mathbf{e}}_I^T \left({}^I\mathbf{r}_{FB} + {}^I\mathbf{r}_B\right)$, also ${}^I\mathbf{r}_F = {}^I\mathbf{r}_{FB} + {}^I\mathbf{r}_B$

☞ **Merke**: Sind alle Vektoren in der selben Basis definiert, so darf man ihre Koordinaten aufaddieren, andernfalls sind mit Hilfe der Drehmatrizen diese erst umzurechnen!.

Ortsvektor von O_I nach F in Basis $\vec{\mathbf{e}}_I$, aber $\vec{r}_{FB}$ wurde in der Basis $\vec{\mathbf{e}}_B$ gemessen:

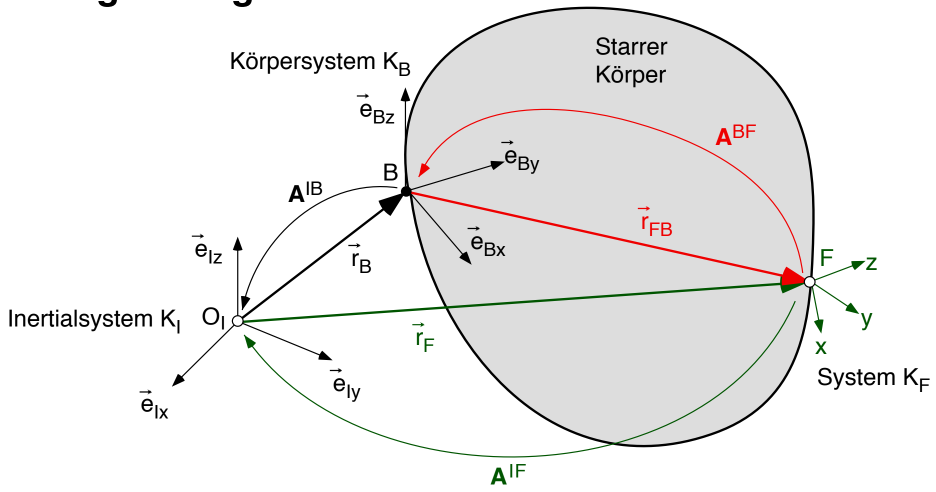
$${}^I\mathbf{r}_F = {}^I\mathbf{r}_{FB} + {}^I\mathbf{r}_B = \mathbf{A}^{IB}\ {}^B\mathbf{r}_{FB} + {}^I\mathbf{r}_B$$

Drehung von $\vec{\mathbf{e}}_F$ bezüglich $\vec{\mathbf{e}}_I$: $\vec{\mathbf{e}}_I = \mathbf{A}^{IF}\ \vec{\mathbf{e}}_F = \mathbf{A}^{IB}\ \mathbf{A}^{BF}\ \vec{\mathbf{e}}_F$, also $\mathbf{A}^{IF} = \mathbf{A}^{IB}\ \mathbf{A}^{BF}$

☞ **Merke**: Drehmatrizen werden mit einander multipliziert.

HW: Aufgabe 4.1, 4.2, 4.3

4.5 Einführung homogener Transformationen



☞ Die Information eines Ortsvektors ${}^{I}\mathbf{r}_{BI}$ und einer Drehmatrix $\mathbf{A}^{IB}$ eines Systems K_B bez. K_I läßt sich als homogene 4x4–Transformationsmatrix $\mathbf{T}^{IB}$ angeben, (Paul 1986),

$$\mathbf{T}^{IB} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} & \mathbf{A}^{IB} & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} {}^{I}\mathbf{r}_{BI} \\ \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

☞ In Analogie: Die Information eines Ortsvektors ${}^{B}\mathbf{r}_{FB}$ und einer Drehmatrix $\mathbf{A}^{BF}$ eines Systems K_F bez. K_B läßt sich als homogene 4x4–Transformationsmatrix $\mathbf{T}^{BF}$ angeben:

$$\mathbf{T}^{BF} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} & \mathbf{A}^{BF} & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} {}^{B}\mathbf{r}_{FB} \\ \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

☞ Die Information eines Ortsvektors ${}^{I}\mathbf{r}_{FI}$ und einer Drehmatrix $\mathbf{A}^{IF}$ eines Systems K_F bez. K_I läßt sich als homogene 4x4–Transformationsmatrix $\mathbf{T}^{IF}$ angeben:

$$\mathbf{T}^{IF} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} & \mathbf{A}^{IF} & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} {}^{I}\mathbf{r}_{FI} \\ \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Für sie gilt: $\mathbf{T}^{IF} = \mathbf{T}^{IB}\,\mathbf{T}^{BF}$

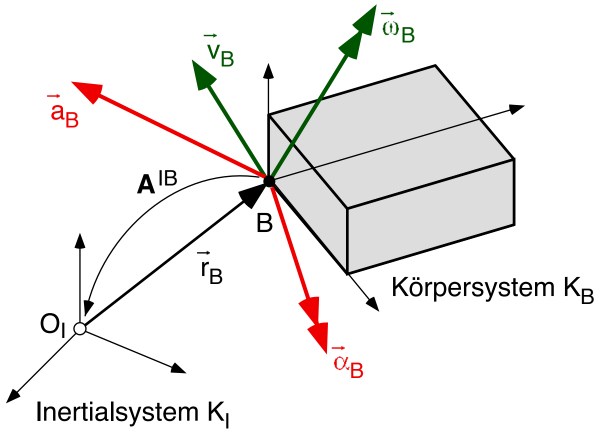
☞ Sonderform der Transformationsmatrix ist die von DENAVIT-HARTENBERG, siehe Kap. Robotik.

Übung 4.3: Zeige, daß $\mathbf{T}^{IF} = \mathbf{T}^{IB}\,\mathbf{T}^{BF}$ die Beziehungen in Abschn. 4.4 erfüllt.

HW: Aufgabe 4.4

4.6 Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des starren Körpers

☞ Die Bewegung bez. des Inertialsystems wird absolute Bewegung genannt.



4.6.1 Absolute Winkelgeschwindigkeit der Körperbasis

☞ Die zeitliche Änderung der Basisvektoren $\vec{\mathbf{e}}_B$ wird durch Winkelgeschwindigkeiten ausgedrückt.

Sie bilden den Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}_{BI} \equiv \vec{\omega}_B$

Er kann in der Basis $\vec{\mathbf{e}}_B$ oder der Inertialbasis $\vec{\mathbf{e}}_I$ dargestellt werden:

$$\vec{\omega}_B = \vec{\mathbf{e}}_I^{\,T}\,{}^I\boldsymbol{\omega}_B = \vec{\mathbf{e}}_B^{\,T}\,{}^B\boldsymbol{\omega}_B \quad \text{wo} \quad {}^I\boldsymbol{\omega}_B = \mathbf{A}^{IB}\,{}^B\boldsymbol{\omega}_B$$

☞ Zwischen den Koordinaten der Winkelgeschwindigkeit und der Drehmatrix bzw. den Drehwinkeln gelten folgende Beziehungen (Schiehlen 1986; Roberson u. Schwertassek 1988):

Aus Elementardrehungen

$${}^B\boldsymbol{\omega}_B = \begin{pmatrix} {}^B\omega_{Bx} \\ {}^B\omega_{By} \\ {}^B\omega_{Bz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\beta\, c\gamma & s\gamma & 0 \\ -c\beta\, s\gamma & c\gamma & 0 \\ s\beta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\vartheta})\,\dot{\boldsymbol{\vartheta}}, \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\vartheta}} = \mathbf{H}^{-1}\,{}^B\boldsymbol{\omega}_B,\ \mathbf{H}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{c\gamma}{c\beta} & -\dfrac{s\gamma}{c\beta} & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ -\tan\beta\, c\gamma & \tan\beta\, s\gamma & 1 \end{pmatrix}$$

Aus POISSON-Gleichung $\quad \dot{\mathbf{A}}^{IB} = \mathbf{A}^{IB}\,{}^B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \quad$ oder $\quad {}^B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B = \mathbf{A}^{IB^T}\,\dot{\mathbf{A}}^{IB}$

Linearisierung $\quad \mathbf{H} \approx \mathbf{E} \ \text{-->} \quad {}^B\boldsymbol{\omega}_B \approx {}^I\boldsymbol{\omega}_B \approx \dot{\boldsymbol{\vartheta}}$

☞ Bewegungen in x-y-Ebene $\quad {}^I\omega_{Bz} \equiv {}^B\omega_{Bz} \equiv \omega_{Bz} = \dot{\gamma}$

4.6.2 Absolute Winkelbeschleunigung der Körperbasis

☞ Die zeitliche Änderung des Winkelgeschwindigkeitsvektors $\vec{\omega}_{BI} \equiv \vec{\omega}_B$ liefert den Winkelbeschleunigungsvektor $\vec{\alpha}_{BI} \equiv \vec{\alpha}_B$:

Er kann in der Basis $\vec{\mathbf{e}}_B$ oder der Inertialbasis $\vec{\mathbf{e}}_I$ dargestellt werden:

$$\vec{\alpha}_B = \vec{\mathbf{e}}_I^{\,T}\, {}^I\boldsymbol{\alpha}_B = \vec{\mathbf{e}}_B^{\,T}\, {}^B\boldsymbol{\alpha}_B \quad = \quad \dot{\vec{\omega}}_B = \vec{\mathbf{e}}_I^{\,T}\, {}^I\dot{\boldsymbol{\omega}}_B \quad \text{wo}$$

$${}^I\boldsymbol{\alpha}_B = {}^I\dot{\boldsymbol{\omega}}_B = \dot{\mathbf{A}}^{IB}\ {}^B\boldsymbol{\omega}_B + \mathbf{A}^{IB}\ {}^B\dot{\boldsymbol{\omega}}_B = \mathbf{A}^{IB}\left(\underbrace{{}^B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B\ {}^B\boldsymbol{\omega}_B}_{\mathbf{0}} + {}^B\dot{\boldsymbol{\omega}}_B\right) = \mathbf{A}^{IB}\, {}^B\dot{\boldsymbol{\omega}}_B \quad \text{und} \quad {}^B\boldsymbol{\alpha}_B = {}^B\dot{\boldsymbol{\omega}}_B$$

☞ Bewegungen in x-y-Ebene $\quad {}^I\alpha_{Bz} \equiv {}^B\alpha_{Bz} \equiv \alpha_{Bz} = \dot{\omega}_{Bz} = \ddot{\gamma}$

4.6.3 Absolute Lineargeschwindigkeit der Körperbasis

☞ Die zeitliche Änderung des Ortsvektors $\vec{r}_B$ liefert den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_{BI} \equiv \vec{v}_B$:

Er wird vorteilhaft der Inertialbasis $\vec{\mathbf{e}}_I$ dargestellt:

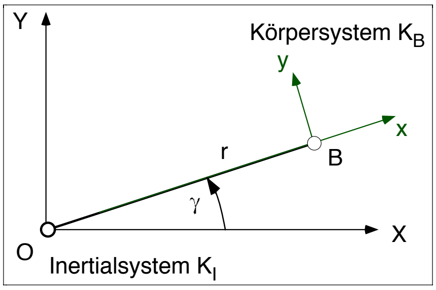
$$\vec{v}_B = \vec{\mathbf{e}}_I^{\,T}\, {}^I\mathbf{v}_B \quad = \quad \dot{\vec{r}}_B = \vec{\mathbf{e}}_I^{\,T}\, {}^I\dot{\mathbf{r}}_B, \quad \text{wo} \quad {}^I\mathbf{v}_B = {}^I\dot{\mathbf{r}}_B$$

4.6.4 Absolute Linearbeschleunigung der Körperbasis

☞ Die zeitliche Änderung des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}_B$ liefert den Beschleunigungsvektor $\vec{a}_{BI} \equiv \vec{a}_B$. Er wird vorteilhaft der Inertialbasis $\vec{\mathbf{e}}_I$ dargestellt:

$$\vec{a}_B = \vec{\mathbf{e}}_I^{\,T}\, {}^I\mathbf{a}_B \quad = \quad \dot{\vec{v}}_B = \vec{\mathbf{e}}_I^{\,T}\, {}^I\dot{\mathbf{v}}_B = \quad \ddot{\vec{r}}_B = \vec{\mathbf{e}}_I^{\,T}\, {}^I\ddot{\mathbf{r}}_B, \quad \text{wo} \quad {}^I\mathbf{a}_B = {}^I\dot{\mathbf{v}}_B = {}^I\ddot{\mathbf{r}}_B$$

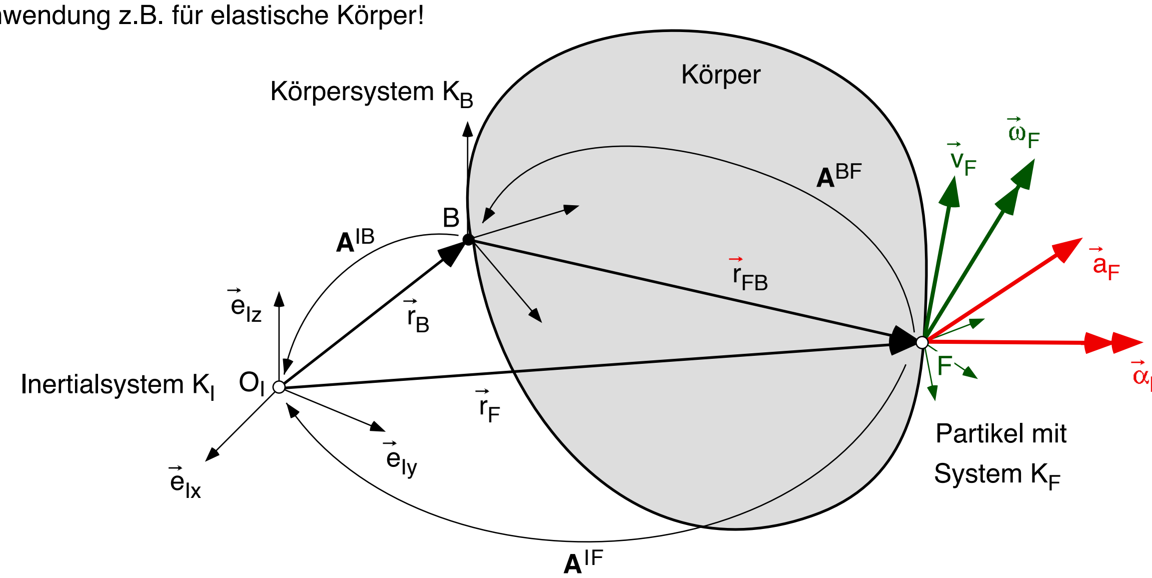
Übung 4.4: Ein Kind im Karussell (Punkt B) rotiert mit $\gamma = \omega_Z t$, $\omega_Z = 2$ rad/s = konst., bez. O. Abstand OB = r = 2 m. Bestimme alle kinematischen Größen des Systems K_B, bei ebener Betrachtung für Zeit t = π/12 s.



4.7 Geschwindigkeiten und Beschleunigungen eines Körperpartikels

Wir betrachten die Bewegung eines Partikels in F mit Koordinatensystem K_F bez. dem Inertialsystem K_I, unter Verwendung des Körpersystems K_B. Vektor $\vec{r}_{FB}$ wird in der Basis $\vec{\mathbf{e}}_B$ gemessen.

Anwendung z.B. für elastische Körper!



Orientierung: Drehung von $\vec{\mathbf{e}}_F$ bezüglich $\vec{\mathbf{e}}_I$: $\quad \vec{\mathbf{e}}_I = \mathbf{A}^{IF}\,\vec{\mathbf{e}}_F = \mathbf{A}^{IB}\,\mathbf{A}^{BF}\,\vec{\mathbf{e}}_F$, also $\mathbf{A}^{IF} = \mathbf{A}^{IB}\,\mathbf{A}^{BF}$

Winkelgeschwindigkeit: Bei Drehung von $\vec{\mathbf{e}}_F$ bezüglich $\vec{\mathbf{e}}_I$: Zuordnung zu Winkeln siehe Abschn. 4.6.1

$$\vec{\omega}_F = \vec{\omega}_{FB} + \vec{\omega}_B = \vec{\mathbf{e}}_I^{\,T}\,{}^I\boldsymbol{\omega}_F = \vec{\mathbf{e}}_I^{\,T}\left({}^I\boldsymbol{\omega}_{FB} + {}^I\boldsymbol{\omega}_B\right) = \vec{\mathbf{e}}_F^{\,T}\,{}^F\boldsymbol{\omega}_F \quad \text{wo}$$

$${}^I\boldsymbol{\omega}_F = \left({}^I\boldsymbol{\omega}_{FB} + {}^I\boldsymbol{\omega}_B\right) = \mathbf{A}^{IF}\,{}^F\boldsymbol{\omega}_F, \qquad {}^F\boldsymbol{\omega}_F = \left({}^F\boldsymbol{\omega}_{FB} + \mathbf{A}^{BF^T}\,{}^B\boldsymbol{\omega}_B\right)$$

Winkelbeschleunigung: Bei Drehung von $\vec{\mathbf{e}}_F$ bezüglich $\vec{\mathbf{e}}_I$:

$$\vec{\alpha}_F = \vec{\alpha}_{FB} + \vec{\alpha}_B = \vec{\mathbf{e}}_I^{\,T}\,{}^I\boldsymbol{\alpha}_F = \vec{\mathbf{e}}_I^{\,T}\left({}^I\boldsymbol{\alpha}_{FB} + {}^I\boldsymbol{\alpha}_B\right) = \vec{\mathbf{e}}_F^{\,T}\,{}^F\boldsymbol{\alpha}_F = \dot{\vec{\omega}}_F \quad \text{wo} \quad {}^F\boldsymbol{\omega}_B = \left(\mathbf{A}^{BF^T}\,{}^F\boldsymbol{\omega}_B\right),$$

$${}^I\boldsymbol{\alpha}_F = \left({}^I\boldsymbol{\alpha}_{FB} + {}^I\boldsymbol{\alpha}_B\right) = {}^I\dot{\boldsymbol{\omega}}_F = \left({}^I\dot{\boldsymbol{\omega}}_{FB} + {}^I\dot{\boldsymbol{\omega}}_B\right) = \mathbf{A}^{IF}\,{}^F\boldsymbol{\alpha}_F, \qquad {}^F\boldsymbol{\alpha}_F = \left({}^F\dot{\boldsymbol{\omega}}_{FB} + {}^F\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B\,{}^F\boldsymbol{\omega}_{FB} + \mathbf{A}^{BF^T}\,{}^B\dot{\boldsymbol{\omega}}_B\right)$$

Position: Ortsvektor von F bez. O_I:

$$\vec{r}_F = \vec{r}_{FB} + \vec{r}_B = \vec{\mathbf{e}}_I^{\,T}\left({}^I\mathbf{r}_{FB} + {}^I\mathbf{r}_B\right) = \vec{\mathbf{e}}_I^{\,T}\,{}^I\mathbf{r}_F, \quad \text{also} \quad {}^I\mathbf{r}_F = {}^I\mathbf{r}_{FB} + {}^I\mathbf{r}_B = \mathbf{A}^{IB}\,{}^B\mathbf{r}_{FB} + {}^I\mathbf{r}_B$$

Geschwindigkeit von F bez. O_I:

$$\vec{v}_F = \vec{v}_{FB} + \vec{v}_B = \dot{\vec{r}}_{FB} + \dot{\vec{r}}_B = \vec{\mathbf{e}}_I^{\,T}\,{}^I\mathbf{v}_F, \quad \text{wo}$$

$${}^I\mathbf{v}_F = {}^I\dot{\mathbf{r}}_F = {}^I\dot{\mathbf{r}}_{FB} + {}^I\dot{\mathbf{r}}_B = \mathbf{A}^{IB}\left({}^B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B\,{}^B\mathbf{r}_{FB} + {}^B\dot{\mathbf{r}}_{FB}\right) + {}^I\dot{\mathbf{r}}_B$$

Beschleunigung von F bez. O_I:

$$\vec{a}_F = \vec{a}_{FB} + \vec{a}_B = \dot{\vec{v}}_{FB} + \dot{\vec{v}}_B = \ddot{\vec{r}}_{FB} + \ddot{\vec{r}}_B = \vec{\mathbf{e}}_I^{\,T}\,{}^I\mathbf{a}_F, \quad \text{wo}$$

$${}^I\mathbf{a}_F = {}^I\dot{\mathbf{v}}_F = {}^I\ddot{\mathbf{r}}_F = {}^I\dot{\mathbf{v}}_{FB} + {}^I\dot{\mathbf{v}}_B = \mathbf{A}^{IB}\left({}^B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B\,{}^B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B\,{}^B\mathbf{r}_{FB} + 2\,{}^B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B\,{}^B\dot{\mathbf{r}}_{FB} + {}^B\tilde{\alpha}_B\,{}^B\mathbf{r}_{FB} + {}^B\ddot{\mathbf{r}}_{FB}\right) + {}^I\ddot{\mathbf{r}}_B$$

Übung 4.5: Vereinfache die Gleichungen für Probleme in x-y-Ebene.

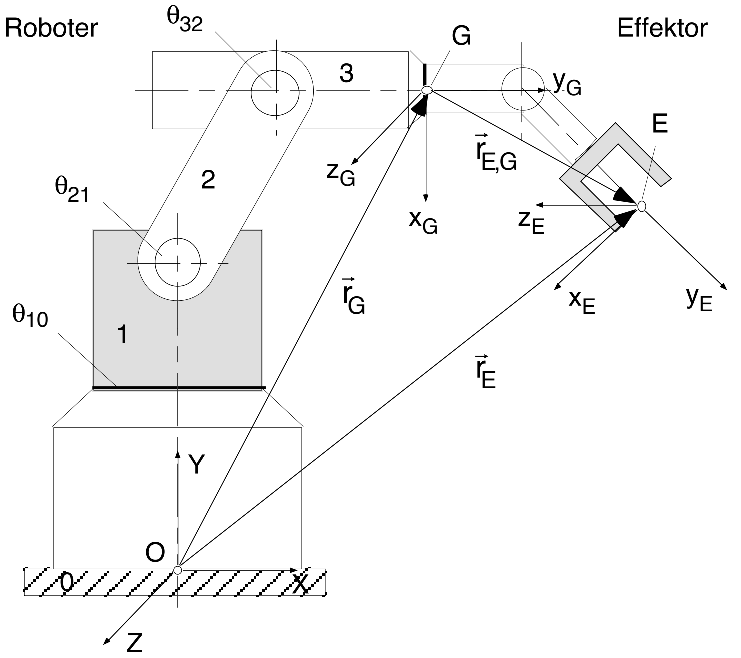
HW: Aufgabe 4.5

Aufgaben zu Kap. 4

Aufgabe 4.1: Gegeben ist ein Knickarmroboter

mit den Gelenkwinkel $\theta_{10} = 0°$, $\theta_{21} = -30°$, $\theta_{32} = -60°$,

und Koordinaten der Ortsvektoren: ${}^{0}\mathbf{r}_G = (40, 125, 0)^T$, ${}^{G}\mathbf{r}_{EG} = (30, -20, 25)^T$

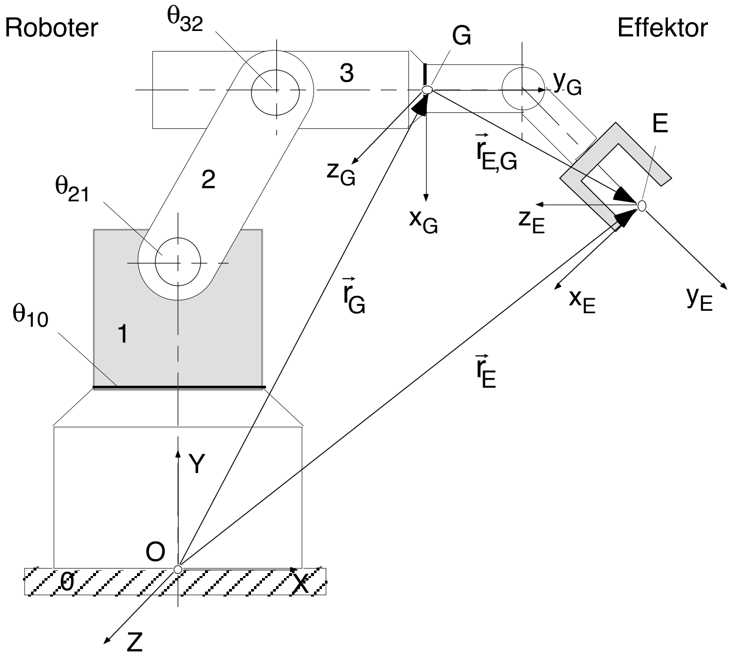


Berechne: Die Drehmatrix $\mathbf{A}^{0G}$ sowie die Koordinaten des Ortsvektors des Effektors ${}^{0}\mathbf{r}_E$

Lösung: $\mathbf{A}^{0G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^{0}\mathbf{r}_E = \begin{pmatrix} 20 \\ 95 \\ 25 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4.2: Gegeben ist ein Knickarmroboter

mit den Gelenkwinkel $\theta_{10} = 60°$, $\theta_{21} = -30°$, $\theta_{32} = -45°$, wobei θ_{10} eine Drehung um Achse Y darstellt.



1. Berechne: Die Drehmatrix $\mathbf{A}^{0G}$

2. Bestimme die Orientierung (Winkel α_E, β_E, γ_E) des Effektors (System E) bezügl. WKS, wenn

$$\mathbf{A}^{GE} = \begin{pmatrix} -0.707 & 0.707 & 0 \\ -0.696 & -0.696 & -0.174 \\ -0.123 & -0.123 & 0.985 \end{pmatrix}$$ gegeben ist.

Lösung: $\mathbf{A}^{0G} = \begin{pmatrix} 0.1294 & 0.4829 & 0.866 \\ -0.9659 & 0.2588 & 0 \\ -0.2241 & -0.8365 & 0.5 \end{pmatrix}$; $\alpha_E, \beta_E, \gamma_E = 4.03, 50.26, 146.68$ Grad

Aufgabe 4.3: Ein Meßsystem liefert für ein auf einem Band liegendes Werkstück (Punkt H) die Bandkoordinaten ${}^{B}\mathbf{r}_{HB} = (300, 119.6, 0.0)^T$ mm. Gegenüber dem WKS gilt für das Band: ${}^{0}\mathbf{r}_{B} = (0, 400, 800)^T$ mm und der Winkel $\alpha = 90°$.

a) Bestimme die Weltkoordinaten ${}^{0}\mathbf{r}_{H}$ des Werkstücks.

b) Weiter liefert das Meßsystem für das Werkstück die Drehmatrix $\mathbf{A}^{BH} = \begin{pmatrix} 0.6438 & -0.766 & 0 \\ 0.766 & 0.6438 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Bestimme die Drehmatrix $\mathbf{A}^{OH}$.

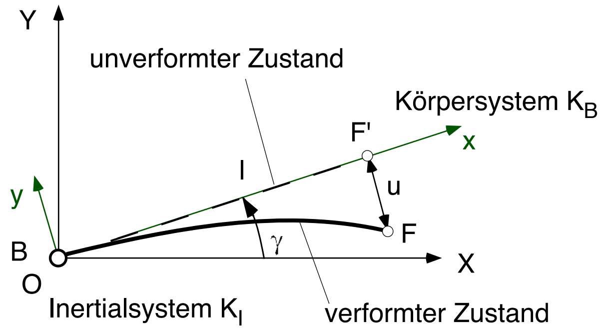
c) Bestimme aus $\mathbf{A}^{OH}$ die Kardanwinkel $\alpha_H, \beta_H, \gamma_H$ der Drehung des Werkstücks um x_0, y_0, z_0 bei der Drehfolge x, y, z.

Lösung: ${}^{0}\mathbf{r}_{H} = \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 919.6 \end{pmatrix}$mm, $\mathbf{A}^{OH} = \begin{pmatrix} 0.6438 & -0.766 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0.766 & 0.6438 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_H, \beta_H, \gamma_H$ = 90, 0, 50 Grad

Aufgabe 4.4: Bilde aus den Angaben zur Orientierung aus Aufgabe 4.2 und den Koordinaten der Ortsvektoren ${}^{0}\mathbf{r}_{G} = (40,\ 125,\ 0)^{T}$, ${}^{G}\mathbf{r}_{EG} = (30,\ -20,\ 25)^{T}$ die Transformationsmatrizen $\mathbf{T}^{OG}$ und $\mathbf{T}^{GE}$ und daraus $\mathbf{T}^{OE}$. Vergleiche $\mathbf{T}^{OE}$ mit den Ergebnissen aus Aufgabe 4.2.

Lösung: $\mathbf{T}^{OE} = \begin{pmatrix} -0.534 & -0.351 & 0.769 & 55.87 \\ 0.503 & -0.863 & -0.045 & 90.84 \\ 0.680 & 0.363 & 0.638 & 22.51 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4.5: Eine Antenne mit l = 3 m Länge rotiert um den Punkt O in der X-Y-Ebene mit dem Winkel $\gamma = \omega_Z\, t$ wo $\omega_Z = 6$ rad/s = konst. Aufgrund der Elastizität der Antenne verbiegt sie sich an der Spritze (Punkt F) um u = 300 mm = konst., siehe Bild. Die Verkürzung der Antenne infolge der Biegung bleibt unberücksichtigt.



a) Bestimme die Drehmatrix $\mathbf{A}^{IB}$ der Körperbasis K_B und die Position ${}^I\mathbf{r}_F$ von F zur Zeit $t = \pi/9$ s.

b) Bestimme dazu die Geschwindigkeiten ${}^I\boldsymbol{\omega}_B$ und ${}^I\mathbf{v}_F$ der Spitze F.

c) Bestimme dazu die Beschleunigungen ${}^I\boldsymbol{\alpha}_B$ und ${}^I\mathbf{a}_F$.

d) Zeichne alle Größen in ein Bild ein. Wähle geeignete Maßstäbe.

Lös: $\mathbf{A}^{IB} = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.866 & 0 \\ 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r}_H = \begin{pmatrix} 3 \\ -0.3 \\ 0 \end{pmatrix}$ m, ${}^I\boldsymbol{\omega}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ rad/s, $\boldsymbol{\alpha}_B = \mathbf{0}$, ${}^I\mathbf{v}_F = \begin{pmatrix} -16.49 \\ -7.44 \\ 0 \end{pmatrix}$ m/s, $\mathbf{a}_F = \begin{pmatrix} 44.65 \\ -98.93 \\ 0 \end{pmatrix}$ m/s^2.