

3	Analyse der Kinematik ebener Mechanismen .....	1
3.1	Aufgabenstellung und Vorgehensweisen .....	1
3.1.1	Was erwarten wir von der kinematischen Analyse? .....	1
3.1.2	Vorgehensweise der kinematischen Auswertung.....	2
3.2.	Analytische Auswertung einer ebenen offenen Kette .....	3
3.2.1	Zweiarmiger Roboter in der Ebene in kartesischen Koordinaten .....	3
3.3	Analytische Auswertung einer ebenen geschlossenen Kette.....	6
3.3.1	Ebene, schwingende, zentrische Kurbelschleife .....	6
3.3.2	Ebene Kurbelschwinge .....	11
3.4	Graphische Ermittlung der Geschwindigkeiten ebener Getriebe .....	16
3.4.1	Zeichenmaßstäbe der Bewegungsgrößen .....	16
3.4.2	Momentanpol (Geschwindigkeitspol) des starren Körpers .....	17
3.4.3	Geschwindigkeitszustand einer um A0 rotierenden Ebene .....	18
3.4.4	Geschwindigkeitszustand einer bewegten Ebene in der Ebene .....	20
3.5	Graphische Ermittlung des Beschleunigungen ebener Getriebe .....	25
3.5.1	Beschleunigungszustand einer um A0 rotierenden Ebene .....	25
3.5.2	Beschleunigungszustand einer bewegten Ebene in der Ebene .....	29
3.6	Graphische Ermittlung des Relativzustandes dreier Ebenen.....	34
3.6.1	Bewegungszustand eines auf einer bewegten Ebene wandernden Punktes .....	34
	Aufgaben zu Kap. 3 (Lösungen siehe auch Internet) .....	39



## 3 Analyse der Kinematik ebener Mechanismen

### 3.1 Aufgabenstellung und Vorgehensweisen

#### 3.1.1 Was erwarten wir von der kinematischen Analyse?

☞ Antworten auf das Übertragungsverhalten und Funktionsverhalten bezüglich der

- ◇ Lage
  - ◇ Geschwindigkeit
  - ◇ Beschleunigung im gesamten Bewegungsbereich
- zur Beurteilung von
- ◇ Arbeitsweise
  - ◇ Übertragungsverhalten
  - ◇ Verlauf der Koppelkurven
  - ◇ Abweichungen von der Sollbahn, bei Getrieben, Robotern

☞ Aussagen über Extremwerte der

- ◇ Lage zur Beurteilung des Arbeitsraumes
- ◇ Geschwindigkeit zur Prüfung des Verschleißes
- ◇ Beschleunigung zur Ermittlung der Massenkräfte

☞ Beurteilung besonderer Getriebestellungen

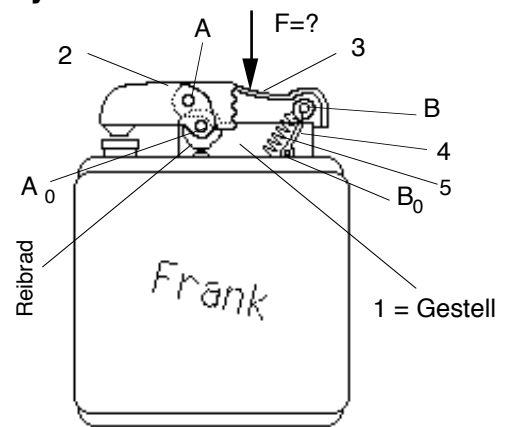
zur Prüfung von Rasterstellungen

bei Maschinen, Robotern

bei Lagern, Schiebern

bei Unwuchten

bei Maschinen



### 3.1.2 Vorgehensweise der kinematischen Auswertung

☞ Festlegung der Klasse des Mechanismus nach Abschn. 2.9:

- I) Offene Ketten von Körpern (Gliedern)  
Beispiele sind Mehrfachpendel, Roboter, siehe TM2
- II) Geschlossene Ketten von Körpern (Gliedern)  
Getriebe sind fast ausschließlich geschlossene Ketten

☞ Lösungsmethode wählen

a) **Analytisch** durch Aufstellen der **Bedingungsgleichungen der Lage**, daraus Geschwindigkeit und Beschleunigung durch zeitliche Ableitungen ermitteln --> für ebene Getriebe nach Abschn. 2.10, 3.2, 3.3.

*Von Hand oder mit symbolisch arbeitenden Computerprogrammen (Mathematica, Maple, ..)*

b) **Analytisch** durch Darstellen ebener Probleme in der **komplexen Zahlenebene**, siehe (Luck and Modler 1990).

*Von Hand oder mit Computerprogrammen*

c) **Graphisch** durch Konstruktion der Geschwindigkeit und Beschleunigung für eine Getriebebestellung gemäß den Vektorgleichungen --> für ebene Getriebe, siehe Abschn. 3.4 bis 3.6

*Von Hand*

d) **Analytisch** durch Anwenden der allgemeinen **Matrizengleichungen** für Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung, siehe Kap. 4 und 5

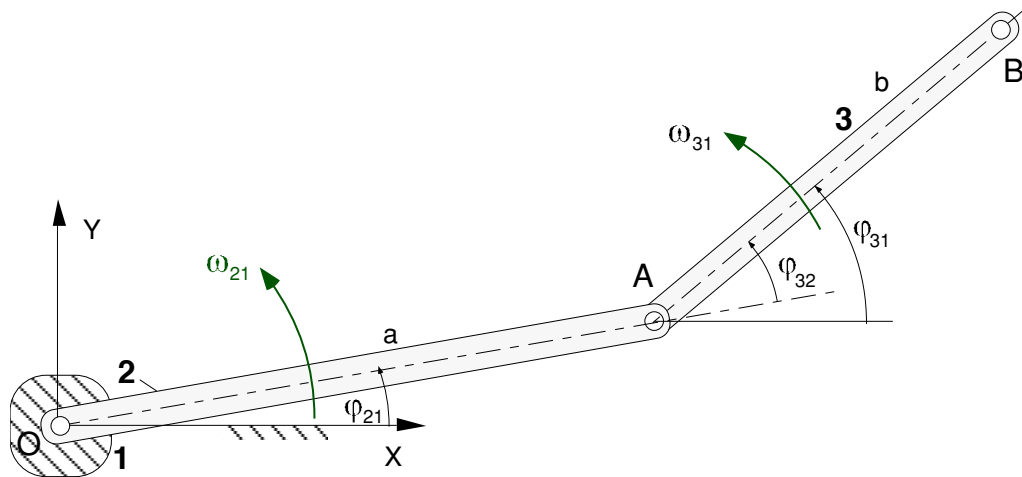
*Mit numerisch arbeitenden Computerprogrammen (Matlab, Kinematikprogramme, ..)*

☞ **Mehrkörperprogramme WorkingModel, SIMPACK**

## 3.2. Analytische Auswertung einer ebenen offenen Kette

### 3.2.1 Zweiarmer Roboter in der Ebene in kartesischen Koordinaten

#### Übung 3.1



**Gegeben:** Roboter mit zwei gelenkig gelagerten Armen 2 und 3 mit den Armlängen  $a$  und  $b$ . Arm 2 ist in  $O$  mit Gestell 1 verbunden, Arm 3 in  $A$  mit Arm 2, siehe Bild. Die Gelenkkoordinaten sind in  $O$  der Drehwinkel  $\varphi_{21} = \varphi_2$ , in  $A$  der Drehwinkel  $\varphi_{32}$ . Z-Achse zeigt aus Bildebene heraus.

Punkt  $B$  auf Arm 3 repräsentiert den Greifer des Roboters.

**Gesucht:** Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes  $B$  in Abhängigkeit der

Gelenkkoordinaten  $\varphi_2$  und  $\varphi_{32}$  sowie deren zeitliche Ableitungen, wie

Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_2 = \dot{\varphi}_2$  und  $\omega_{32} = \dot{\varphi}_{32}$

Winkelbeschleunigungen  $\alpha_2 = \ddot{\varphi}_2$  und  $\alpha_{32} = \ddot{\varphi}_{32}$

Anwendung der Vorgehensweisen a)

Alle Ergebnisse sind in der Inertialbasis darzustellen!

Stelle die Vektoren oben im Bild graphisch dar.

**Lösung:**

1. Der Laufgrad des Roboters liefert:

$$F = 3(n - g - 1) + \sum f_i = 3(3 - 2 - 1) + 2 = 2: \rightarrow \underline{\underline{2 \text{ FHG}}},$$

Unabhängige Koordinate  $n$  sind  $\varphi_2$  und  $\varphi_{32}$ !

2. Lage von B durch geometrische Betrachtungen. Alle Vektoren werden in der Inertialbasis X,Y dargestellt.

$$\varphi_{31} \equiv \varphi_3 = \varphi_{32} + \varphi_2,$$

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{BA} \Rightarrow \mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{BA}$$

$$= \begin{pmatrix} a \cos \varphi_2 \\ a \sin \varphi_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \cos \varphi_3 \\ b \sin \varphi_3 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \cos(\varphi_{32} + \varphi_2) \\ \sin(\varphi_{32} + \varphi_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Geschwindigkeit von B durch zeitliches Ableiten obiger Gleichungen

Falls die Vektoren bez. der Inertialbasis beschrieben werden, gilt für die zeitliche Ableitung der Vektoren gleich die zeitliche Ableitung der Koordinaten der Vektoren!

$$\dot{\varphi}_3 \equiv \omega_3 = \omega_{32} + \omega_2,$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} \Rightarrow \mathbf{v}_B = \dot{\mathbf{r}}_B = \dot{\mathbf{r}}_A + \dot{\mathbf{r}}_{BA} = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}$$

$$= \begin{pmatrix} -a \omega_2 \sin \varphi_2 \\ a \omega_2 \cos \varphi_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b \omega_3 \sin \varphi_3 \\ b \omega_3 \cos \varphi_3 \\ 0 \end{pmatrix} = a \omega_2 \begin{pmatrix} -\sin \varphi_2 \\ \cos \varphi_2 \\ 0 \end{pmatrix} + b(\omega_{32} + \omega_2) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_{32} + \varphi_2) \\ \cos(\varphi_{32} + \varphi_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Beschleunigung von B durch erneutes zeitliches Ableiten obiger Gleichungen

$$\ddot{\varphi}_3 \equiv \dot{\omega}_3 = \alpha_3 = \alpha_{32} + \alpha_2,$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} \Rightarrow \mathbf{a}_B = \ddot{\mathbf{r}}_B = \ddot{\mathbf{r}}_A + \ddot{\mathbf{r}}_{BA} = \dot{\mathbf{v}}_A + \dot{\mathbf{v}}_{BA} = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}$$

$$= \begin{pmatrix} -a \alpha_2 \sin \varphi_2 \\ a \alpha_2 \cos \varphi_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \omega_2^2 \cos \varphi_2 \\ -a \omega_2^2 \sin \varphi_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b \alpha_3 \sin \varphi_3 \\ b \alpha_3 \cos \varphi_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b \omega_3^2 \cos \varphi_3 \\ -b \omega_3^2 \sin \varphi_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= a \alpha_2 \begin{pmatrix} -\sin \varphi_2 \\ \cos \varphi_2 \\ 0 \end{pmatrix} - a \omega_2^2 \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 \\ 0 \end{pmatrix} + b(\alpha_{32} + \alpha_2) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_{32} + \varphi_2) \\ \cos(\varphi_{32} + \varphi_2) \\ 0 \end{pmatrix} - b(\omega_{32} + \omega_2)^2 \begin{pmatrix} \cos(\varphi_{32} + \varphi_2) \\ \sin(\varphi_{32} + \varphi_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. Graphische Darstellung:

## 6. Anwendung der mechanischen Äquivalenz für Statikprobleme

Würde an B die Kraft  $\mathbf{F}_B$  wirken, so würde man die erforderlichen Momente  $M_{21}$  und  $M_{32}$  in den Lagern O und A bestimmen wollen.

Vorgehensweise:

a) Stelle eine Matrizendarstellung für die Geschwindigkeitsbeziehung auf

$$\mathbf{v}_B = \begin{pmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \\ v_{Bz} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -a \sin \varphi_2 - b \sin \varphi_3 & -b \sin \varphi_3 \\ a \cos \varphi_2 + b \cos \varphi_3 & b \cos \varphi_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{J}_{vB}} \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_{21} \\ \omega_{32} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\Omega}} \Rightarrow \mathbf{v}_B = \mathbf{J}_{vB} \boldsymbol{\Omega}$$

b) Leistungsbilanz

$$P_{an} + P_{ab} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{M} + \mathbf{v}_B^T \mathbf{F}_B = 0 \quad \text{wo} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{21} \\ M_{32} \end{pmatrix}$$

$$\text{folgt mit a): } \boldsymbol{\Omega}^T (\mathbf{M} + \mathbf{J}_{vB}^T \mathbf{F}_B) = 0 \Rightarrow \mathbf{M} + \mathbf{J}_{vB}^T \mathbf{F}_B = 0 \Rightarrow \mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{21} \\ M_{32} \end{pmatrix} = -\mathbf{J}_{vB}^T \begin{pmatrix} F_{Bx} \\ F_{By} \\ F_{Bz} \end{pmatrix}$$

vgl. Ergebnisse aus Abschnitt 6.4.1

### 3.3 Analytische Auswertung einer ebenen geschlossenen Kette

#### 3.3.1 Ebene, schwingende, zentrische Kurbelschleife

##### Übung 3.2

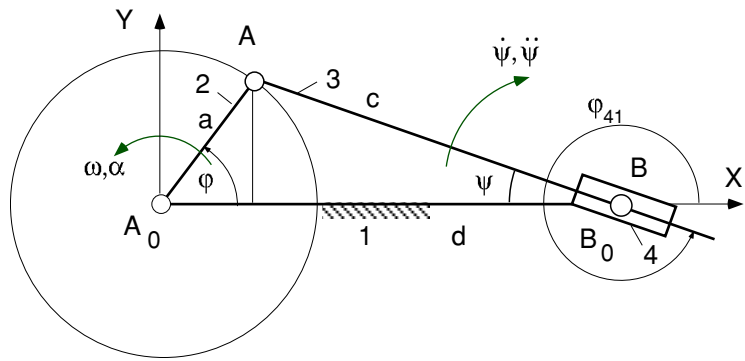
**Gegeben:** Die Kurbelschleife besteht aus einer Kurbel (Glieder 2) mit Radius  $a$ , einer Koppel (Glieder 3), einem Gleitstein (Glieder 4) sowie dem Gestell (Glieder 1). Kurbel und Gleitstein sind mit Drehgelenken in  $A_0$  und  $B_0$  mit dem Gestell

verbunden, der Abstand beträgt  $d$ .

Die Kurbelschleife wird an der Kurbel mit Winkel  $\varphi = \varphi_{21}$ , Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \dot{\varphi}_{12}$  und

Winkelbeschleunigung  $\alpha = \ddot{\varphi}_{12}$  angetrieben. Koppel und Gleitstein haben den aktuellen Drehwinkel

$\psi(\varphi) = 360^\circ - \varphi_{41}$ . Der aktuelle Abstand (AB) ist  $c(\varphi)$



**Gesucht:** Bestimme die Ausgangsbeziehungen  $\psi(\varphi)$  und  $c(\varphi)$  sowie deren zeitliche Ableitungen.

Trage die Funktionen graphisch auf für  $a = 2 \text{ cm}$ ,  $d = 6 \text{ cm}$ ,  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  und  $\alpha = 0 \text{ rad/s}^2$ .

Gebe das Übersetzungsverhältnis  $i_{42}$  zwischen der Winkelgeschwindigkeit des Gleitsteines und der Kurbel an.

##### Lösung:

- Der Laufgrad der Kurbelschleife beträgt:

$$F = 3(n - g - 1) + \sum f_i = 3(4 - 4 - 1) + 4 = 1: \rightarrow \underline{\underline{1 \text{ FHG}}}$$

Unabhängige Koordinate ist  $\varphi$



## 2. Aufstellen der kinematischen Beziehungen nach den Vorgehensweisen a)

Aus geometrischen Betrachtungen (siehe o. Bild) folgt mit  $(d - r \cos \varphi) > 0$

### 2.1 Schwingwinkel $\psi(\varphi)$

$$\tan \psi = \frac{a \sin \varphi}{d - a \cos \varphi} \longrightarrow \psi(\varphi) = \arctan \frac{a \sin \varphi}{d - a \cos \varphi}$$

wird auch explizite Schließbedingung auf Lageebene oder

**Übertragungsfunktion 0. Ordnung** genannt

### 2.2 Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}(\varphi, \omega)$

$$\dot{\psi}(\varphi, \omega) = \frac{\partial \psi(\varphi)}{\partial \varphi} \omega = \psi'(\varphi) \omega$$

$$\psi'(\varphi) = \frac{1}{1 + \left( \frac{a \sin \varphi}{d - a \cos \varphi} \right)^2} \frac{a \cos \varphi (d - a \cos \varphi) - a \sin \varphi a \sin \varphi}{(d - a \cos \varphi)^2} = \frac{-a^2 + a d \cos \varphi}{a^2 + d^2 - 2 a d \cos \varphi}$$

$\psi'(\varphi) = \psi_{\varphi}(\varphi)$  wird als explizite Schließbedingung auf Geschwindigkeitsebene

oder **Übertragungsfunktion 1. Ordnung** bezeichnet

### 2.3 Winkelbeschleunigung $\ddot{\psi}(\varphi, \omega, \alpha)$

$$\ddot{\psi}(\varphi, \omega, \alpha) = \frac{\partial \dot{\psi}(\varphi, \omega)}{\partial \omega} \alpha + \frac{\partial \dot{\psi}(\varphi, \omega)}{\partial \varphi} \omega = \psi'(\varphi) \alpha + \psi''(\varphi) \omega^2$$

$$\psi''(\varphi) = \frac{-a d \sin \varphi (a^2 + d^2 - 2 a d \cos \varphi) - (-a^2 + a d \cos \varphi) 2 a d \sin \varphi}{(a^2 + d^2 - 2 a d \cos \varphi)^2} = \frac{(a^2 - d^2) a d \sin \varphi}{(a^2 + d^2 - 2 a d \cos \varphi)^2}$$

$\psi''(\varphi) = \psi_{\varphi\varphi}(\varphi)$  wird **Übertragungsfunktion 2. Ordnung** genannt

**2.4 Abstand  $c(\varphi) = \overline{AB}(\varphi)$** 

$$c^2 = (a \sin \varphi)^2 + (d - a \cos \varphi)^2 \longrightarrow c(\varphi) = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos \varphi}$$

**2.5 Relativgeschwindigkeit  $\dot{\overline{AB}} = \dot{c}(\varphi, \omega)$ :**

$$\dot{c}(\varphi, \omega) = \frac{\partial c(\varphi)}{\partial \varphi} \omega, \quad \text{mit } c'(\varphi) = \frac{2ad \sin \varphi}{2\sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos \varphi}} = \frac{ad \sin \varphi}{\sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos \varphi}}$$

**2.6 Relativbeschleunigung  $\ddot{\overline{AB}} = \ddot{c}(\varphi, \omega, \alpha)$** 

$$\begin{aligned} \ddot{c}(\varphi, \omega, \alpha) &= \frac{\partial \dot{c}(\varphi, \omega)}{\partial \omega} \alpha + \frac{\partial \dot{c}(\varphi, \omega)}{\partial \varphi} \omega = c'(\varphi) \alpha + c''(\varphi) \omega^2 \\ c''(\varphi) &= \frac{ad \cos \varphi \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos \varphi} - ad \sin \varphi \left( \frac{2ad \sin \varphi}{2\sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos \varphi}} \right)}{\left( \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos \varphi} \right)^2} \\ &= \left( \frac{ad \cos \varphi}{\sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos \varphi}} - \frac{a^2 d^2 \sin^2 \varphi}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \varphi)^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

☞ Auch hier:  $c(\varphi)$  = Übertragungsfunktion 0. Ordnung,  
 $c'(\varphi) = c_{\varphi}(\varphi)$  = Übertragungsfunktion 1. Ordnung,  
 $c''(\varphi) = c_{\varphi\varphi}(\varphi)$  = Übertragungsfunktion 2. Ordnung, angewendet auf den Abstand  $\overline{AB}$

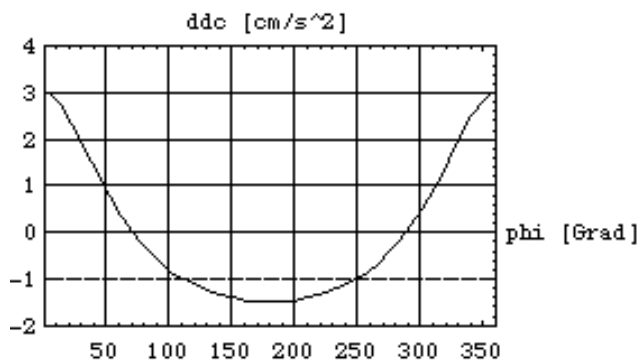
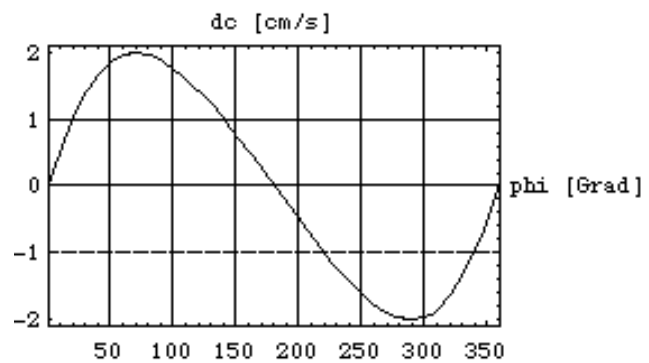
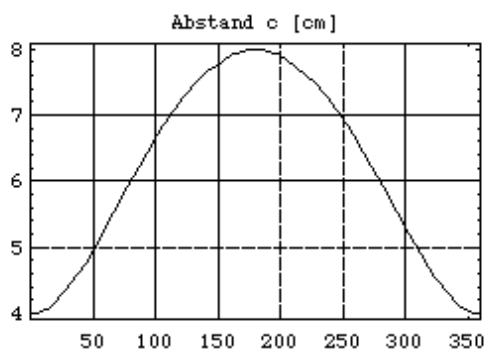
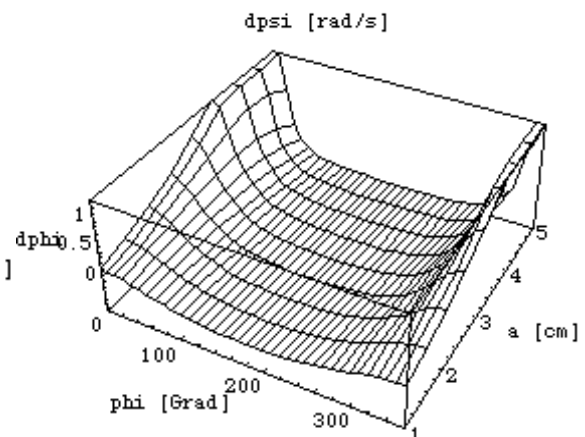
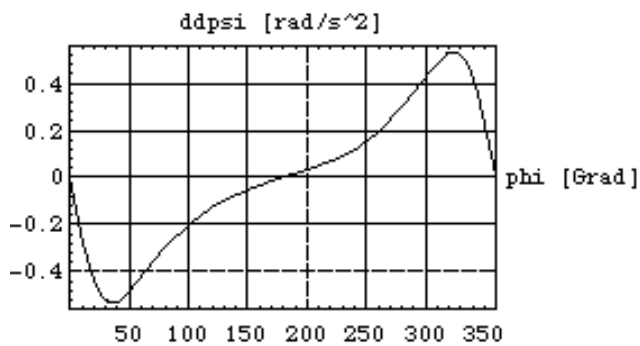
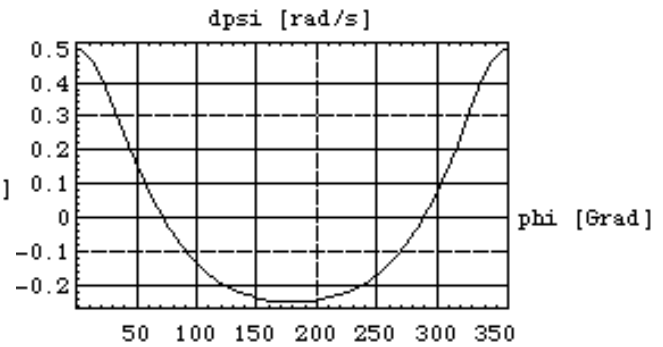
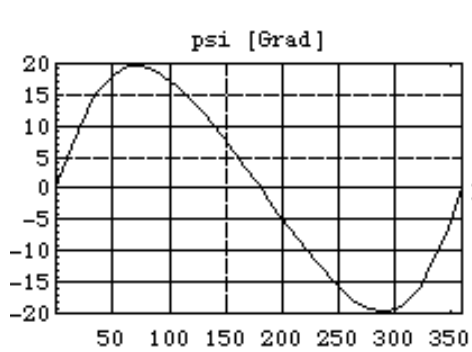
**3. Interpretiere  $\dot{\overline{AB}} = \dot{c}(\varphi, \omega)$  und  $\ddot{\overline{AB}} = \ddot{c}(\varphi, \omega, \alpha)$** **4. Übersetzungsverhältnis  $i_{42}(\varphi)$** 

$$i_{42} = \frac{\dot{\varphi}_{41}}{\dot{\varphi}_{21}} = \frac{-\dot{\psi}}{\omega} = -\psi'(\varphi) = -\frac{-a^2 + 2ad \cos \varphi}{a^2 + d^2 - 2ad \cos \varphi}$$

### 5. Auswerten der Funktionen der Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung

für  $a = 2 \text{ cm}$ ,  $d = 6 \text{ cm}$ ,  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ ,  $\alpha = 0$ : (mittels Mathematica, siehe Internet )

Beachte: der Verlauf von  $d\psi$  entspricht der Übersetzungsverhältnis  $i_{42} = \psi'$ , da  $\omega = 1$ .



## 6. Anwendung der mechanischen Äquivalenz für Statikprobleme

Würde in  $B_0$  das Moment  $M_{41}$  wirken, so würde man das erforderliche Moment  $M_{21}$  im Lager  $A_0$  bestimmen wollen.

a) Die Geschwindigkeitsbeziehung lautet

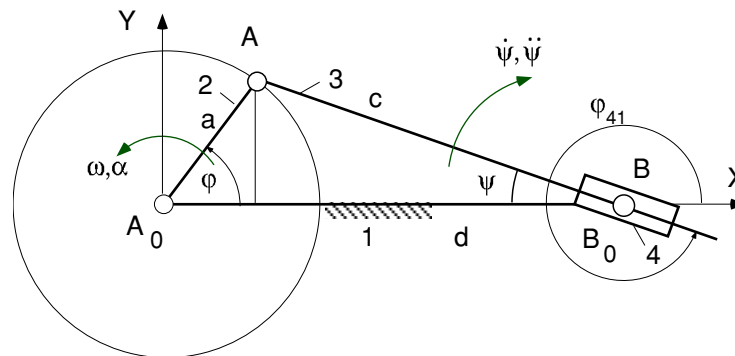
$$\dot{\psi} = \psi'(\varphi) \omega$$

b) Leistungsbilanz

$$P_{an} + P_{ab} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{21} M_{21} + \dot{\psi} M_{41} = 0$$

$$\text{folgt mit a) : } \omega_{21} (M_{21} + \psi'(\varphi) M_{41}) = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{21} + \psi'(\varphi) M_{41} = 0$$

Beachte:  $M_{21}$  hat die Richtung von  $\omega$  und  $M_{41}$  hat die Richtung von  $\dot{\psi}$ .



### 3.3.2 Ebene Kurbelschwinge

- ☞ In vielen mehrgliedrigen Getrieben ist ein Vieregelenkgetriebe enthalten, siehe Kap. 1. Entsprechend den Abmessungen ergibt sich nach Grashof für Kurbel als Antrieb mit Länge  $a = l_{\min}$  und Gestell als Nachbarglied zur Kurbel eine **Kurbelschwinge**.

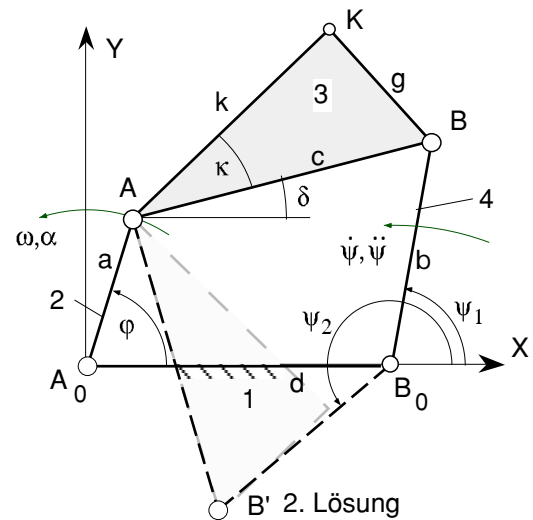
#### Übung 3.3

**Gegeben:** Die Kurbelschwinge besteht aus einer Kurbel (Glieder 2) mit Radius  $a$ , einer Koppel (Glieder 3) mit Länge  $c$ , einer Schwinge (Glieder 4) mit Länge  $b$  sowie dem Gestell (Glieder 1). Alle Glieder sind mit Drehgelenken verbunden. Der Abstand  $A_0 - B_0$  beträgt  $d$ .

Auf der Koppel befindet sich ein Punkt  $K$ , der sich aus Länge  $k$  und Winkel  $\kappa$  ergibt.

Der Antrieb des Getriebes erfolgt durch die Kurbel mit Winkel  $\varphi = \varphi_{21}$ , Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \dot{\varphi}_{12}$  und Winkelbeschleunigung  $\alpha = \ddot{\varphi}_{12}$ . Die Schwinge

hat den aktuellen Drehwinkel  $\psi = 180^\circ - \varphi_{41}$ , die Koppel den absoluten Drehwinkel  $\delta = \varphi_{31}$ .



**Gesucht:** Bestimme die Koppelkurve und die Bewegung des Koppelpunktes  $K$ , d.h. absolute Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung im Inertialsystem. Verwende Vorgehensweise a).

{Vorgehensweise b) ist für Computerprogramme besser geeignet und wird hier nicht durchgeführt}

Verwende die Werte:  $a = 2 \text{ cm}$ ,  $b = 3 \text{ cm}$ ,  $c = 4 \text{ cm}$ ,  $d = 4 \text{ cm}$ ,  $k = 3.5 \text{ cm}$ ,  $\kappa = 30^\circ$ ,  $g = 2.0 \text{ cm}$ ,  $\varphi = 0 - 360^\circ$ ,  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ ,  $\alpha = 20 \text{ rad/s}^2$ .

**Lösung:**

1. Der **Laufgrad** der Kurbelschwinge beträgt:

$$F = 3(n - g - 1) + \sum f_i = 3(4 - 4 - 1) + 4 = 1: \rightarrow \underline{1 \text{ FHG}}$$

Unabhängige Koordinate ist  $\varphi$ , abhängige Koordinaten sind  $\psi$  und  $\delta$ .

2. Aufstellen der kinematischen **Schließbedingungen**, d.h. finde  $\psi(\varphi)$  und  $\delta(\varphi)$

Aus ob. Bild entnimmt man:

$$r_{Ax} = a \cos \varphi, \quad r_{Ay} = a \sin \varphi, \quad r_{Bx} = d + b \cos \psi, \quad r_{By} = b \sin \psi$$

Um  $\delta$  zu eliminieren, bilde

$$c^2 = (r_{Bx} - r_{Ax})^2 + (r_{By} - r_{Ay})^2$$

$$\rightarrow f(\varphi, \psi) = a^2 + b^2 - c^2 + d^2 - 2ad \cos \varphi + 2bd \cos \psi - 2ab(\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi) = 0 \quad (I)$$

$\Rightarrow$  implizite Übertragungsfunktion oder Schließbedingung.

Auflösen nach  $\psi(\varphi)$ : verwende folgende Substitutionen (Luck & Modler, Getriebetechnik, S. 99)

$$k1(\varphi) = 2bd - 2ab \cos \varphi,$$

$$k2(\varphi) = -2ab \sin \varphi,$$

$$k3(\varphi) = a^2 + b^2 - c^2 + d^2 - 2ad \cos \varphi$$

$$\cos \psi =: \frac{1 - \tan^2 \frac{\psi}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\psi}{2}}, \quad \sin \psi =: \frac{2 \tan \frac{\psi}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\psi}{2}}, \quad \tan \frac{\psi}{2} =: q$$

$$\rightarrow f(\varphi, q) = (k3 - k1)q^2 + 2k2q + k1 + k3 = 0 \quad (II)$$

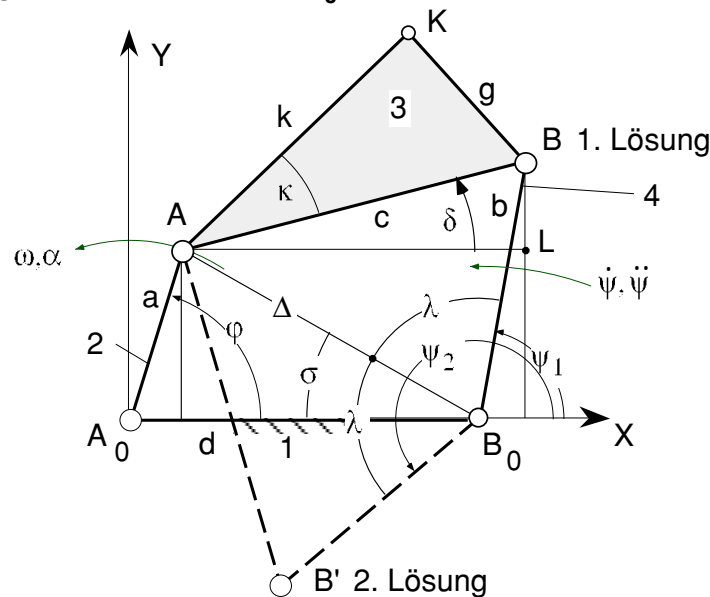
mit den **Lösungen**:  $q_1 = \frac{k2 + \sqrt{k1^2 + k2^2 - k3^2}}{k1 - k3}, \quad q_2 = \frac{k2 - \sqrt{k1^2 + k2^2 - k3^2}}{k1 - k3}$   
für  $\psi_1$   $\psi_2$  siehe gezeigte Getriebebestellungen

Weitere Schließbedingung:

$$\tan \delta = \frac{c \sin \delta}{c \cos \delta} = \frac{r_{By} - r_{Ay}}{r_{Bx} - r_{Ax}} = \frac{b \sin \psi - a \sin \varphi}{d + b \cos \psi - a \cos \varphi} \longrightarrow \delta(\varphi, \psi(\varphi)) \quad (III)$$

$\Rightarrow$  explizite Übertragungsfunktion.

### 3. Alternative Lösung mit Hilfe der Strecke AB<sub>0</sub>.



Die Lösung liegt in der Strecke AB<sub>0</sub> =  $\Delta(\varphi) = \sqrt{X^2 + Y^2}$  mit  $X = d - a \cos \varphi$ ,  $Y = a \sin \varphi$   
sowie der Winkel  
 $\sigma(\varphi) = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right)$  im Bereich von  $-90^\circ$  bis  $+90^\circ$  und  
 $\lambda(\varphi) = \arccos \frac{\Delta^2 + b^2 - c^2}{2b\Delta}$  im Bereich von  $0$  und  $180^\circ$ .

Das liefert die Lösungen: 1.  $\psi_1(\varphi) = 180^\circ - \sigma(\varphi) - \lambda(\varphi)$   
2.  $\psi_2(\varphi) = 180^\circ - \sigma(\varphi) + \lambda(\varphi)$

Weiter gilt für das Dreieck ABL: in y:  $c \sin \delta = b \sin \psi - a \sin \varphi$  (1)

in x:  $c \cos \delta = b \cos \psi - a \cos \varphi + d$  (2)

Der Winkel  $\delta$  lautet aus (1)/(2)  $\delta(\varphi) = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right)$ , wo  $X = \frac{d + b \cos \psi - a \cos \varphi}{c}$ ,  $Y = \frac{b \sin \psi - a \sin \varphi}{c}$

Für die Geschwindigkeiten findet man: aus (1):  $b \dot{\psi} \cos \psi - c \dot{\delta} \cos \delta = a \dot{\varphi} \cos \varphi$  (3)

aus (2):  $b \dot{\psi} \sin \psi - c \dot{\delta} \sin \delta = a \dot{\varphi} \sin \varphi$  (4)

woraus man entwickelt mit  $\omega = \dot{\varphi}$ :  $\dot{\psi} = \omega_{41} = \omega g_\psi$ ,  $g_\psi(\varphi, \psi, \delta) = \frac{a \sin(\delta - \varphi)}{b \sin(\delta - \psi)}$  als Übertrag.fkt. 1. Ordg.  
 $\dot{\delta} = \omega_{31} = \omega g_\delta$ ,  $g_\delta(\varphi, \psi, \delta) = \frac{a \sin(\psi - \varphi)}{c \sin(\delta - \psi)}$

Aus (3) und (4) sind die Beschleunigungen abzuleiten: mit  $\alpha = \ddot{\varphi}$ ,

$\ddot{\psi} = \alpha_{41} = \alpha g_\psi + \omega^2 h_\psi$ ,  $h_\psi(\varphi, \psi, \delta) = \frac{\partial g_\psi}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_\psi}{\partial \psi} g_\psi + \frac{\partial g_\psi}{\partial \delta} g_\delta$  als Übertrag.fkt. 2. Ordg.

$\ddot{\delta} = \alpha_{31} = \alpha g_\delta + \omega^2 h_\delta$ ,  $h_\delta(\varphi, \psi, \delta) = \frac{\partial g_\delta}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_\delta}{\partial \psi} g_\psi + \frac{\partial g_\delta}{\partial \delta} g_\delta$

**Hinweis:** Diese Gleichungen gelten für alle beliebigen Viergelenk-Mechanismen mit Drehgelenken!

**4. Lage des Koppelpunktes K, siehe ob. Bild:**

$$r_{Kx} = a \cos \varphi + k \cos (\delta + \kappa) = r_{Kx}(\varphi, \delta(\psi(\varphi))),$$

$$r_{Ky} = a \sin \varphi + k \sin (\delta + \kappa) = r_{Ky}(\varphi, \delta(\psi(\varphi)))$$

**5. Geschwindigkeit des Koppelpunktes K (beachte Kettenregel)**

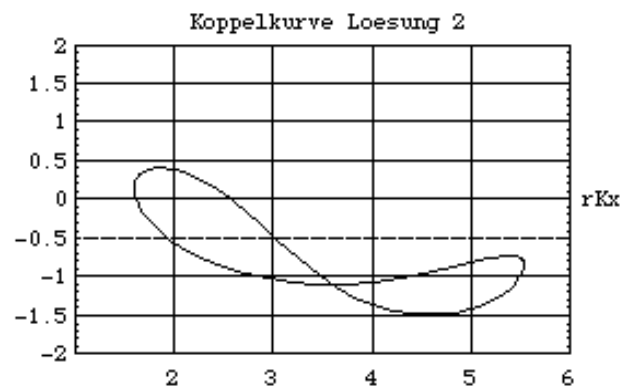
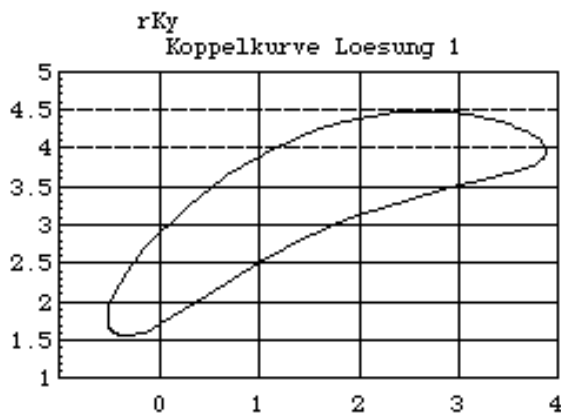
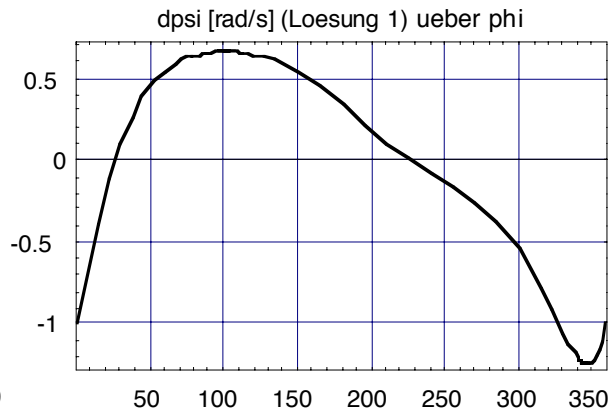
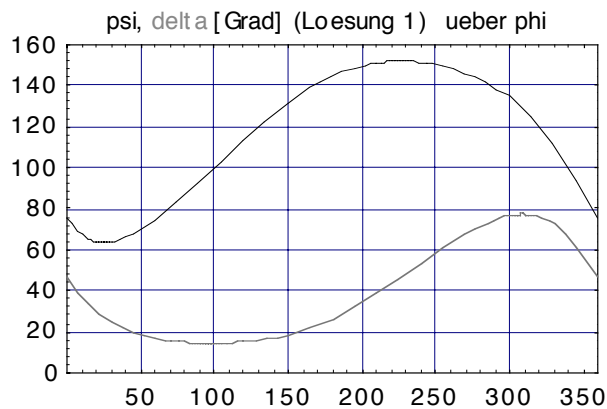
$$v_{Kx} = \frac{\partial r_{Kx}}{\partial \varphi} \omega + \frac{\partial r_{Kx}}{\partial \delta} \dot{\delta}, \quad v_{Ky} = \frac{\partial r_{Ky}}{\partial \varphi} \omega + \frac{\partial r_{Ky}}{\partial \delta} \dot{\delta} \quad \text{mit} \quad \dot{\delta} = \frac{\partial \delta(\varphi, \psi)}{\partial \varphi} \omega + \frac{\partial \delta(\varphi, \psi)}{\partial \psi} \dot{\psi}, \quad \dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \omega,$$

**6. Beschleunigung des Koppelpunktes K (beachte wieder die Kettenregel)**

$$a_{Kx} = \frac{\partial v_{Kx}}{\partial \omega} \alpha + \frac{\partial v_{Kx}}{\partial \varphi} \omega + \frac{\partial v_{Kx}}{\partial \dot{\delta}} \ddot{\delta} + \frac{\partial v_{Kx}}{\partial \delta} \dot{\delta}, \quad a_{Ky} = \frac{\partial v_{Ky}}{\partial \omega} \alpha + \frac{\partial v_{Ky}}{\partial \varphi} \omega + \frac{\partial v_{Ky}}{\partial \dot{\delta}} \ddot{\delta} + \frac{\partial v_{Ky}}{\partial \delta} \dot{\delta}$$

**7. Auswertung der Funktionen für die angegebenen Werte:**

--> Wegen der Komplexität Anwendung von *Mathematica*, siehe Internet





### 8. Anwendung der mechanischen Äquivalenz für Statikprobleme

Würde in  $B_0$  das Moment  $M_{41}$  wirken, so würde man das erforderliche Moment  $M_{21}$  im Lager  $A_0$  bestimmen wollen.

a) Die Geschwindigkeitsbeziehung lautet

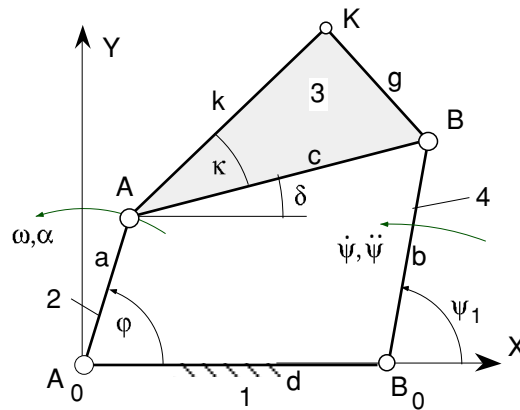
$$\dot{\psi} = \psi'(\varphi) \omega_{21} \quad \text{wo} \quad \omega_{21} = \omega$$

b) Leistungsbilanz

$$P_{an} + P_{ab} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{21} M_{21} + \dot{\psi} M_{41} = 0$$

$$\text{folgt mit a) : } \omega_{21} (M_{21} + \psi'(\varphi) M_{41}) = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{21} + \psi'(\varphi) M_{41} = 0$$

Beachte:  $M_{21}$  hat die Richtung von  $\omega$  und  $M_{41}$  hat die Richtung von  $\dot{\psi}$ .



### 3.4 Graphische Ermittlung der Geschwindigkeiten ebener Getriebe

#### 3.4.1 Zeichenmaßstäbe der Bewegungsgrößen

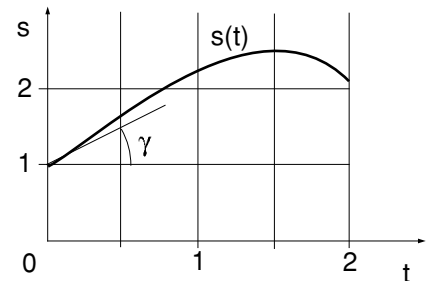
$$\text{Maßstab} = \frac{\text{Größe in Zeichnung}}{\text{wirkliche Größe}}$$

Wirkliche Größe			Zeichnungsgröße		Maßstab		Formel
Größe	Zeichen	Einheit	Größe Zeichen	Einheit z.B.	Maßstab	Einheit	
Zeit	t	s	$\hat{t}$	mm	$M_t$	$\frac{\text{mm}}{\text{s}}$	$\hat{t} = M_t t$
Weg, Länge	s, l	m, cm	$\hat{s}$	mm	$M_s$	$\frac{\text{mm}}{\text{m}}$	$\hat{s} = M_s s$
Geschwindigkeit	v	$\text{m s}^{-1}$ , $\text{cm s}^{-1}$	$\hat{v}$	mm	$M_v$	$\frac{\text{mm}}{\text{ms}^{-1}}$	$\hat{v} = M_v v$
Beschleunigung	a	$\text{m s}^{-2}$ , $\text{cm s}^{-2}$	$\hat{a}$	mm	$M_a$	$\frac{\text{mm}}{\text{ms}^{-2}}$	$\hat{a} = M_a a$
Winkel	$\varphi$	rad	$\hat{\varphi}$	mm	$M_\varphi$	$\frac{\text{mm}}{\text{rad}}$	$\hat{\varphi} = M_\varphi \varphi$
Winkelgeschwindigkeit	$\omega$	$\text{rad s}^{-1}$	$\hat{\omega}$	mm	$M_\omega$	$\frac{\text{mm}}{\text{rads}^{-1}}$	$\hat{\omega} = M_\omega \omega$
Winkelbeschleunigung	$\alpha$	$\text{rad s}^{-2}$	$\hat{\alpha}$	mm	$M_\alpha$	$\frac{\text{mm}}{\text{rads}^{-2}}$	$\hat{\alpha} = M_\alpha \alpha$

**Beispiel:** Gegeben ist ein Weg-Zeit-Diagramm sowie die Maßstäbe  $M_s = 1 \text{ cm} / 1 \text{ m}$ ,  $M_t = 2 \text{ cm} / 1 \text{ s}$

Ges.: Weg  $s(t=1.5\text{s})$

Lös.:  $\hat{t} = 1.5 \text{ s} \cdot 2 \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 3 \text{ cm}$ ,  $\Rightarrow \hat{s} = 2.5 \text{ cm}$  aus Diagramm,  
 $s = \frac{\hat{s}}{M_s} = \frac{2.5 \text{ cm}}{1 \text{ cm} / 1 \text{ m}} = 2.5 \text{ m}$



Ges.: Geschwindigkeit v bei  $t=0 \text{ s}$ , wenn  $\gamma = 27^\circ$  aus Diagramm

Lös.:  $\tan \gamma = \frac{\Delta \hat{s}}{\Delta \hat{t}} = \frac{\Delta s M_s}{\Delta t M_t} = v \frac{M_s}{M_t} = \hat{v} = v M_v \Rightarrow M_v = \frac{M_s}{M_t}$   
 $\hat{v}(0) = 0.5$ ,  $v(0) = \hat{v}(0) \frac{1}{M_v} = \hat{v}(0) \frac{M_t}{M_s} = 0.5 \frac{2 \text{ cm} / 1 \text{ s}}{1 \text{ cm} / 1 \text{ m}} = 1 \text{ m/s}$

Sonderfall **Normalbeschleunigung** (bei graphischer Konstruktion beachten)

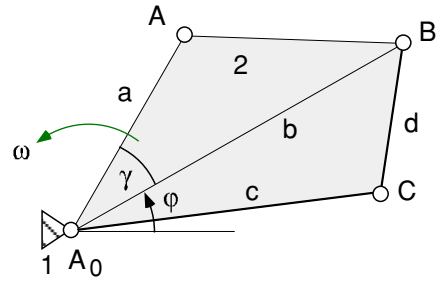
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\hat{v}^2}{M_v^2} \frac{M_s}{\hat{\rho}} = \frac{M_s}{M_v^2} \left( \frac{\hat{v}^2}{\hat{\rho}} \right) = \frac{1}{M_a} \hat{a}_n \quad \text{mit} \quad \hat{a}_n = \left( \frac{\hat{v}^2}{\hat{\rho}} \right), \quad M_a = \frac{M_v^2}{M_s}$$

Beispiel:  $M_s = 1 \text{ cm} / 1 \text{ m}$ ,  $M_v = 2 \text{ cm} / 1 \text{ m s}^{-1} \rightarrow M_a = \frac{M_v^2}{M_s} = \frac{4 \text{ cm}^2}{1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}} \frac{1 \text{ m}}{1 \text{ cm}} = \frac{4 \text{ cm}}{1 \text{ ms}^{-2}}$



### 3.4.3 Geschwindigkeitszustand einer um $A_0$ rotierenden Ebene

**Gegeben:** Starres Glied mit drei Punkten A, B, C mittels Drehgelenk in  $A_0$  gelagert. Daten: Winkel  $\varphi = 30^\circ$ ,  $\gamma = 30^\circ$ ,  
Längen  $a = 30 \text{ cm}$ ,  $b = 50 \text{ cm}$ ,  $c = 40 \text{ cm}$ ,  $d = 20 \text{ cm}$ ,  
Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \omega_{21} = 5 \text{ rad/s}$   
 $M_S = 1 \text{ mm} / 1 \text{ cm}$ ,  $M_V = 10 \text{ mm} / 1 \text{ ms}^{-1}$

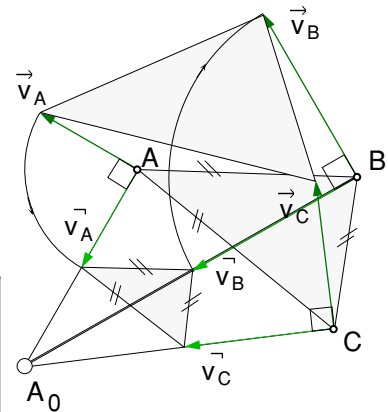


**Gesucht:** Geschwindigkeit der Punkte A, B und C

**Lösung:**

$A_0$  ist **Drehpol**  $P_{21}$  der Ebene (von Glied 2 bez. Gestell 1)  
d.h.  $A_0$  ist Geschwindigkeitspol ( $v = 0$ ) und Beschleunigungspol ( $a = 0$ )

$\vec{v} = \text{Abstand zum Geschwindigkeitspol} \cdot \omega$   
folgt:  $\omega = \frac{v_A}{a} = \frac{v_B}{b} = \frac{v_C}{c}$



$v_A = a \omega = 0.3 \cdot 5 = 1.5 \text{ m/s}$ ,  $\hat{v}_A = 15 \text{ mm}$ ,  $\vec{v}_A$  senkrecht auf  $A_0A$   
 $v_B = b \omega = 0.5 \cdot 5 = 2.5 \text{ m/s}$ ,  $\hat{v}_B = 25 \text{ mm}$ ,  $\vec{v}_B$  senkrecht auf  $A_0B$   
 $v_C = c \omega = 0.4 \cdot 5 = 2.0 \text{ m/s}$ ,  $\hat{v}_C = 20 \text{ mm}$ ,  $\vec{v}_C$  senkrecht auf  $A_0C$

**Konstruktion mit um  $90^\circ$  gedrehten Geschwindigkeiten:**

Die um  $90^\circ$  gedrehten Geschwindigkeiten zeigen zum Geschwindigkeitspol oder entgegengesetzt

1. Berechne  $v_A$  und zeichne  $\vec{v}_A$  und  $\vec{v}_A$
2.  $\vec{v}_B$  aus II zu AB in  $\vec{v}_A$  mit Schnitt  $BA_0$ , zurückdrehen ergibt  $\vec{v}_B$ ,  
messe ab  $\hat{v}_B = 25 \text{ mm}$ ,  $\rightarrow v_B = \hat{v}_B / M_V = 25 / 10 = \underline{\underline{2.5 \text{ m/s}}}$
3.  $\vec{v}_C$  aus II zu AC in  $\vec{v}_A$  und II zu BC in  $\vec{v}_B$ ,  
oder  $\vec{v}_C$  aus II zu BC in  $\vec{v}_B$  mit Schnitt  $CA_0$ , zurückdrehen ergibt  $\vec{v}_C$   
messe ab  $\hat{v}_C = 20 \text{ mm}$ ,  $\rightarrow v_C = \hat{v}_C / M_V = 20 / 10 = \underline{\underline{2.0 \text{ m/s}}}$

**Merke:**

1. Sind für einen starren Körper der Geschwindigkeitspol (d.h. Drehpol oder Momentanpol) und die Geschwindigkeit eines Punktes gegeben, ergibt sich die Geschwindigkeit eines weiteren Punktes aus der Ähnlichkeit der Figur:

Z.B. starrer Körper mit Punkte  $A_0, A, B, C$  und mit Geschwindigkeit  $v_A$ :

$$\Delta A_0AB \sim \Delta A_0 \text{ Spitze}(\vec{v}_A \vec{v}_B), \quad \Delta A_0BC \sim \Delta A_0 \text{ Spitze}(\vec{v}_B \vec{v}_C), \quad \Delta A_0AC \sim \Delta A_0 \text{ Spitze}(\vec{v}_A \vec{v}_C)$$

2. Satz von Burmester: Die Endpunkte der Geschwindigkeiten starrer Körper bilden eine dem Körper gleichsinnig ähnliche Figur!

D. h.: Sind für einen starren Körper die Geschwindigkeiten zweier Punkte gegeben, so ergibt sich die Geschwindigkeit weiterer Punkte aus der Ähnlichkeit der Figur

Z.B. starrer Körper mit Punkte  $A_0, A, B, C$  und mit gegebenen Geschwindigkeiten  $v_A, v_B$ :

$$\Delta ABC \sim \Delta \text{ Spitze}(\vec{v}_A \vec{v}_B \vec{v}_C) \sim \Delta \text{ Spitze}(\vec{v}_A \vec{v}_B \vec{v}_C)$$

### 3.4.4 Geschwindigkeitszustand einer bewegten Ebene in der Ebene

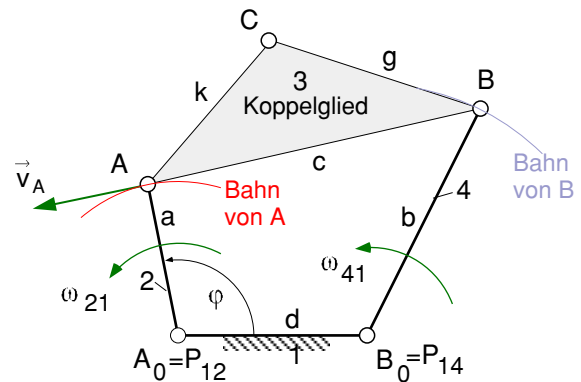
#### Beispiel Kurbelschwinge

**Gegeben:** Kurbelschwinge mit Koppelpunkt C,  
Geschwindigkeit  $\vec{v}_A$  von A, Maßstäbe  $M_S$ ,  $M_V$

**Gesucht:** Geschwindigkeit der Punkte B und C

**Lösung:**

☞ Koppelglied 3 stellt eine bewegte Ebene dar.



☞ Koppelglied 3 besitzt Punkte A und B, die mit denen der Nachbarglieder 2 und 4 identisch sind:

$v_{A\text{-Glieder 3}} \equiv v_{A\text{-Glieder 2}}$	$v_{B\text{-Glieder 3}} \equiv v_{B\text{-Glieder 4}}$
--	--

- $\vec{v}_A$  ist Geschwindigkeit von Punkt A des Gliedes 2 bez. Gestell 1 mit  $A_0$  als Drehpol  $P_{21}$  von 2 gegenüber 1, siehe 3.4.3:  
--> berechne  $v_A = \omega_{21} a$  und zeichne  $\vec{v}_A$  ein
- $\vec{v}_B$  ist Geschwindigkeit von Punkt B des Gliedes 3 bez. Gestell 1 mit  $B_0$  als Drehpol  $P_{41}$  von 4 gegenüber 1:  
--> hätte man  $\omega_{41}$  = Winkelgeschwindigkeit von 4 bez. 1, könnte man  $v_B = \omega_{41} b$  bestimmen.

☞ **Verwende den Momentanpol  $P_{31}$  der Ebene 3 bez. 1**  
oder **Relativgeschwindigkeit**

## Geschwindigkeitspole (Drehpole und Momentanpole) eines Getriebes

- ☞ Jede beliebige Elementarbewegung einer Ebene ist eine Drehung um den Geschwindigkeitspol.  
Für den Punkt einer Ebene, der als Pol betrachtet wird, gilt:  $\vec{v}_{Pol} \equiv 0$
- Das gilt für Drehpole wie auch für Momentanpole, vgl. 3.4.2
- ☞ Momentanpol  $P_{31}$  von 3 gegenüber 1 liegt im Schnitt der Bahnnormalen von A und B, d.h. Geraden  $AA_0$  und  $BB_0$

### Allgemeine Definitionen:

- ☞ **Drei Pole dreier Ebenen liegen auf einer Geraden**, (Kennedy Theorem)

z.B. Ebenen (Glieder) 1, 2, 3 mit  
Polen  $P_{31}$   $P_{21}$   $P_{32}$

(Jede Ziffer ist doppelt vertreten)

- ☞ **Schema der 6 Pole**,

auch **Relativpole** genannt,  
am Viergelenkgetriebe ( $P_{ij} = P_{ji}$ )

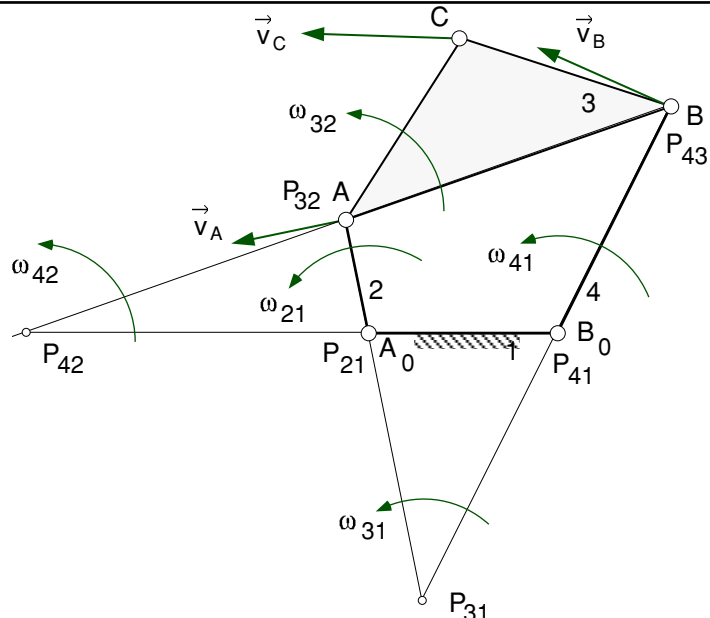
12    13    14

23    24

34

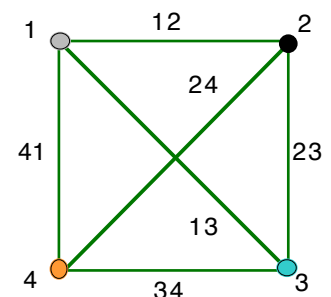
mit **Drehpolen**  $P_{12}$ ,  $P_{14}$ ,  $P_{23}$ ,  $P_{34}$

und **Momentanpolen**  $P_{13}$ ,  $P_{24}$



- ☞ **Polgraph mit Ecken als Glieder und Linien als Geschw.Pole.**

Hat ein Mechanismus 4 Glieder, so bilden die Kanten des 4-Ecks die Drehpole und die Diagonalen die Momentanpole!



## Beziehungen der (Relativ-) Winkelgeschwindigkeiten

z.B. von Ebene 3 gegenüber 1 mit Momentanpol  $P_{31}$ :

$$\bar{\omega}_{31} = \bar{\omega}_{32} + \bar{\omega}_{21} \quad \text{oder} \quad \bar{\omega}_{32} + \bar{\omega}_{21} + \bar{\omega}_{13} = 0 \quad \text{mit} \quad \bar{\omega}_{13} = -\bar{\omega}_{31}$$

$\bar{\omega}_{32}$  ist Winkelgeschwindigkeit von 3 bez. 2 mit Drehpol  $P_{32}$

**Beachte:** Formel gilt für gleichen Drehsinn der Winkelgeschwindigkeiten, siehe ob. Bild

- ☞ **Anwendungen:**

1. Bestimmung von Winkelgeschwindigkeiten:  $\omega_{31} = v_A / AP_{31} = v_B / BP_{31} = v_C / CP_{31}$

2. Geschwindigkeit eines Punktes zweier benachbarter Ebenen: z.B. Punkt A:

$$v_A = \text{Strecke } (P_{32}P_{21}) \cdot \omega_{21} = \text{Strecke } (P_{32}P_{31}) \cdot \omega_{31}$$

3. Bestimmung von Übersetzungsverhältnissen: z.B.  $i_{42}$

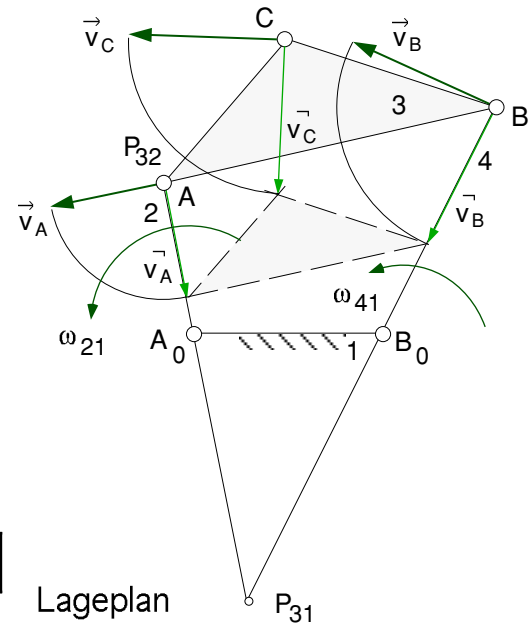
$$v_{P42} = \overline{P_{21}P_{42}} \omega_{21} = \overline{P_{41}P_{42}} \omega_{41} \quad \longrightarrow \quad i_{42} = \frac{\omega_{41}}{\omega_{21}} = \frac{\overline{P_{21}P_{42}}}{\overline{P_{41}P_{42}}}$$

## Konstruktion des Geschwindigkeitszustandes

- Lageplan mit gedrehten Geschwindigkeiten gemäß Abschn. 3.4.3,
- Anwendung Satz von Burmester):

1. Bestimme  $v_A$  aus  $v_A = a \omega_{21}$  und zeichne  $\vec{v}_A$  bzw.  $\vec{v}_A$  ein,
2.  $\vec{v}_B$  aus II zu AB in  $\vec{v}_A$  mit Schnitt  $-B-B_0$ , zurückdrehen ergibt  $\vec{v}_B$
3.  $\vec{v}_C$  aus II zu AC in  $\vec{v}_A$  und II zu  $-B-C$  in  $\vec{v}_C$ , zurückdrehen ergibt  $\vec{v}_C$
4. Strecken abmessen und mit Maßstab  $M_v$  auf wahre Geschwindigkeiten umrechnen.
5. Bestimme  $\omega_{41}$  aus  $v_B = b \omega_{41}$

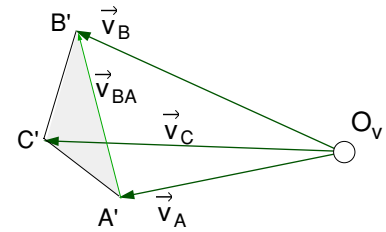
Es gilt:  $\triangle ABC \sim \triangle(\text{Spitze } \vec{v}_A \vec{v}_B \vec{v}_C)$





## Geschwindigkeitsplan:

- ☞ Er enthält alle Geschwindigkeiten von Punkten einer Ebene, in Punkt  $O_v$  angetragen,  
z.B. für Glied 3



*Satz von Burmester: Die Endpunkte der Geschwindigkeitsvektoren im Geschwindigkeitsplan eines starren Körpers bilden eine dem Körper gleichsinnig ähnliche Figur.*

Z.B.  $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$

## Relativgeschwindigkeit

- ☞ Position von B bez.  $A_0$ , vgl. Lageplan:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{BA}$$

Geschwindigkeit von B des Gliedes 3 bez. Gestell:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

mit  $\vec{v}_{BA}$  als **Relativgeschwindigkeit** von B gegenüber A ,

siehe Geschwindigkeitsplan.

**Beachte:**  $\vec{v}_{BA}$  steht senkrecht auf AB,  $v_{BA} = \omega_{31} c$  mit  $\omega_{31} = \omega_{32} + \omega_{21}$

## Übung 3.4: Kurbelschwinge aus Abschnitt 3.3.2:

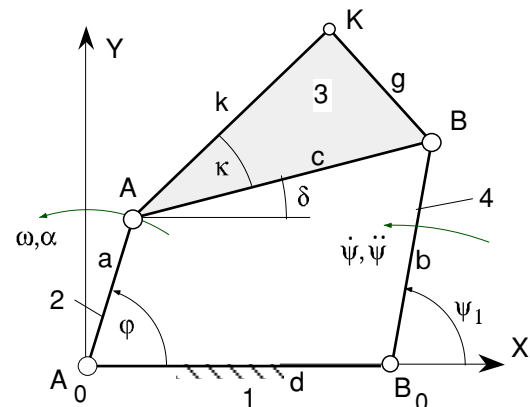
$$a = 2 \text{ cm}, b = 3 \text{ cm}, c = 4 \text{ cm}, d = 4 \text{ cm},$$

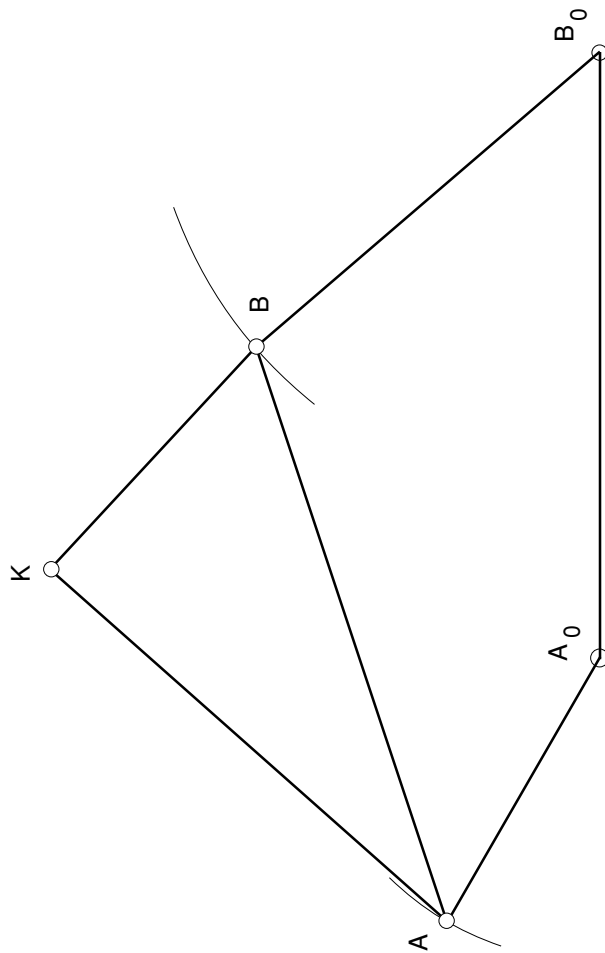
$$k = 3.5 \text{ cm}, \kappa = 30^\circ, g = 2.0 \text{ cm},$$

$$\varphi = 150^\circ, \omega = 1 \text{ rad/s},$$

$$M_S = 2 \text{ cm} / 1 \text{ cm}, M_V = 3 \text{ cm} / 1 \text{ cm s}^{-1},$$

Bestimme alle Größen einer Geschwindigkeitsanalyse.





### 3.5 Graphische Ermittlung des Beschleunigungen ebener Getriebe

#### 3.5.1 Beschleunigungszustand einer um A<sub>0</sub> rotierenden Ebene

**Gegeben:** Starres Glied mit drei Punkten A, B, C mittels

Drehgelenk in A<sub>0</sub> gelagert, vgl. 3.4.3.

Daten:  $\varphi = 30^\circ$ ,  $\gamma = 30^\circ$ , Längen  $a = 30$  cm,  $b = 50$  cm,  $c = 40$  cm,  $d = 20$  cm, Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \omega_{21} = 5$  rad/s, Winkelbeschleunigung  $\alpha = \alpha_{21} = \dot{\omega} = 40$  rad/s<sup>2</sup>,

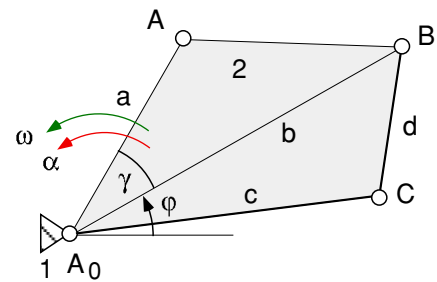
$M_s = 1$  mm / 1 cm = 100 mm / 1 m;  $M_v = 10$  mm / 1 ms<sup>-1</sup>

**Gesucht:** Beschleunigung der Punkte A, B und C

**Lösung:**

☞ Geschwindigkeiten wurden bereits in Abschnitt 3.4 bestimmt.

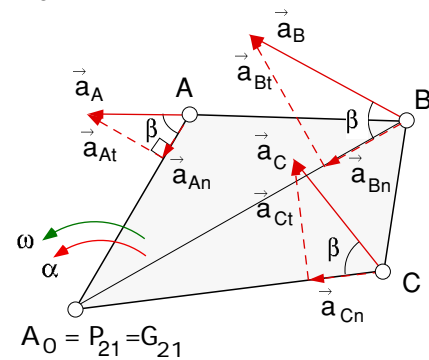
☞ Da A<sub>0</sub> Drehpol der Ebene, ist A<sub>0</sub> Beschleunigungspol G<sub>21</sub> mit  $a_{P01} = 0$



**Auswertung:**

#### 1. Beschleunigungsmaßstab

$$M_a = \frac{M_v^2}{M_s} = \frac{10^2 \text{ mm}^2}{1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}} \cdot \frac{1 \text{ m}}{100 \text{ mm}} = \frac{1 \text{ mm}}{1 \text{ ms}^{-2}}$$



#### 2. Beschleunigung von A:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{An} + \vec{a}_{At} \text{ mit}$$

Normalbeschleunigung

$$a_{An} = a \omega^2 = v_A^2 / a = 0.3 \cdot 25 = 7.5 \text{ m/s}^2,$$

$$\hat{a}_{An} = 7.5 \text{ mm}, \quad \vec{a}_{An} \parallel AA_0, \text{ zeigt von A nach } A_0,$$

Tangentialbeschleunigung

$$a_{At} = a \alpha = 0.3 \cdot 40 = 12 \text{ m/s}^2, \quad \hat{a}_{At} = 12 \text{ mm}, \quad \vec{a}_{At} \perp AA_0$$

$$\text{Gesamtbeschleunigung } a_A = \sqrt{a_{An}^2 + a_{At}^2} = a \sqrt{\omega^4 + \alpha^2} = 0.3 \sqrt{5^4 + 40^2} = 14.1 \text{ m/s}^2, \quad \hat{a}_A = 14 \text{ mm}$$

$$\text{Beschleunigungswinkel } a_{At} / a_{An} = \tan \beta = \alpha / \omega^2 = 40 / 25 = 1.6 \rightarrow \beta = 58^\circ$$

#### 3. Beschleunigung von B: in Analogie zu A: $\vec{a}_B = \vec{a}_{Bn} + \vec{a}_{Bt}$ mit

$$a_{Bn} = b \omega^2 = 0.5 \cdot 25 = 12.5 \text{ m/s}^2, \quad \hat{a}_{Bn} = 12.5 \text{ mm}, \quad \vec{a}_{Bn} \text{ von B nach } A_0$$

$$a_{Bt} = b \alpha = 0.5 \cdot 40 = 20 \text{ m/s}^2, \quad \hat{a}_{Bt} = 20 \text{ mm}, \quad \vec{a}_{Bt} \perp BA_0$$

$$a_B = b \sqrt{\omega^4 + \alpha^2} = 0.5 \sqrt{5^4 + 40^2} = 23.6 \text{ m/s}^2, \quad \hat{a}_B = 23.6 \text{ mm}$$

#### 4. Beschleunigung von C: in Analogie zu A: $\vec{a}_C = \vec{a}_{Cn} + \vec{a}_{Ct}$ mit

$$a_{Cn} = c \omega^2 = 0.4 \cdot 25 = 10 \text{ m/s}^2, \quad \hat{a}_{Cn} = 10 \text{ mm}, \quad \vec{a}_{Cn} \text{ von C nach } A_0$$

$$a_{Ct} = c \alpha = 0.4 \cdot 40 = 16 \text{ m/s}^2, \quad \hat{a}_{Ct} = 16 \text{ mm}, \quad \vec{a}_{Ct} \perp CA_0$$

$$a_C = c \sqrt{\omega^4 + \alpha^2} = 0.4 \sqrt{5^4 + 40^2} = 18.9 \text{ m/s}^2, \quad \hat{a}_C = 19 \text{ mm}$$

☞ Beschleunigung beliebiger Punkte eines Körpers 2, wenn G<sub>21</sub> bekannt ist:

$$a_n = \text{Abstand zu } G_{21} \cdot \omega^2; \quad a_t = \text{Abstand zu } G_{21} \cdot \alpha$$

$$\text{folgt: } \omega^2 = \frac{a_{An}}{a} = \frac{a_{Bn}}{b} = \frac{a_{Cn}}{c}, \quad \alpha = \frac{a_{At}}{a} = \frac{a_{Bt}}{b} = \frac{a_{Ct}}{c}, \quad \sqrt{\omega^4 + \alpha^2} = \frac{a_A}{a} = \frac{a_B}{b} = \frac{a_C}{c}$$

### Konstruktion der Normalbeschleunigung mit Kathetensatz oder nach Grübler

### Kathetensatz:

**Normalbeschleunigung**  $a_n = v^2 / \rho$

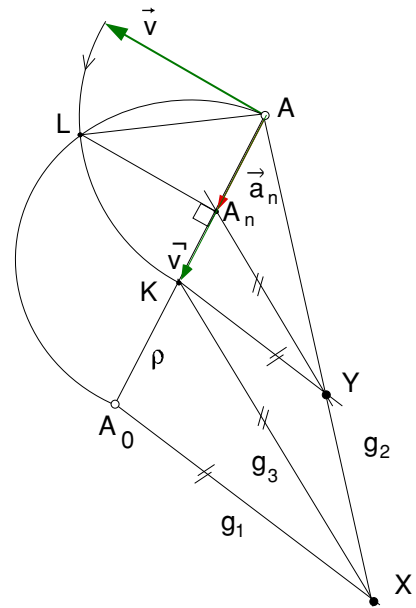
Strecken  $AA_n \cdot AA_0 = (AL)^2 \quad \rightarrow \quad a_n \rho = v^2$

### Konstruktion:

1. Halbkreis an  $AA_0$ ,
2. Kreisbogen von  $v$  schneidet Halbkreis in  $L$ ,
3. Lot auf  $AA_0$  liefert Punkt  $A_n$

$\vec{a}_n$  ist Vektor von A nach  $A_n$

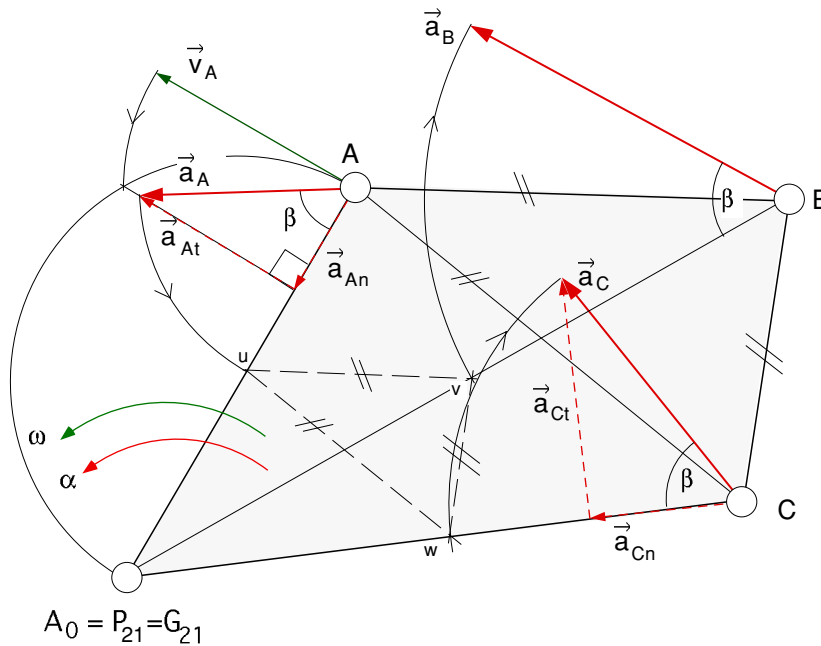
**Merke:** Falls  $\hat{v} = \rho \rightarrow \hat{a}_n = \rho$



**Grübler-Konstruktion, falls  $\hat{v} > \rho$**

1. beliebige Geraden  $g_1$  in  $A_0$  und  $g_2$  in  $A$  schneiden sich in  $X$ ,
2. Gerade  $g_3$  durch  $K$  und  $X$ ,
3. Parallele zu  $g_1$  durch  $K$  schneidet  $g_2$  in  $Y$
4. Parallele zu  $g_3$  durch  $Y$  schneidet  $AA_0$  in  $A_n$  und liefert  $a_n$

## Konstruktion des Beschleunigungszustandes der rotierenden Ebene



Im Bild alle Längen  $\times 1/2$

1. Geschwindigkeit  $\vec{v}_A$  nach Abschnitt 3.4.3
2. Normalbeschleunigung von A mit Hilfe des Kathetensatzes:  $\hat{a}_{An} = 8 \text{ mm}$ ,  $a_{An} = 8 \text{ m/s}^2$
3. Tangentialbeschleunigung von A mit  $\alpha$  liefert  

$$a_{At} = a \alpha = 0.3 \cdot 40 = 12 \text{ m/s}^2, \quad \hat{a}_{At} = 12 \text{ mm},$$

4. Zusammenfassung liefert  $\vec{a}_A = \vec{a}_{An} + \vec{a}_{At}$   
Ergebnis:  $\hat{a}_A = 14 \text{ mm} \rightarrow a_A = \hat{a}_A / M_a = 14 \text{ m/s}^2$   
Winkel  $\tan \beta = \alpha / \omega^2 \rightarrow \beta = 58^\circ$

5. **Beschleunigung von B** aus  
 um  $\beta$  gedrehte Beschleunigung  $\vec{a}_A$  in Richtung  $AA_0$  ergibt u,  
 || zu AB in u mit Schnitt  $BA_0$  ergibt v,  
 zurückdrehen um Winkel  $\beta$  ergibt  $\vec{a}_B$   
Ergebnis:  $\hat{a}_B = 24 \text{ mm}$  -->  $a_B = 24 \text{ m/s}^2$

6. **Beschleunigung von C** aus  
 II zu AC in u und II zu BC in v ergibt w, oder II zu BC in v mit Schnitt CA<sub>0</sub> ergibt w,  
 zurückdrehen um Winkel β ergibt  $\bar{a}_C$   
Ergebnis:  $\hat{a}_C = 19 \text{ mm}$  -->  $a_C = 19 \text{ m/s}^2$

Merke: Werte  $\omega$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  gelten für alle Punkte eines starren Körpers. Bei mehreren Körpern Indices nutzen!

**Merke:**

1. Sind für einen starren Körper der Beschleunigungspol (d.h. Drehpol z.B.  $A_0$  oder der momentane Beschleunigungspol  $G$ ) und die Beschleunigung eines Punktes gegeben, ergibt sich die Beschleunigung eines weiteren Punktes aus der Ähnlichkeit der Figur. Die Figuren sind gleichsinnig ähnlich.

Z.B. starrer Körper mit Punkte  $G, A, B, C$  und mit Beschleunigung  $\vec{a}_A$ :

$$\begin{aligned} \Delta GAB &\sim \Delta G \text{ Spitze der um } \beta \text{ gedrehten Beschleunigungen. } (\vec{a}_A, \vec{a}_B), \\ \Delta GBC &\sim \Delta G \text{ Spitze der um } \beta \text{ gedrehten Beschleunigungen. } (\vec{a}_B, \vec{a}_C) \end{aligned}$$

2. Die Spitzen der Normalbeschleunigungen bilden eine dem starren Körper ähnliche und gleichsinnige Figur:

Z.B. starrer Körper mit Punkte  $G, A, B, C$

$$\Delta GAB \sim \Delta G \text{ Spitze } (\vec{a}_{An}, \vec{a}_{Bn}), \quad \Delta GBC \sim \Delta G \text{ Spitze } (\vec{a}_{Bn}, \vec{a}_{Cn})$$

3. Satz von Burmester: Die Endpunkte der Beschleunigungen starrer Körper bilden eine dem Körper gleichsinnig ähnliche Figur!

D. h.: Sind für einen starren Körper die Beschleunigungen zweier Punkte gegeben, so ergibt sich die Beschleunigung weiterer Punkte aus der Ähnlichkeit der Figur

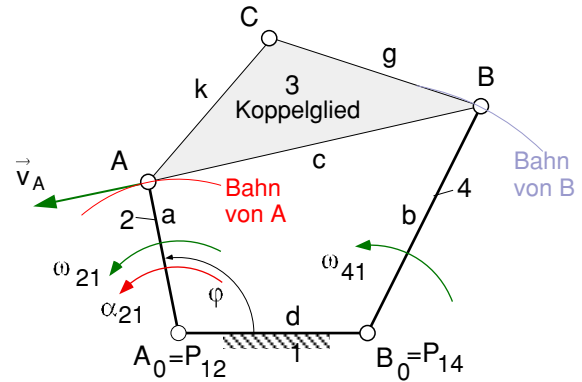
Z.B. starrer Körper mit Punkte  $A, B, C$  und mit gegebenen Beschleunigungen  $\vec{a}_A, \vec{a}_B$ :

$$\Delta ABC \sim \Delta \text{ Spitze } (\vec{a}_A, \vec{a}_B, \vec{a}_C) \sim \Delta \text{ Spitze der um } \beta \text{ gedrehten Beschl. } (\vec{a}_A, \vec{a}_B, \vec{a}_C)$$

### 3.5.2 Beschleunigungszustand einer bewegten Ebene in der Ebene

#### Beispiel Kurbelschwinge

**Gegeben:** Kurbelschwinge mit Koppelpunkt C,  
Geschwindigkeit  $\vec{v}_A$  von A, bzw.  $\omega_{21} = \omega$ ,  
Winkelbeschleunigung  $\alpha = \alpha_{21}$  von Glied 2,  
Maßstäbe  $M_S, M_V$



**Gesucht:** Beschleunigung der Punkte A, B und C

#### Lösung:

☞ Koppelglied 3 stellt eine bewegte Ebene dar.

☞ Koppelglied 3 besitzt Punkte A und B, die mit denen der Nachbarglieder 2 und 4 identisch sind:

Beschleunigungen	$a_{A-\text{Glieder 3}} \equiv a_{A-\text{Glieder 2}}; \quad a_{B-\text{Glieder 3}} \equiv a_{B-\text{Glieder 4}}$
------------------	--

1.  $\vec{a}_A$  ist Beschleunigung von Punkt A des Gliedes 2 bez. Gestell 1 mit  $A_0$  als Drehpol  $P_{21}$  von 2 gegenüber 1:

--> berechne  $a_{At} = \alpha_{21} a$ ,  $a_{An} = \omega_{21}^2 a = v_A^2 / a$ ,  $a_A = \sqrt{a_{An}^2 + a_{At}^2}$   
 $\tan \beta_{21} = \alpha_{21} / \omega_{21}^2$  und zeichne  $\vec{a}_A$  ein

2.  $\vec{a}_B$  ist Beschleunigung von Punkt B des Gliedes 3 bez. Gestell 1 mit  $B_0$  als Drehpol  $P_{41}$  von 4 gegenüber 1:

--> da der Geschwindigkeitszustand bereits bekannt ist, berechne  $a_{Bn} = \omega_{41}^2 b = v_B^2 / b$

--> hätte man  $\alpha_{41}$  = Winkelbeschleunigung von 4 bez. 1,

könnte man  $a_{Bt} = \alpha_{41} b$ ,  $a_B = \sqrt{a_{Bn}^2 + a_{Bt}^2}$ ,  $\tan \beta_{41} = \alpha_{41} / \omega_{41}^2$  bestimmen  
 und  $\vec{a}_B$  einzeichnen.

☞ **Verwende Relativbeschleunigung – Beschleunigungspol  $G_{31}$  ist noch nicht bekannt!**

## Relativbeschleunigung des Punktes B bez. A des Gliedes 3

Position von B:  $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{BA}$

Geschwindigkeit von B:  $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$

Beschleunigung von B:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$$

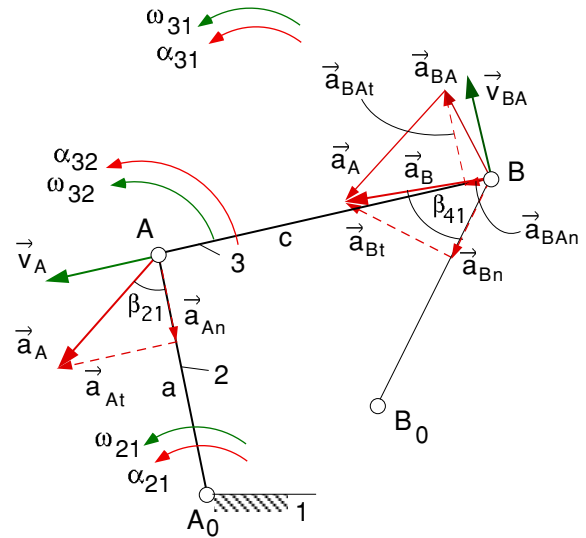
$$\vec{a}_{Bn} + \vec{a}_{Bt} = \vec{a}_{An} + \vec{a}_{At} + \vec{a}_{BA n} + \vec{a}_{BA t}$$

mit  $\vec{a}_{BA}$  als **Relativbeschleunigung** von B gegenüber A ,

$$a_{BA t} = \alpha_{31} c, \quad a_{BA n} = \omega_{31}^2 c = v_{BA}^2 / c, \quad a_{BA} = \sqrt{a_{BA n}^2 + a_{BA t}^2}, \quad \tan \beta_{31} = \alpha_{31} / \omega_{31}^2$$

und mit  $\omega_{31} = \omega_{21} + \omega_{32}$  und  $\alpha_{31} = \alpha_{21} + \alpha_{32}$  (-> Vorzeichenrichtig)

$\vec{a}_{BA t}$  steht senkrecht auf AB und || zu  $\vec{v}_{BA}$ ,  $\vec{a}_{BA n}$  zeigt von B nach A



mit  $\vec{a}_A$  und  $\vec{a}_{Bn}$  und  $\vec{a}_{BA n}$  sowie den Richtungen der Tangentialbeschleunigungen  $\vec{a}_{Bt}$  und  $\vec{a}_{BA t}$  läßt sich die **Vektorgleichung der Beschleunigung für B graphisch konstruieren**



## Konstruktion der Beschleunigungen

1.  $\vec{a}_{An}$  aus  $A_0A$  und  $\vec{v}_A$  (Kathetensatz 5.5.1)
2.  $a_{At} = \alpha_{21} a$  berechnen,  
 $\hat{a}_{At} = a_{At} M_a$  antragen  $\perp A_0A$ ,
3. Zusammenfassung liefert  $\vec{a}_A$  und  $\beta_{21}$
3.  $\vec{v}_B$  aus II zu AB in  $\vec{v}_A$  mit Schnitt  $BB_0$
4.  $\vec{a}_{Bn}$  aus  $B_0B$  und  $\vec{v}_B$  (Kathetensatz 5.5.1)
5.  $\vec{v}_{BA}$  aus II zu  $AA_0$  durch  $\vec{v}_B$  mit Schnitt AB
6.  $\vec{a}_{BA n}$  aus AB und  $\vec{v}_{BA}$  (Kathetensatz 5.5.1)

7.  $\vec{a}_B$  aus Vektorgleichung

$$\vec{a}_{Bt} + \vec{a}_{Bn} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA t} + \vec{a}_{BA n},$$

dargestellt im **Beschleunigungsplan** mit Ursprung  $O_a$ :

Beschleunigungen  $\vec{a}_A$ ,  $\vec{a}_{BA n}$ ,  $\vec{a}_{Bn}$  antragen sowie die Richtungen von  $\vec{a}_{Bt}$  und  $\vec{a}_{BA t}$  zum Schnitt bringen, Schnittpunkt ist Spitze  $\vec{a}_B$ ,

$\hat{a}_B$  ausmessen und  $a_B = \hat{a}_B / M_a$  berechnen

8. **Winkelbeschleunigung  $\alpha_{41}$  von Glied 4 bez. 1:**

$$\alpha_{41} = a_{Bt} / b$$

9. **Winkelbeschleunigung  $\alpha_{31}$  von Glied 3 bez. 1:**

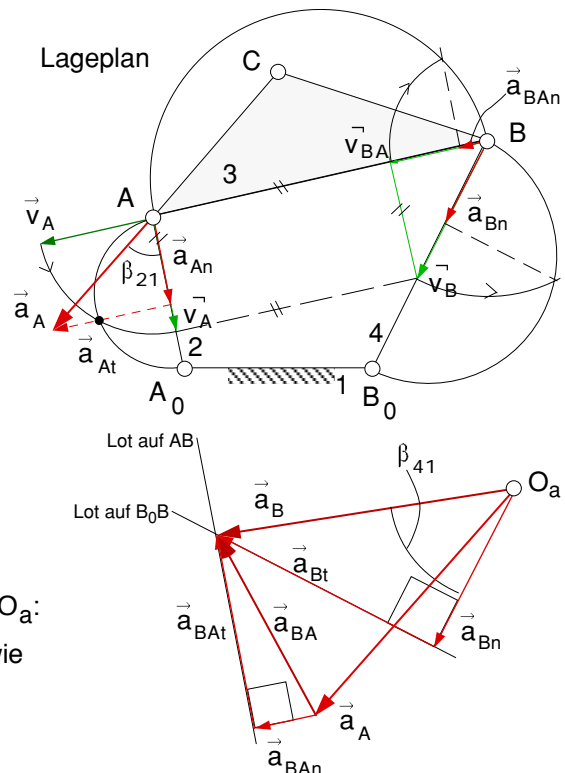
$$\alpha_{31} = a_{BA t} / c$$

10. **Beschleunigung  $\vec{a}_C$  von C gemäß**

*Satz von Mehmke: Die Endpunkte der Beschleunigungsvektoren im Beschleunigungsplan eines starren Körpers bilden eine dem Körper gleichsinnig ähnliche Figur.*

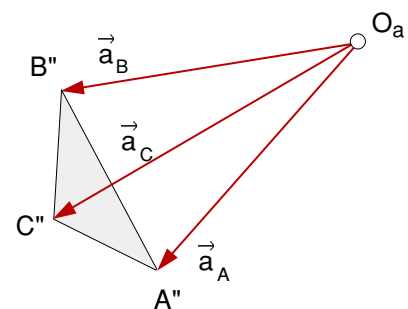
Z.B.  $\Delta ABC \sim \Delta A''B''C''$

oder mit Hilfe des **Beschleunigungspols**



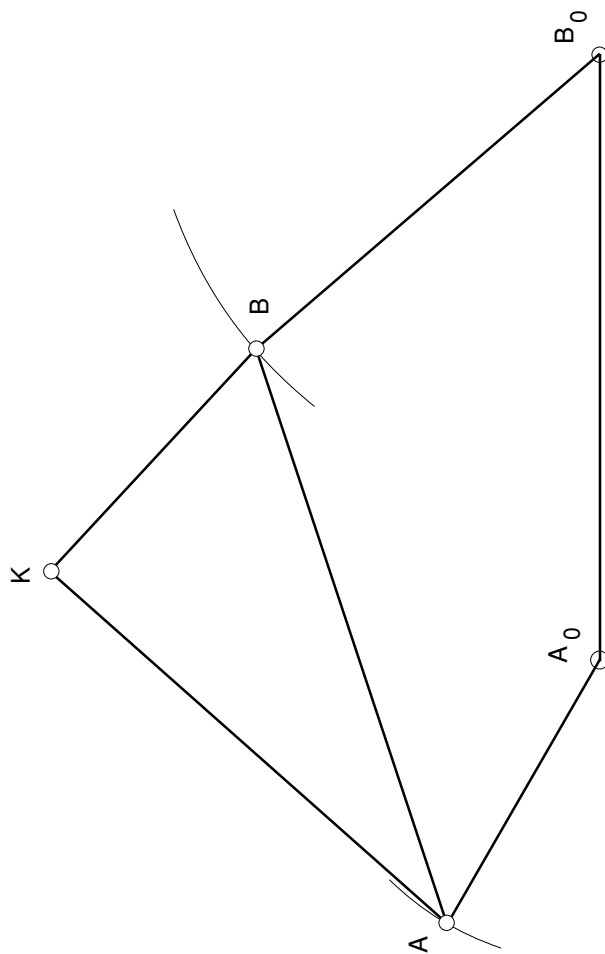
Beschleunigungsplan

Alle Längen  $\times 1/2$



Alle Längen  $\times 1/2$



$O_a^\circ$ 



**Lösung: Vektorendarstellung (Koordinatendarstellung siehe Abschn. 3.2.1)****Orientierung der Ebene 3 (System 3)**bez.  $E_1$  (System 1) unter

Verwendung von des Systems 2

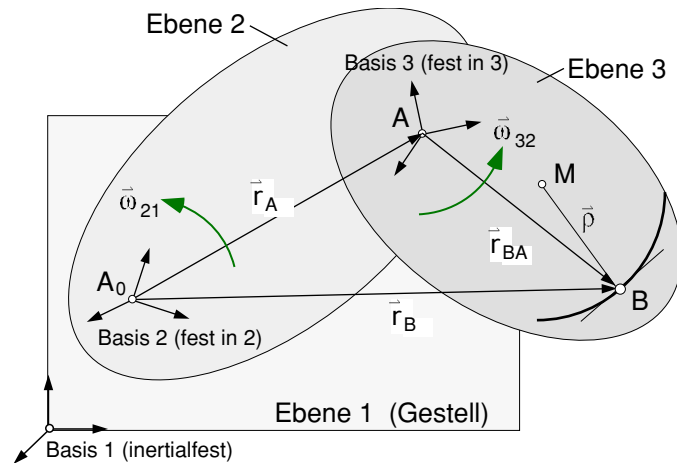
$$\mathbf{A}^{13} = \mathbf{A}^{12} \mathbf{A}^{23} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}^{21} = \mathbf{A}^{12\top}$$

**Winkelgeschwindigkeit**von  $E_3$  bez.  $E_1$ :

$$\vec{\omega}_{31} = \vec{\omega}_{32} + \vec{\omega}_{21}$$

**Winkelbeschleunigung**von  $E_3$  bez.  $E_1$ :

$$\vec{\alpha}_{31} = \vec{\alpha}_{32} + \vec{\alpha}_{21}$$

**Position** des Punktes B bez. Ursprung  $A_0$  von  $E_1$  unter Verwendung des Bezugspunktes A:

$$\vec{r}_{B0} = \vec{r}_B = \vec{r}_{BA} + \vec{r}_{A0} = \vec{r}_A + \vec{r}_{BA}$$

**Geschwindigkeit** von B bez.  $E_1$ : (° bezeichnet relative Ableitung in  $E_3$ )

$$\begin{aligned} \vec{v}_B = \dot{\vec{r}}_B &= \dot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{r}}_{BA} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{31} \times \vec{r}_{BA} + \overset{\circ}{\vec{r}}_{BA} \\ &= \vec{v}_A + \vec{v}_{BAf} + \vec{v}_{BAr} \end{aligned} \quad \text{mit}$$

 $\vec{v}_A$  als bekannte Geschwindigkeit des Bezugspunktes A,

$$\vec{v}_A \perp AA_0$$

 $\vec{v}_{BAf}$  als relative Führgeschwindigkeit infolge der Rotation von Ebene 3,  $\vec{v}_{BAf} \perp BA$ ,  $v_{BAf} = \omega_{31} r_{BA}$  $\vec{v}_{BAr}$  als Relativgeschwindigkeit von B infolge der Gleitbewegung,  $\vec{v}_{BAr}$  tangential zur Gleitbahn**Beschleunigung** von B bez.  $E_1$ :

$$\begin{aligned} \vec{a}_B = \ddot{\vec{r}}_B &= \ddot{\vec{r}}_A + \ddot{\vec{r}}_{BA} = \vec{a}_A + \vec{\omega}_{31} \times \vec{\omega}_{31} \times \vec{r}_{BA} + \overset{\circ\circ}{\vec{\omega}}_{31} \times \vec{r}_{BA} + \overset{\circ}{\vec{r}}_{BA} + 2\vec{\omega}_{31} \times \overset{\circ}{\vec{r}}_{BA} \quad \text{mit} \\ &= \vec{a}_A + \vec{a}_{BAN} + \vec{a}_{BAAt} + \vec{a}_{BAAr} + \vec{a}_{BAc} \end{aligned}$$

 $\vec{a}_A$  als bekannte Beschleunigung des Bezugspunktes A,

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{An} + \vec{a}_{At}$$

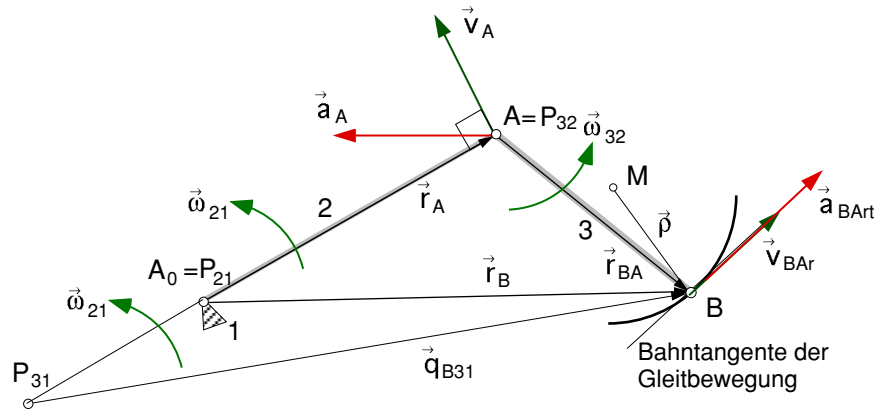
 $\vec{a}_{BAN}$  als Normalbeschleunigung von B gegenüber A,  $\vec{a}_{BAN} \parallel$  zu BA,  $a_{BAN} = \omega_{31}^2 r_{BA} = v_{BA}^2 / r_{BA}$  $\vec{a}_{BAAt}$  als Tangentialbeschleunigung von B gegenüber A,

$$\vec{a}_{BAAt} \perp AB, \quad a_{BAAt} = \alpha_{31} r_{BA}$$

 $\vec{a}_{BAAr}$  als Relativbeschleunigung von B infolge der Gleitbewegung,  $\vec{a}_{BAAr}$  tangential zur Gleitbahnfalls Gleitbahn **gekrümmt**, --> noch relative Normalbeschleunigung,  $\vec{a}_{BAAn} \parallel$  BM,  $a_{BAAn} = v_{BAr}^2 / \rho$  $\vec{a}_{BAc}$  als Coriolisbeschleunigung infolge  $\vec{v}_{BAr}$ ,  $\vec{a}_{BAc} \perp \vec{v}_{BAr}$  &  $\vec{\omega}_{31}$ ,  $a_{BAc} = 2 \omega_{31} v_{BAr}$

## Geschwindigkeit- und Beschleunigungsplan

**Lageplan**  $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{BA}$



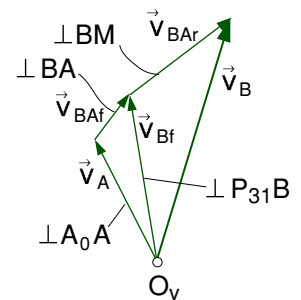
**Geschwindigkeitsplan**

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BAf} + \vec{v}_{BAr}$$

mit

$$\vec{v}_{Bf} = \vec{v}_A + \vec{v}_{BAf}, \quad v_{Bf} = \omega_{31} q_{B31}, \text{ vgl. Abschn. 3.4.2,}$$

$$\omega_{31} = \omega_{21} + \omega_{32}.$$



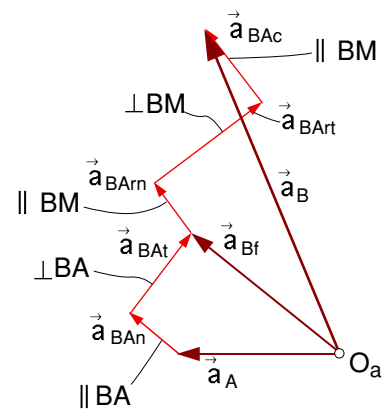
**Beschleunigungsplan**

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BAAn} + \vec{a}_{BAAt} + (\vec{a}_{BAAn}) + \vec{a}_{BAAt} + \vec{a}_{BAc}$$

mit

$$\vec{a}_{Bf} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BAAn} + \vec{a}_{BAAt}$$

$$\alpha_{31} = \alpha_{21} + \alpha_{32}.$$



**Übung 3.6: Graphische Analyse der schwingenden, zentrischen Kurbelschleife**

**Gegeben:** Die Kurbelschleife besteht aus einer Kurbel (Glieder 2) mit Radius  $a$ , einer Koppel (Glieder 3), einem Gleitstein (Glieder 4) sowie dem Gestell (Glieder 1).

Kurbel und Gleitstein sind mit Drehgelenken in  $A_0$  und  $B_0$  mit dem Gestell verbunden,

der Abstand beträgt  $d$ .

Die Kurbelschleife wird an der Kurbel mit Winkel  $\varphi = \varphi_{21}$ , Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \dot{\varphi}_{21}$  und

Winkelbeschleunigung  $\alpha = \ddot{\varphi}_{21}$  angetrieben.

Koppel und Gleitstein haben den aktuellen Drehwinkel  $\psi(\varphi)$ .

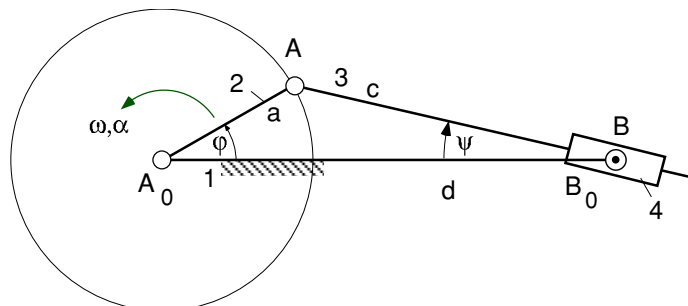
Der aktuelle Abstand (AB) ist  $c(\varphi)$

**Gesucht:**

- Relativgeschwindigkeit  $v_{BAr} = \dot{c}$  sowie die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_{31}$  und  $\omega_{32}$ .
- Relativbeschleunigung  $a_{BAr} = \ddot{c}$  sowie die Winkelbeschleunigungen  $\alpha_{31}$  und  $\alpha_{32}$ .
- Bestimme das Übersetzungsverhältnis  $i_{42}$  zwischen der Winkelgeschwindigkeit des Gleitsteines und der Kurbel

Daten:  $a = 2 \text{ cm}$ ,  $d = 6 \text{ cm}$ ,  $\varphi = 30^\circ$ ,  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  und  $\alpha = 0 \text{ rad/s}^2$ ,

$M_S = 1 \text{ cm} / 1 \text{ cm}$ ,  $M_V = 2 \text{ cm} / 1 \text{ cm s}^{-1}$ .



**Übung 3.7: Graphische Analyse der Bewegung einer Kurvenscheibe.**

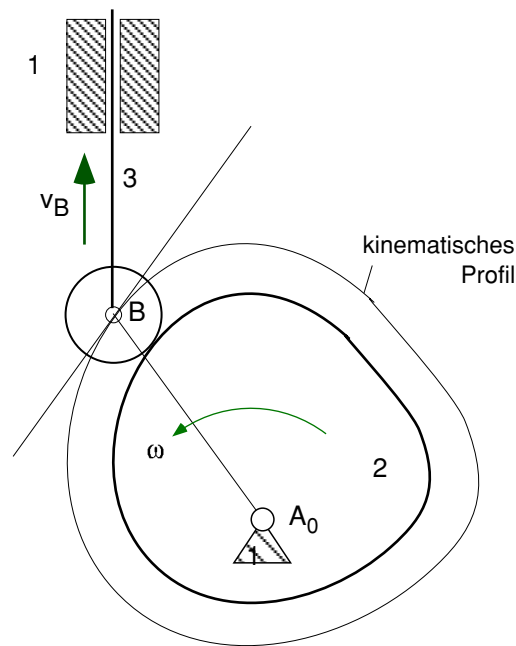
**Gegeben:** Die Kurvenscheibe 2 ist in  $A_0$  bez. Gestell 1 gelagert und wird mit der Drehzahl  $n = 38.2$  U/min = konst. angetrieben. Der Stößel 3 (mit Laufrolle) ist in der Führung zu Gestell gelagert. Infolge einer Federkraft soll die Laufrolle immer Kontakt zur Scheibe haben.

**Gesucht:** Bestimme die absolute Geschwindigkeit  $v_B = v_{B31}$  des Stößels im Punkt B.

Bestimme das Antriebsmoment  $M_2$  an der Scheibe, wenn auf den Stößel eine Kraft  $L = 800$  N lastet.

Hinweis: Verwende als Geschwindigkeitsmaßstab

$$\hat{v}_{B21} = M_v v_{B21} \equiv M_s r \Rightarrow M_v = \frac{M_s}{\omega}$$



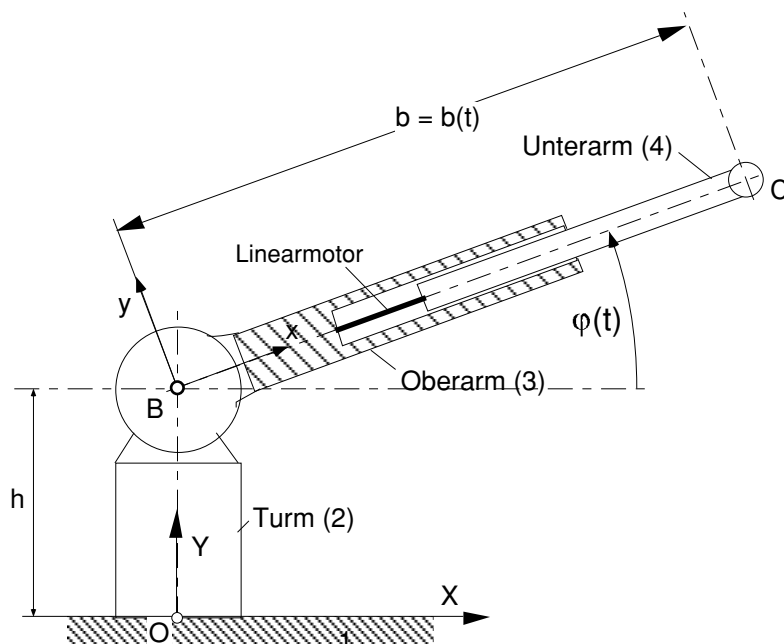


## Aufgaben zu Kap. 3 (Lösungen siehe auch Internet)

**Aufgabe 3.1:** Gegeben ist ein **Roboter mit ausfahrbarem Arm** (Glieder 3), der in B drehbar bez. Turm (Glieder 2) gelagert ist. Der Turm selbst kann sich nicht drehen.

Gesucht:

1. Entwickle analytisch die kinematischen Beziehungen der Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Greifers (Punkt C), wenn  $h$  die Höhe des Turms,  $\varphi$  der Winkel des Armes gegenüber der Horizontalen und  $b$  die aktuelle Länge von BC sind. Der Turm soll sich dabei nicht drehen.
2. Stelle die absolute Geschwindigkeit und Beschleunigung von C in einem Geschwindigkeits- und Beschleunigungsplan dar. Verwende die Werte:  
 $h = 3 \text{ cm}$ ,  $b = 8 \text{ cm}$ ,  $\varphi = 20^\circ$ ,  $\dot{b} = 40 \text{ cm/s}$ ,  $\dot{\varphi} = 5 \text{ rad/s}$ ,  $\ddot{b} = 400 \text{ cm/s}^2$ ,  $\ddot{\varphi} = 20 \text{ rad/s}^2$ ,  
 $M_S = 1 \text{ cm} / 1 \text{ cm}$ ,  $M_V = 1 \text{ cm} / 10 \text{ cm/s}^{-1}$ ,  $M_A = 1 \text{ cm} / 100 \text{ cm/s}^{-2}$
3. Bestimme die minimale und maximale Koordinate in X des Greifers C, wenn dabei  $Y = 0$  sein soll und wenn  $b_{\min} = 5 \text{ cm}$  und  $b_{\max} = 9 \text{ cm}$  als minimaler und maximaler Abstand von BC erlaubt sind.
4. Der Roboter soll eine Arbeit verrichten mit folgenden kinematischen Bedingungen:  
Punkt C fährt auf einer vertikalen Geraden am Ort  $X_H$  von  $Y = H_1$  bis  $Y = H_2$ , wo  $\Delta H = H_2 - H_1$ , mit konstanter Geschwindigkeit  $v_H$ . Bestimme dazu die erforderlichen Antriebsfunktionen  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$ ,  $b$  und  $\dot{b}$  als Funktion des Parameters  $\tau$ ,  $\tau = 0, \dots, 1$ . Prüfe die Ergebnisse anhand eines Geschw.plans.



Lösung: 1):  $\mathbf{a}_C = \ddot{b} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + 2\dot{b}\dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + b\ddot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} - b\dot{\varphi}^2 \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix};$

2):  $v_C = 56.6$ ,  $a_C = 594.6$ ; 3):  $x_{\max} = 8.48$ ,  $x_{\min} = 4$ ,

4):  $\varphi = \arctan((H_1 - h + \Delta H \tau) / x_H)$ ;  $b = \sqrt{((H_1 - h + \Delta H \tau)^2 + x_H^2)}$ ;  $\dot{\varphi} = v_H \cos^2 \varphi / x_H$ ;  $\dot{b} = v_H \sin \varphi$

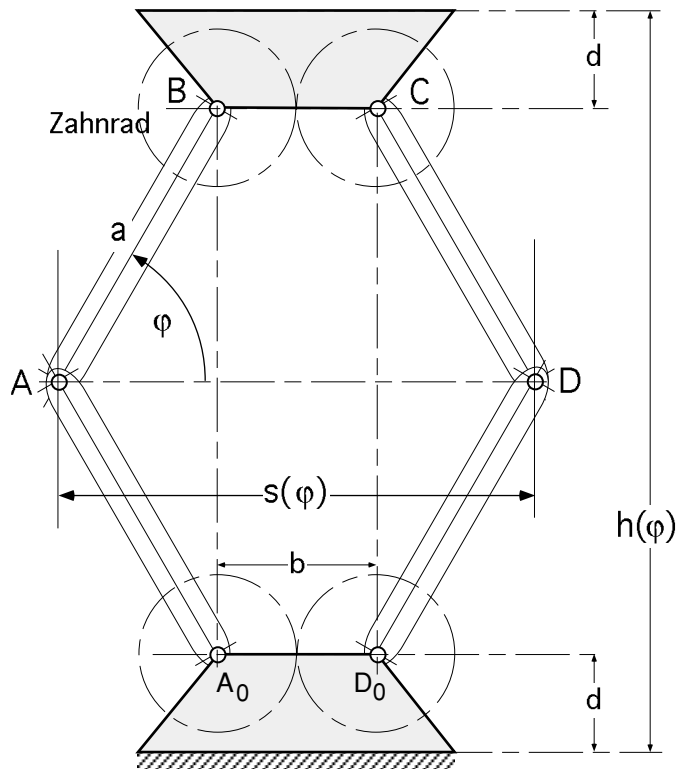
**Aufgabe 3.2:** Kinematik eines Hebemechanismus

Der Hebemechanismus besteht aus vier Lenkern der Länge  $a$ , vier Zahnraeder mit Radius  $b/2$ , die an den Lenkern befestigt sind, und Lagerboecke mit je zwei Drehgelenken. Ein Lenker mit Zahnrad ist im Drehgelenk des Lagerbocks gelagert. In A und D sind je zwei Lenker drehbar gelagert. Der Abstand  $b$  ist so bemessen, daß je zwei Zahnraeder im Eingriff sind.

Daten:  $a = 20 \text{ cm}$ ,  $b = 8 \text{ cm}$ ,  $d = 5 \text{ cm}$ .

Bestimme:

1. Laufgrad des Mechanismus
2. Uebertragungsfunktionen  $s(\varphi)$ ,  $h(\varphi)$  und  $h(s)$ . Zeichne die Funktionen auf.
3. Arbeitsbereich von  $h$ , wenn sich die Zahnraeder nicht durchdringen dürfen.
4. Uebertragungswinkel  $\mu_B(\varphi)$  zwischen Lenker und Lagerbock.
5. Uebertragungsfunktionen  $s'(\varphi)$ ,  $s''(\varphi)$ ,  $h'(\varphi)$ ,  $h''(\varphi)$ ,  $h'(s)$ ,  $h''(s)$ .



Zur Bewegung des Mechanismus wird zwischen AD eine Gewindespindel mit Steigung  $p = 2 \text{ mm}$

eingebaut. Die Drehzahl der Spindel sei  $n = 10 \text{ U/s}$ . Beachte: Für  $n > 0$  soll  $ds/dt < 0$  - also  $p = -2 \text{ mm}$

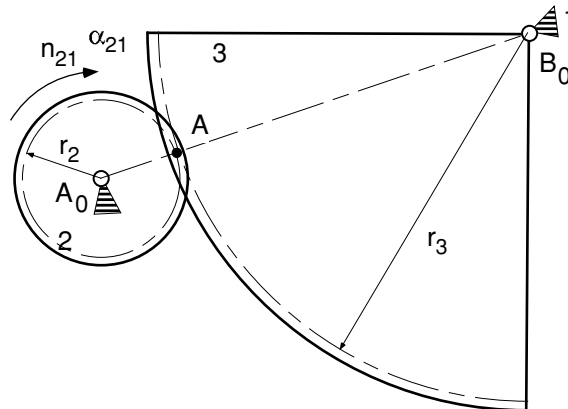
6. Bestimme die Uebersetzung  $U$  zwischen  $v = dh/dt$  und  $n$ .
7. Bestimme die Hubzeit  $T_{\text{Hub}}$  vom unteren Zustand zur obersten Lage.
8. Wir wollen eine Last von  $L = 1200 \text{ N}$  heben. Wie groß ist das erforderliche Moment  $M_{\text{Spindel}}(\varphi)$  an der Spindel. Werte die Funktion für  $\varphi = 30^\circ$  aus.
9. Wie groß ist die Längskraft  $F_{\text{Spindel}}(\varphi)$  in der Spindel?

Lösung: 1.  $F=1$ ; 2.  $s=b+2a\cos\varphi$ ,  $h=2d+2a\sin\varphi$ ,  $h=2d+2a\sqrt{1-(b-s)^2/4a^2}$ ; 3.  $h_u = 18$ ,  $h_o = 50$ ; 4.  $\mu_B = \varphi$ ;  
 5.  $h'(s) = b-s / (2a\sqrt{1-(b-s)^2/4a^2}) = -\cot(\varphi)$ ,  $h''(s) = -1/(2a\sqrt{1-(b-s)^2/4a^2}) - (b-s)^2 / 8a^3\sqrt{1-(b-s)^2/4a^2}^3$ ;  
 6.  $U = p h'(s)$ ; 7.  $T_{\text{Hub}} = 19.6 \text{ s}$ , 8.  $M_{\text{Spindel}}(30^\circ) = 66.16 \text{ Ncm}$ , 9.  $F_{\text{Spindel}}(30^\circ) = 2078.5 \text{ N}$

**Aufgabe 3.3:** Kinematik eines Rädergetriebes.

Geg.:  $n_{21} = 191 \text{ U/min}$ ,  $r_2 = 10 \text{ cm}$ ,  $r_3 = 100 \text{ cm}$ ,  $\alpha_{21} = 100 \text{ rad/s}^2$ .

- Ges.:
1. Berechne  $\omega_{21}$ ,  $\omega_{31}$ ,  $n_{31}$ , Übersetzung  $i$ . Zeiche die Größen richtig ein.
  2. Geschwindigkeit des Kontaktpunktes A. Zeichne die Geschwindigkeit ein.
  3. Beschleunigung des Punktes A auf Rad 2 und auf Rad 3. Größen bitte einzeichnen.
  4. Bestimme  $\alpha_{31}$ .



Lösung:  $\omega_{21} = 20 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_{31} = 2 \text{ rad/s}$ ,  $i = 10$ ,  $v_A = 2 \text{ m/s}$ ,  $a_{A21} = 41.23 \text{ m/s}^2$ ,  $a_{A31} = 10.77 \text{ m/s}^2$ ,  $\alpha_{31} = 10 \text{ rad/s}^2$ .

**Aufgabe 3.4:** Kinematik eines Planetengetriebes

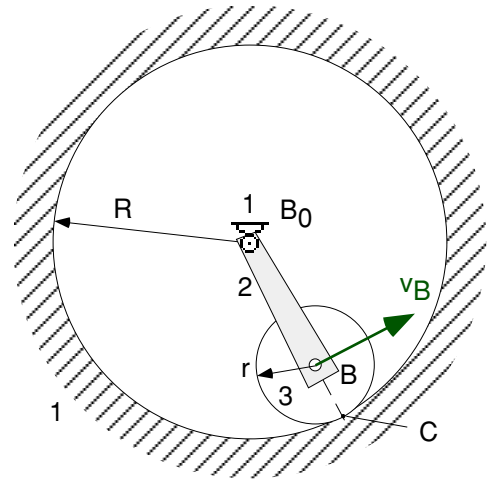
Nebenstehendes Bild zeigt ein Planetengetriebe mit stehendem Hohlrad 1, dem Steg 2 (gelagert in  $B_0$ ) und dem Planetenrad 3, (gelagert in B).

Das Planetenrad rollt im Hohlrad ab.

**Gegeben sind:**  $R$ ,  $r$ ,  $v_B$ .

Berechne analytisch:

- a) Die Winkelgeschwindigkeit des Gliedes 2 bez. Gestell.



Zeichne  $\omega_{21}$  sinnbildlich in Bild 4 ein.

- b) Berechne die Winkelgeschw.  $\omega_{31}$  des Planetenrades 3 bez. Gestell.

Zeichne  $\omega_{31}$  sinnbildlich in Bild 4 ein, wo Pol  $P_{31} = \dots\dots\dots$

- c) Berechne die Winkelgeschw.  $\omega_{32}$  des Planetenrades 3 bez. Glied 2. **Achtung:** Vektorgleichung!

Zeichne  $\omega_{32}$  sinnbildlich in Bild 4 ein, wo Pol  $P_{32} = \dots\dots\dots$

- d) Gebe die Übersetzung  $i_{32}$  an, wenn  $R = 10 \text{ cm}$ ,  $r = 4 \text{ cm}$ .

---

Lösung:  $\omega_{21} = v_B / (R-r)$ ,  $\omega_{31} = -v_B / r$ ,  $\omega_{32} = -v_B R / (r(R-r))$ ,  $i_{32} = -1.5$ ; negative sVorzeichen bedeutet Umkehrung des Drehsinns.

**Aufgabe 3.5: Bestimme die effektive Steigung der DLR-Rollenspindel**

mit

$$r_1 = 8 \text{ mm},$$

$$r_2 = 4 \text{ mm},$$

$$r_3 = 2 \text{ mm},$$

$$\omega_1 = 1 \text{ rad/s} = \omega_{ES},$$

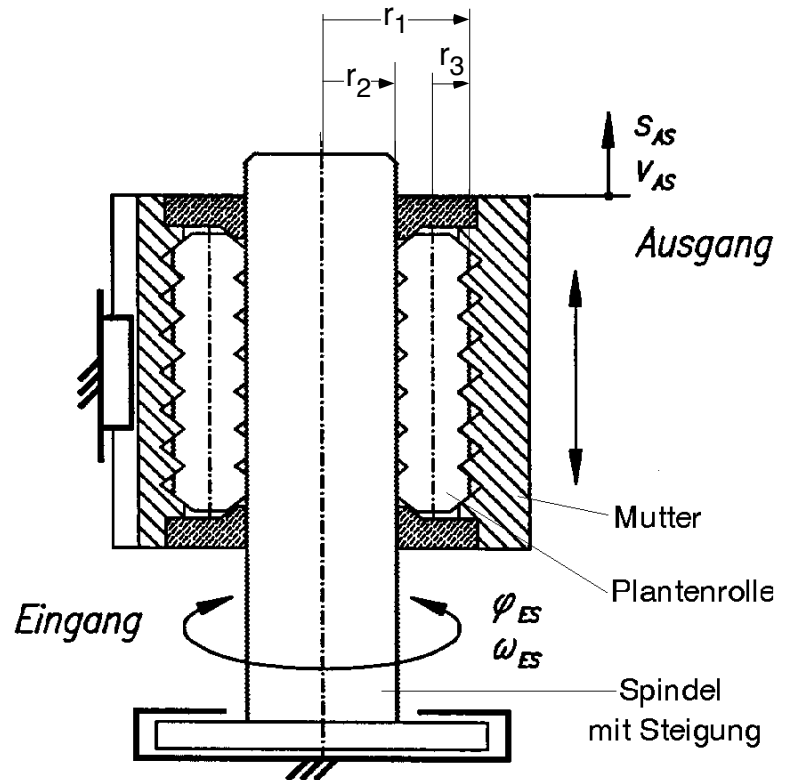
$$h_{\text{Spindel}} = 0.3 \text{ mm Steigung}.$$

$$M_\omega = 5 \text{ cm} / 1 \text{ rad s}^{-1},$$

$$M_s = 1 \text{ cm} / 1 \text{ mm}$$

Zeichne einen

Winkelgeschwindigkeitsplan



Lösung:  $h_{\text{eff}} = 0.7 h = 0.2 \text{ mm}$ ; rechnerisch:  $h_{\text{eff}} = h \left(1 - \frac{r_2}{2(r_2 + r_3)}\right)$

**Aufgabe 3.11: Graphische Lösung eines exzentrischen Schubkurbelgetriebes**

Geg.: Schubkurbel mit Längen  $r = 30 \text{ cm}$ ,  $l = 60 \text{ cm}$ ,  $e = 10 \text{ cm}$ ,  $k = 30 \text{ cm}$ , Winkel  $\varphi = 30^\circ$ ,  $\kappa = 38^\circ$

Winkelgeschwindigkeit  $\omega = 4 \text{ rad/s}$ , Winkelbeschleunigung  $\alpha = 20 \text{ rad/s}^2$ ,

Maßstäbe  $M_S = 1 \text{ mm} / 1 \text{ cm}$ ,  $M_V = 20 \text{ mm} / 1 \text{ ms}^{-1}$

Ges.: 1. Lage aller Geschwindigkeitspole des Getriebes

2. Geschwindigkeit der Punkte A, B und C, zeichne den Geschwindigkeitsplan

3. Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{31}$  und  $\omega_{32}$

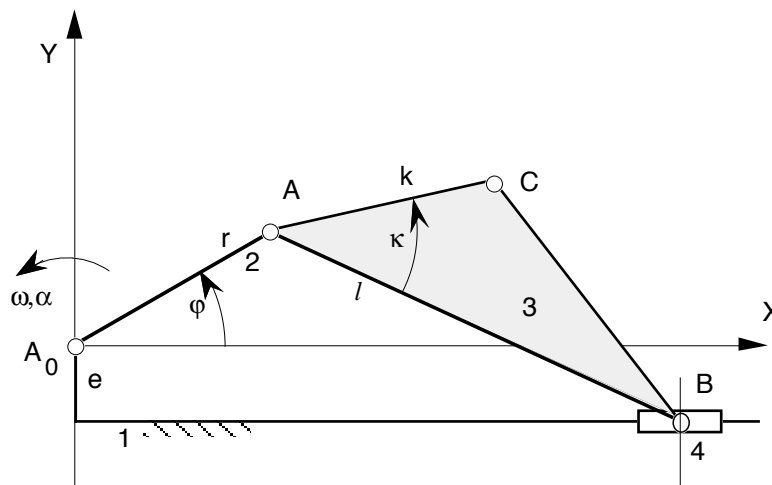
4. Beschleunigung der Punkte A und B unter Verwendung der Geschwindigkeiten aus 2)

5. Bestimme den Beschleunigungspol  $G_{31}$  und damit die Beschleunigung von C

6. Zeichne den Beschleunigungsplan

7. Winkelbeschleunigung  $\alpha_{31}$

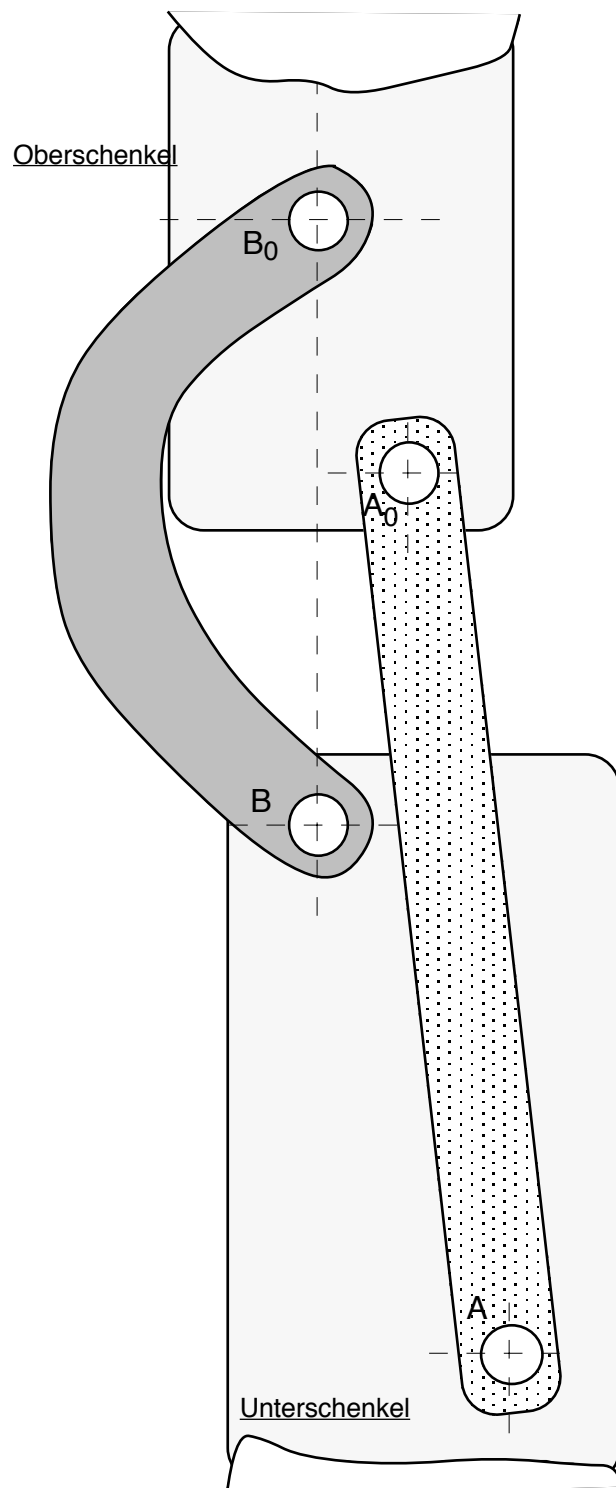
8. In B wirkt die Zugkraft  $F_4 = 3 \text{ kN}$ . Wie groß ist das Moment  $M_2$  an der Kurbel 2?



Lösung:  $v_B = 1.07 \text{ m/s}$ ;  $v_C = 0.67 \text{ m/s}$ ,  $\omega_{31} = 1.9 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_{32} = -5.9 \text{ rad/s}$ ;

$a_B = 10.8 \text{ m/s}^2$ ,  $a_C = 7.8 \text{ m/s}^2$ ,  $\alpha_{31} = -6.8 \text{ rad/s}^2$ ,  $\alpha_{32} = -26.9 \text{ rad/s}^2$ ,  $M_2 = 802 \text{ Nm}$ .

**Aufgabe 3.12:** Bestimme die Polkurve (Momentanpol) bei Bewegungen des Unterschenkels gegenüber dem Oberschenkel, wenn die Schwinge  $AA_0$  eine Drehung von  $90^\circ$  in Schritten von  $10^\circ$  ausführt.

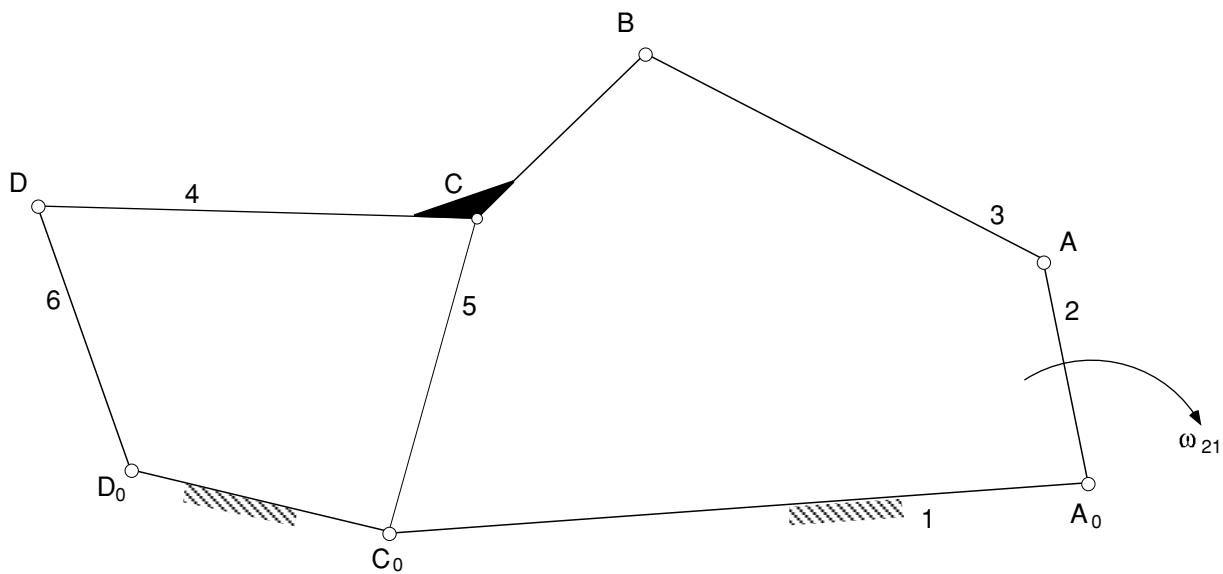


**Aufgabe 3.13:** Das abgebildete **6-gliedrige ebene Getriebe** ist kinematisch zu untersuchen. Der Antrieb erfolgt am Glied  $A_0A$  mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{21}$ . Die Analyse ist für die gezeichnete Lage durchzuführen.

Geg.: Längen  $A_0A = 3 \text{ cm}$ ,  $C_0C = 4.3 \text{ cm}$ ,  $D_0D = 3.7 \text{ cm}$ ,  $AB = 6 \text{ cm}$ ,  $CD = 5.8 \text{ cm}$ ,  $BD = 8.2 \text{ cm}$ ,  
Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{21} = 0.9 \text{ rad/s}$ ,

Maßstäbe  $M_s = 10 \text{ mm} / 1 \text{ cm} = 100 \text{ mm} / 1 \text{ m}$ ,  $M_v = 20 \text{ mm} / 1 \text{ cm s}^{-1}$

- Ges.: 1. Zeichne die kinematische Kette; Typ, Polgraph.  
2. Ermittle den Laufgrad  
3. Bestimme alle Drehpole und die Momentanpole  $P_{31}$  und  $P_{41}$   
4. Bestimme die Geschwindigkeiten der Punkte B, C, und D  
5. Berechne die absolute Winkelgeschwindigkeit des Gliedes  $D_0D$  sowie  
6. das Übersetzungsverhältnis  $i_{62}$ .



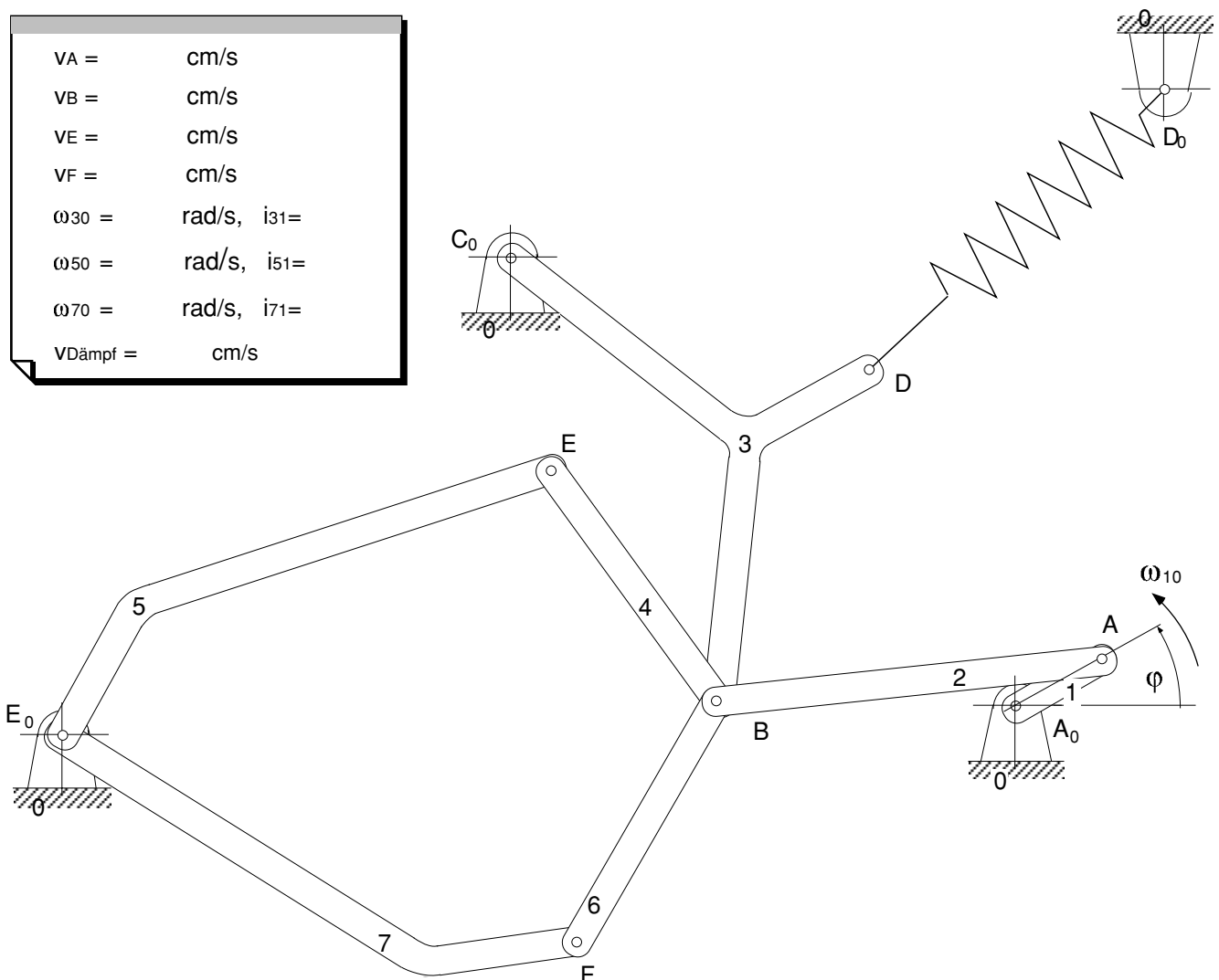
Lösung:  $v_B = 2.1 \text{ cm/s}$ ;  $v_C = 1.65 \text{ cm/s}$ ,  $v_D = 1.7 \text{ cm/s}$ ,  $\omega_{61} = 0.46 \text{ rad/s}$ ,  $i_{62} = 0.51$ ;



**Aufgabe 3.14:** Der **7-Körper-Mechanismus** aus SCHIEHLEN, 1990 (ebenes Getriebe) ist in der gezeichneten Stellung kinematisch zu untersuchen:

1. Zeichne die kinematische Kette
2. Berechne den Laufgrad der Kette
3. Bestimme die Geschwindigkeit von A, E und F, wenn die Antriebswinkelgeschwindigkeit  $\omega_{10} = 10 \text{ rad/s} = \text{konst.}$  und ein Kurbelradius  $r$  von 1,4 cm vorliegt.  
Verwende die Maßstäbe  $M_S = 1 \text{ cm} / 1 \text{ cm}$ ,  $M_V = 3 \text{ mm} / 1 \text{ cms}^{-1}$ .
4. Ermittle die Drehpole und Momentanpole der Glieder 2, 3, 4, 5 und 6 gegenüber Gestell 0.
5. Bestimme das Übersetzungsverhältnis der Abtriebsschwingen 3, 5 und 7 bez. Antriebskurbel 1, genannt  $i_{31}$ ,  $i_{51}$  und  $i_{71}$ .  
Zeichne die Richtungen der Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_{30}$ ,  $\omega_{50}$  und  $\omega_{70}$  in den Lageplan ein.
6. Parallel zur Feder in D soll noch ein Dämpfer angebracht werden. Bestimme die Geschwindigkeit  $v_{\text{Dämpf}}$  in D in Dämpferrichtung, die zur Berechnung der Dämpferkraft benötigt wird.  
Ergibt sich aus der Geschwindigkeit eine Dämpfer-Zugkraft oder eine Dämpfer-Druckkraft?
7. Siehe Rückseite!

$v_A =$	cm/s
$v_B =$	cm/s
$v_E =$	cm/s
$v_F =$	cm/s
$\omega_{30} =$	rad/s, $i_{31} =$
$\omega_{50} =$	rad/s, $i_{51} =$
$\omega_{70} =$	rad/s, $i_{71} =$
$v_{\text{Dämpf}} =$	cm/s

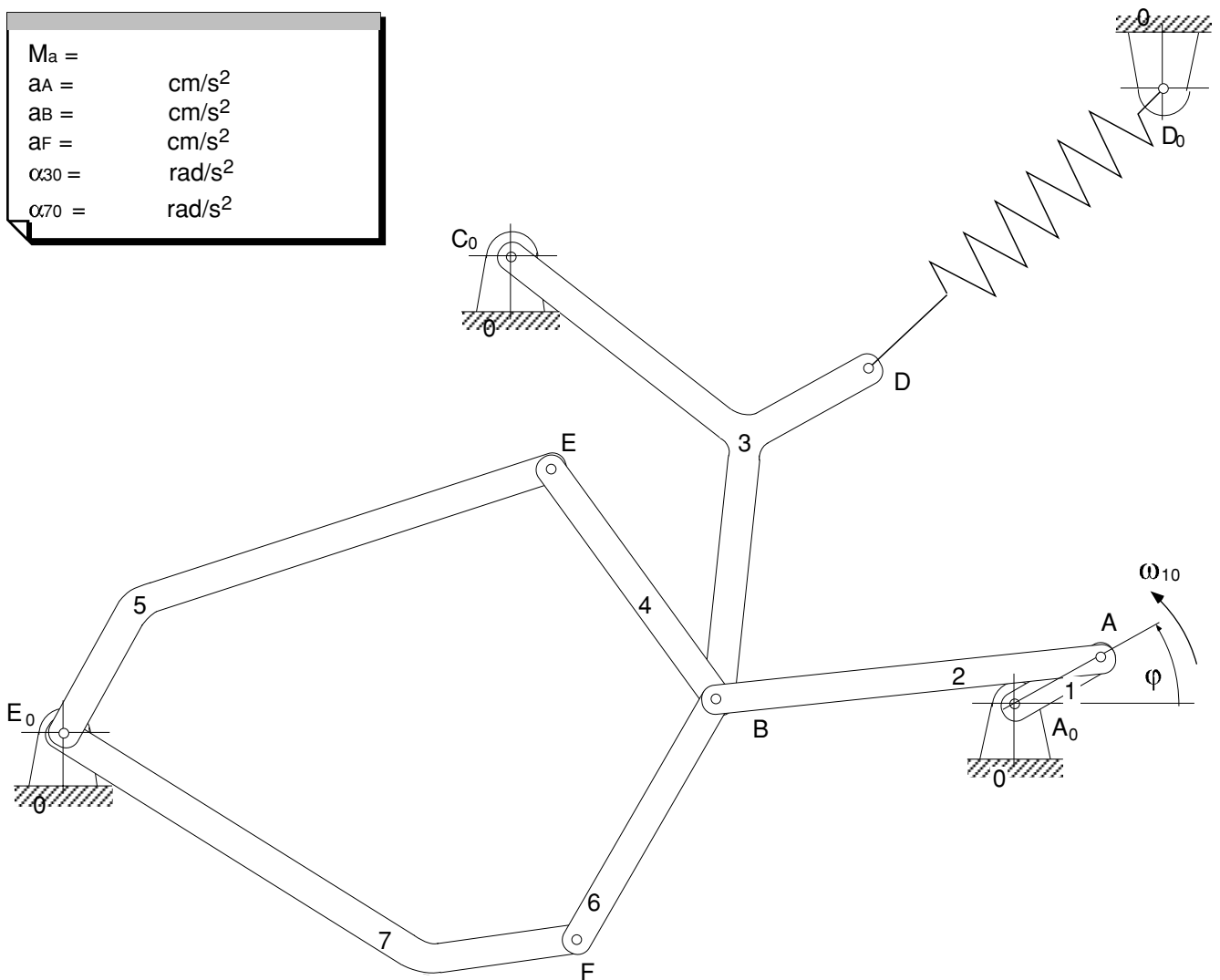


Lösung:  $v_A = 14 \text{ cm/s}$ ;  $v_B = 6 \text{ cm/s}$ ;  $v_E = 1.2 \text{ cm/s}$ ;  $v_F = 4.8 \text{ cm/s}$ ;  $\omega_{30} = 0.86 \text{ rad/s}$ ;  $\omega_{50} = 0.15 \text{ rad/s}$ ;  $\omega_{70} = 0.6 \text{ rad/s}$ ;  $v_{\text{Dämpf}} = 4 \text{ cm/s}$ ;  $a_A = 140 \text{ cm/s}^2$ ;  $a_B = 94 \text{ cm/s}^2$ ;  $a_F = 70 \text{ cm/s}^2$ ;  $\alpha_{30} = 13.4 \text{ rad/s}^2$ ,

## Forts. Aufgabe 3.14

7. Bestimme die Beschleunigung der Punkte A, B und F mit Hilfe der bereits ermittelten Geschwindigkeiten und zeichne den Beschleunigungsplan. Gebe die **Vektorgleichungen** an.
8. Konstruiere aus dem Beschleunigungsplan den Beschleunigungspol  $G_{20}$ .
9. Berechne die Winkelbeschleunigung  $\alpha_{30}$  und  $\alpha_{70}$  der Schwingen 3 und 7.

$M_a =$	
$a_A =$	cm/s <sup>2</sup>
$a_B =$	cm/s <sup>2</sup>
$a_F =$	cm/s <sup>2</sup>
$\alpha_{30} =$	rad/s <sup>2</sup>
$\alpha_{70} =$	rad/s <sup>2</sup>



**Aufgabe 3.15:** Das abgebildete ebene **Doppelschieber**-Getriebe ist kinematisch zu untersuchen. Das Getriebe wird mit  $\omega_{21} = 10 \text{ rad/s}$  an der Kurbel  $A_0A$  angetrieben. Die Koppel 3 des Schubkurbelgetriebes (der Glieder 1, 2, 3, 4) ist als innenverzahntes Rad mit Teilkreisdurchmesser AB ausgebildet. Das innenverzahnte Rad steht mit Zahnrad 5, das in  $A_0$  lose ohne Verbindung mit der Kurbel 2 gelagert ist, im Eingriff. ( $A_0$  ist Drehpunkt von 5). Mit der Koppel 6 und dem Gleitstein 7 bildet das Rad 5 ein zweites Schubkurbelgetriebe.

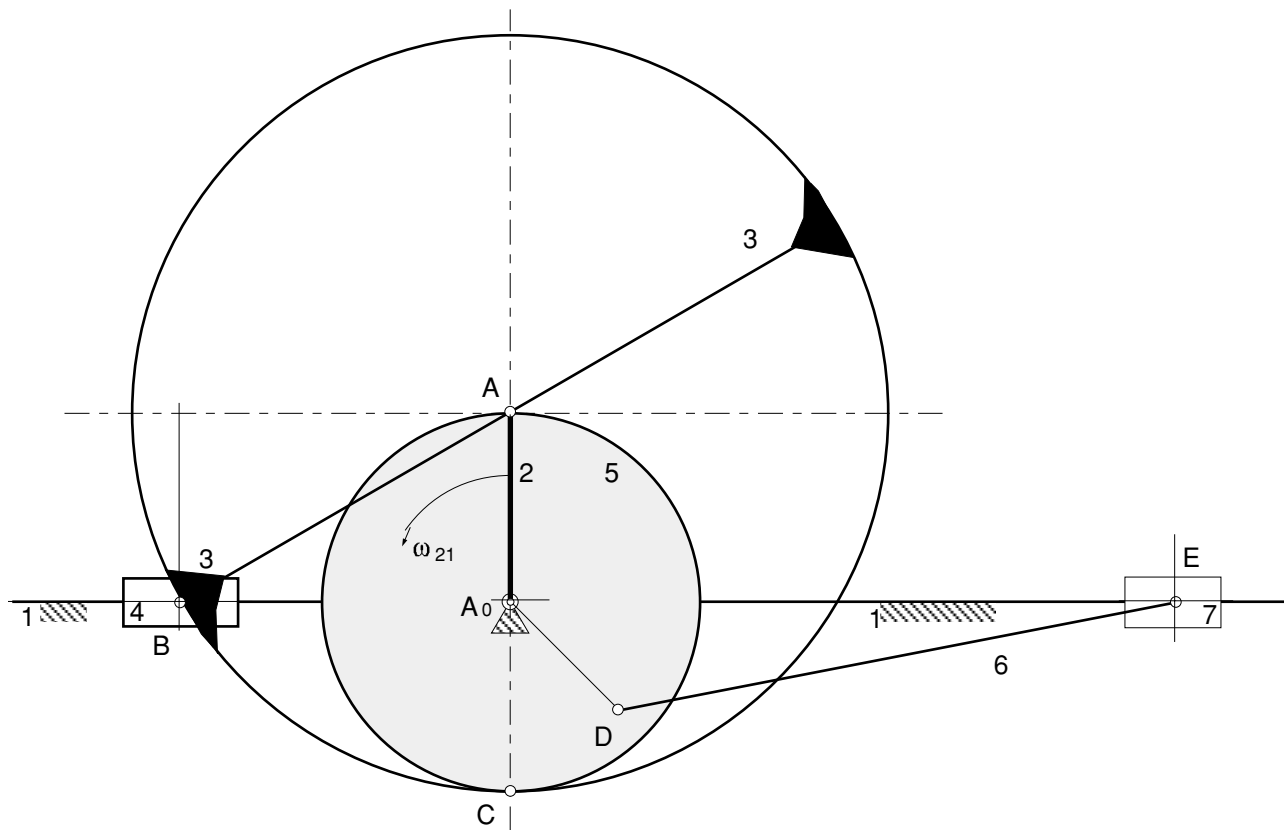
Geg.: Längen  $A_0A = 2.5 \text{ cm}$ ,  $AB = 5 \text{ cm}$ ,  $A_0D = 2 \text{ cm}$ ,  $DE = 7.5 \text{ cm}$ ,  $\angle DA_0E = 45^\circ$

Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{21} = 10 \text{ rad/s} = \text{konst.}$

Maßstäbe  $M_S = 1 \text{ mm} / 1 \text{ mm}$ ,  $M_V = 1 \text{ mm} / 1 \text{ cm s}^{-1}$

Ges.: Mit den gegebenen Abmessungen und für die gezeichnete Lage ist bzw. sind

- 1) das Getriebeschema und die kinematische Kette (Gelenkkette) zu zeichnen,
- 2) der Freiheitsgrad zu ermitteln,
- 3) die Geschwindigkeiten der Punkte A, B, C, E
- 4) und die Beschleunigungen dieser Punkte zu bestimmen.
- 5) Der Beschleunigungspol  $G_{31}$  für die Bewegung der Koppel 3 gegenüber dem Gestell 1 sind einzuzuzeichnen,
- 6) die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{51}$  und Winkelbeschleunigung  $\alpha_{51}$  zu bestimmen.



Lösung:  $v_A = v_B = v_C = 25 \text{ cm/s}$ ;  $v_D = 20 \text{ cm/s}$ ,  $v_E = 17 \text{ cm/s}$ ,  $\omega_{51} = 10 \text{ rad/s}$ ,  $\alpha_{51} = 120 \text{ rad/s}^2$ ,  
 $a_A = 250 \text{ cm/s}^2$ ,  $a_B = 150 \text{ cm/s}^2$ ,  $a_C = 400 \text{ cm/s}^2$ ,  $a_D = 320 \text{ cm/s}^2$ ,  $a_E = 360 \text{ cm/s}^2$ ,  $\Delta G_{31}BA \sim \Delta O''B''A''$

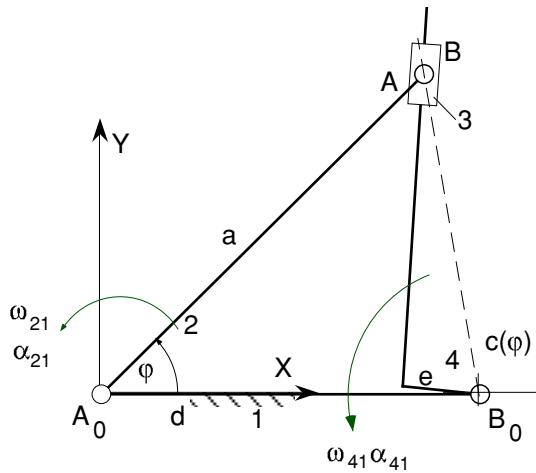
**Aufgabe 3.16: Exzentrische Kurbelschleife (graphische Lösung)**

Geg.: Kurbelschleife mit Längen  $a = 60 \text{ cm}$ ,  $d = 50 \text{ cm}$ ,  $e = 10 \text{ cm}$ , Winkel  $\varphi = 45^\circ$ ,

Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{21} = 6 \text{ rad/s}$ , Winkelbeschleunigung  $\alpha_{21} = 30 \text{ rad/s}^2$ ,

Maßstäbe  $M_s = 1 \text{ mm} / 1 \text{ cm} = 100 \text{ mm} / 1 \text{ m}$ ,  $M_v = 10 \text{ mm} / 1 \text{ ms}^{-1}$

Ges.: Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Punkte A der Kurbel und B auf der Schwinge



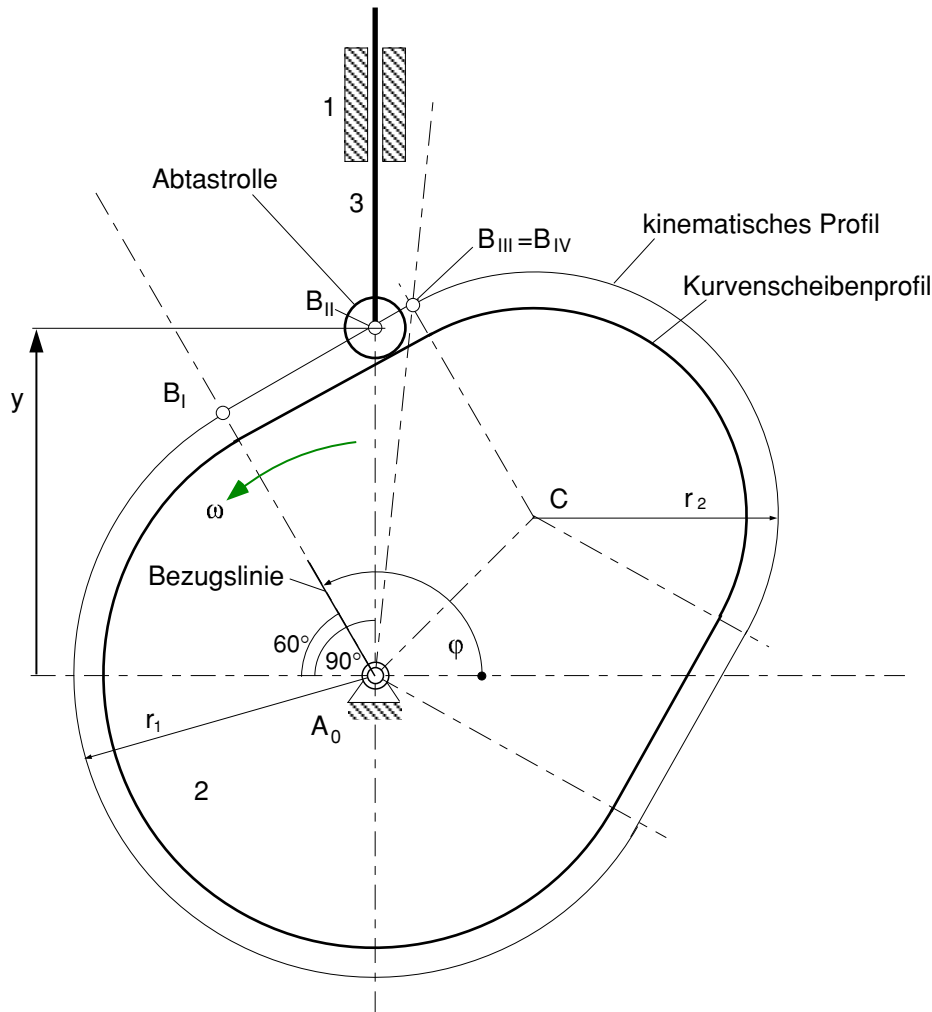
Lösung:  $v_A = 3.6 \text{ cm/s}$ ,  $v_B = 3.6 \text{ cm/s}$ ;  $v_{Bf} = 2.7 \text{ cm/s}$ ,  $v_{Br} = 3 \text{ cm/s}$ ,  $\omega_{41} = 6.28 \text{ rad/s}$ ,  
 $a_A = 28.5 \text{ cm/s}^2 = a_B$ ,  $a_{Bf} = 12 \text{ cm/s}^2$ ,  $\alpha_{41} = 14 \text{ rad/s}^2$ ,

**Aufgabe 3.17:** Die in natürlicher Größe gezeichnete **Kurvenscheibe** 2 dreht sich gegenüber Gestell 1 mit der Drehzahl  $n = 95.493 \text{ U/min} = \text{konst.}$  entgegen Uhrzeigersinn und bewegt so den Stößel 3.

Daten:  $r_1 = 40 \text{ mm}$ ,  $r_2 = 32 \text{ mm}$ , Rollendurchmesser =  $8 \text{ mm}$ ,  $A_0C = 30 \text{ mm}$ . Maßstab  $M_S = 1 \text{ mm} / 1 \text{ mm}$ ,  
 $M_V = M_S / |\omega|$ .

**Teil 1:** Bestimme zeichnerisch die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Stößels (Punkt B Glied 3)

- in Stellung I ( $\varphi = 90^\circ$ )
- in Stellung II ( $\varphi = 120^\circ$ )
- in Stellung III ( $\varphi = 126^\circ$ ), wenn Punkt  $B_{III}$  noch auf dem geradlinigen Teil der Kurvenscheibe ist
- in Stellung IV ( $\varphi = 126^\circ$ ), wenn Punkt  $B_{IV}$  bereits auf dem krummlinigen Teil der Kurvenscheibe ist



**Teil 2:**

- Stelle für den geradlinigen Teil der Kurvenscheibe die Position des Punktes B des Stößels durch die Funktion  $y(\varphi)$  dar. Bilde durch Ableitungen nach der Zeit die Funktion für die Geschwindigkeit  $v_{B31}$  und für die Beschleunigung  $a_{B31}$ .
- Werte die Funktionen für  $\varphi = 90^\circ$  und  $\varphi = 120^\circ$  aus und vergleiche mit den Ergebnissen aus Teil 1.

**Lösung 1:**

- $v_{B31} = 0.0 \text{ cm/s}$ ,  $a_{B31} = 400 \text{ cm/s}^2$ ,
- $v_{B31} = 26.67 \text{ cm/s}$ ,  $a_{B31} = 769.8 \text{ cm/s}^2$ ,
- $v_{B31} = 36.00 \text{ cm/s}$ ,  $a_{B31} = 1020 \text{ cm/s}^2$ ,
- $v_{B31} = 36.00 \text{ cm/s}$ ,  $a_{B31} = -430 \text{ cm/s}^2$ ,

**Lösung 2:**  $\alpha = \varphi - 90^\circ$ ;  $y = r_1 / \cos \alpha$ ;  $\dot{y} = r_1 \omega \sin \alpha / \cos^2 \alpha$ ;  $\ddot{y} = r_1 \omega^2 (\cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha) / \cos^3 \alpha$ ;

**Aufgabe 3.18:** Der sechs-gliedrige Mechanismus hat 3 Schubglenke: Glied 4 mit 1, Glied 5 mit 6 und Glied 6 mit 1. Alle übrigen Gelenke sind Drehgelenke.

Zeige anhand der Geschwindigkeitspole, insbesondere der Momentanpole  $P_{31}$ ,  $P_{41}$ ,  $P_{51}$ ,  $P_{61}$ , dass die Vektoren der Geschwindigkeiten der Punkte A bis G in Größe und Richtung korrekt sind. Starte mit  $v_A$ .

