1 Statik starrer Körper – Stereostatik

1.1 Einführung in die Technische Mechanik

1.1.1 Was bedeutet Technische Mechanik?

☞ Die **Technische Mechanik** befaßt sich mit der Analyse der Kräfte und Bewegungen starrer und elastischer Körper bzw. Körpersysteme, sogenannte *Mehrkörpersysteme*.

Sie umfasst:

Kinematik ist die Lehre der Bewegungen

Dynamik ist die Lehre der Kräfte. Sie unterteilt sich in

Statik (die Kräfte sind im Gleichgewicht, der Körper bewegt sich nicht)

Kinetik (die Kräfte sind nicht im Gleichgewicht, der Körper bewegt sich)

Aus Vereinfachungsgründen betrachtet man zunächst den **starren Körper**. Hierfür gilt:

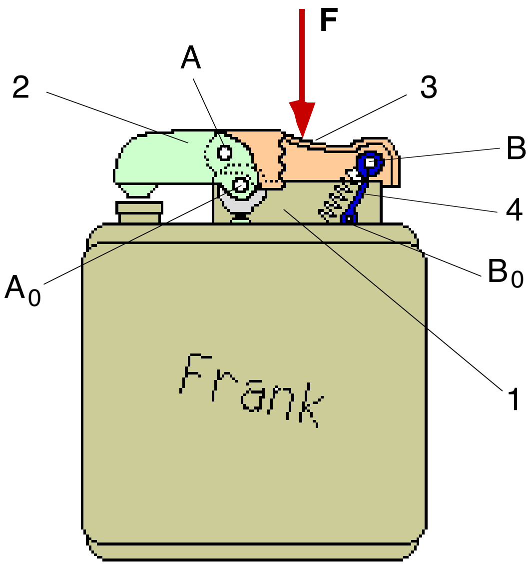
Alle Punkte haben für beliebige Kräfte am Körper immer den selben Abstand, siehe Kap. 1 Stereostatik und Kap. 3

Der **elastische Körper** verformt sich unter der Einwirkung von Kräften, siehe Kap 2.

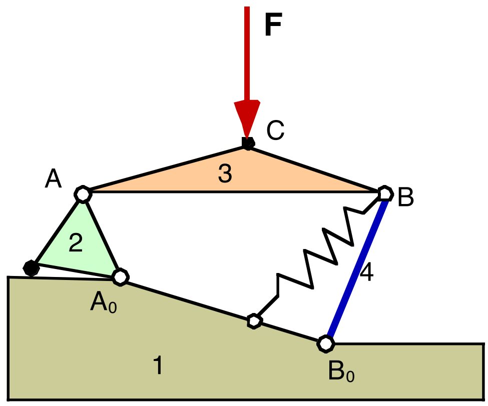
Elastische Körper mit komplexen Formen nennt man auch *elastische Strukturen*.

1.1.2 Beispiele mechanischer Systeme

Beispiel 1: Mechanik eines Tischfeuerzeuges – Übertragung der Energie



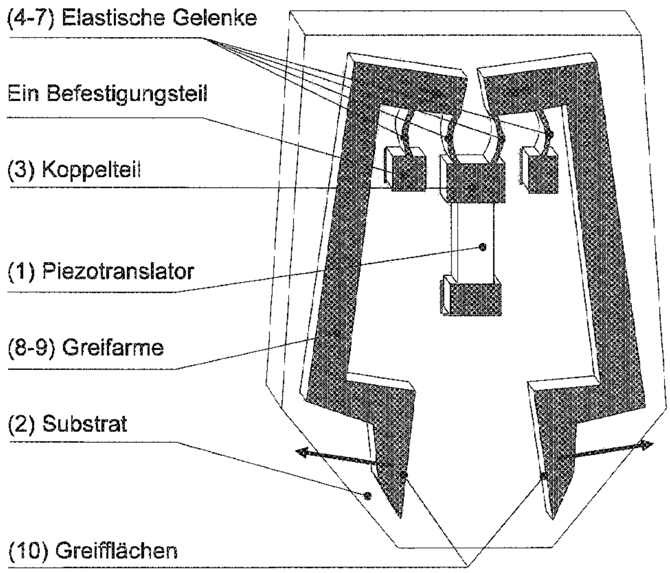
a) Konstruktive Ausführung

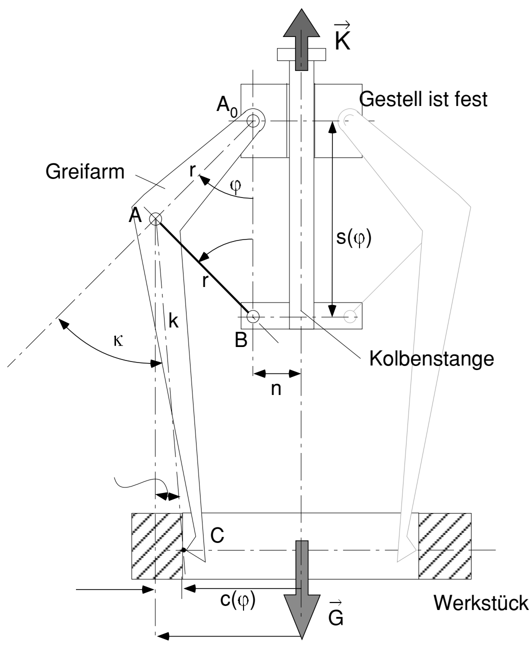


4-Gelenkmechanismus
mit 4 Gliedern (#1 = Gestell)
mit 4 Gelenken (Drehgelenke bei A_0, A, B, B_0)
mit einer Feder und 2 Anschlägen
Das System hat einen Freiheitsgrad (1 FHG)

b) Mechanisches Ersatzmodell

Beispiel: Mikrogreifer aus Silizium

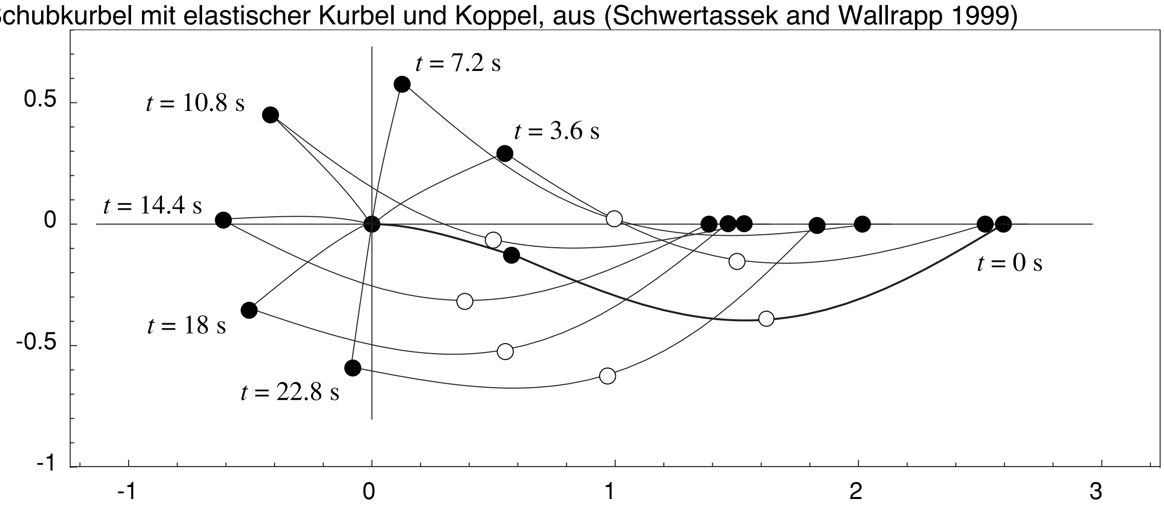




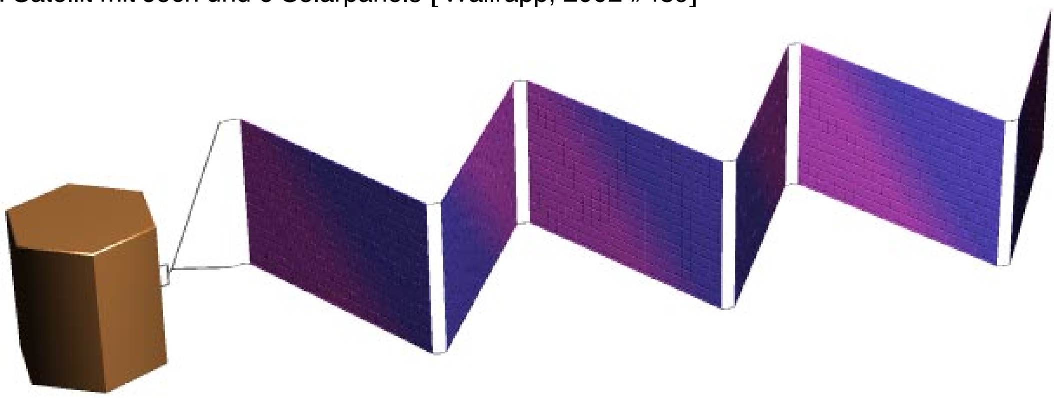
Übung: Was sind die Bauelemente eines mechanischen Systems?

☞ Beispiel mit elastischen Körpern

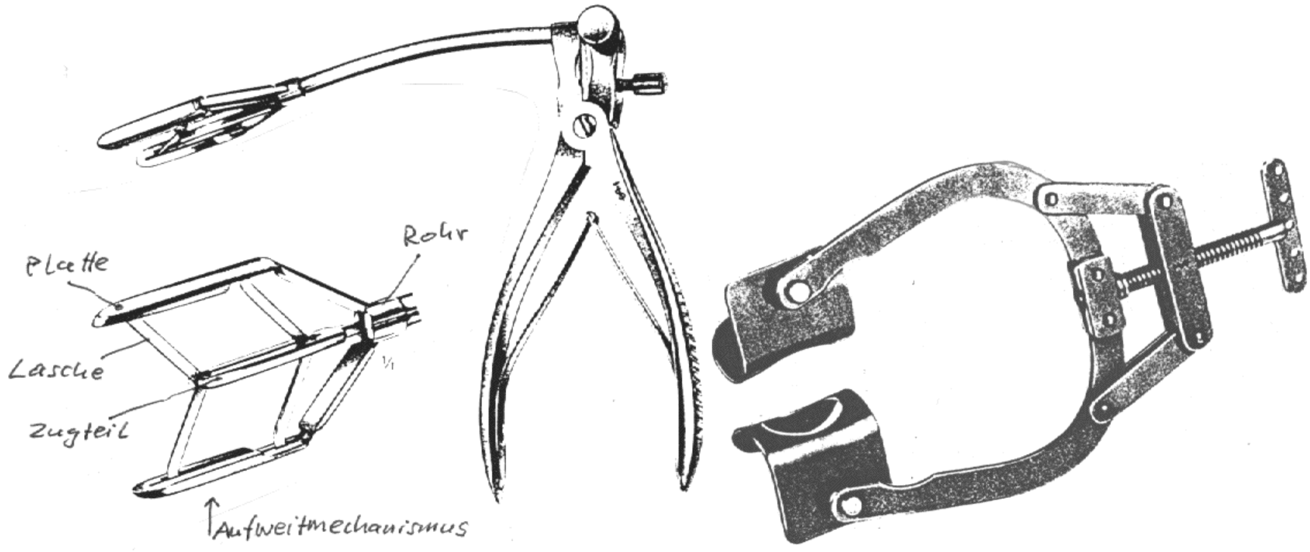
Schubkurbel mit elastischer Kurbel und Koppel, aus (Schwertassek and Wallrapp 1999)



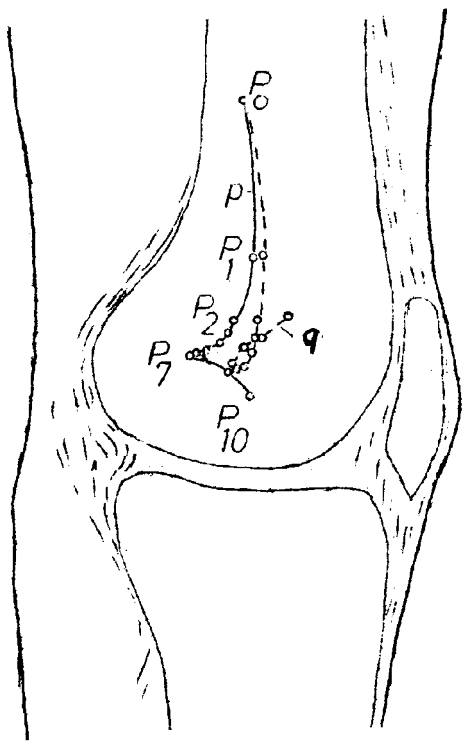
Beispiel: Satellit mit Joch und 6 Solarpanels [Wallrapp, 2002 #489]

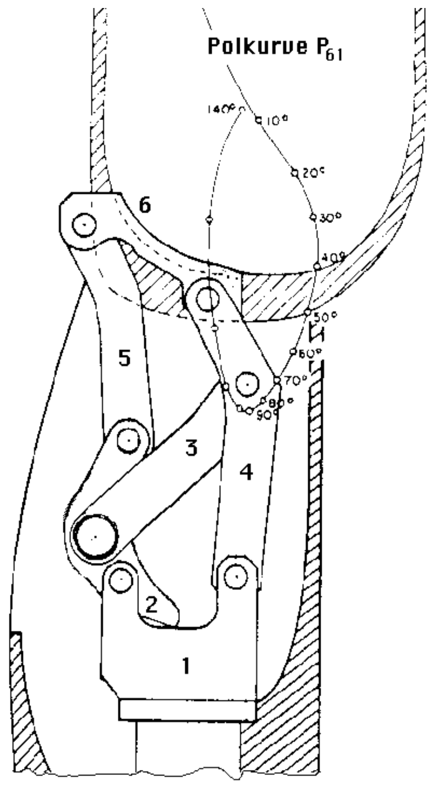


Beispiel: Chirurgische Werkzeuge



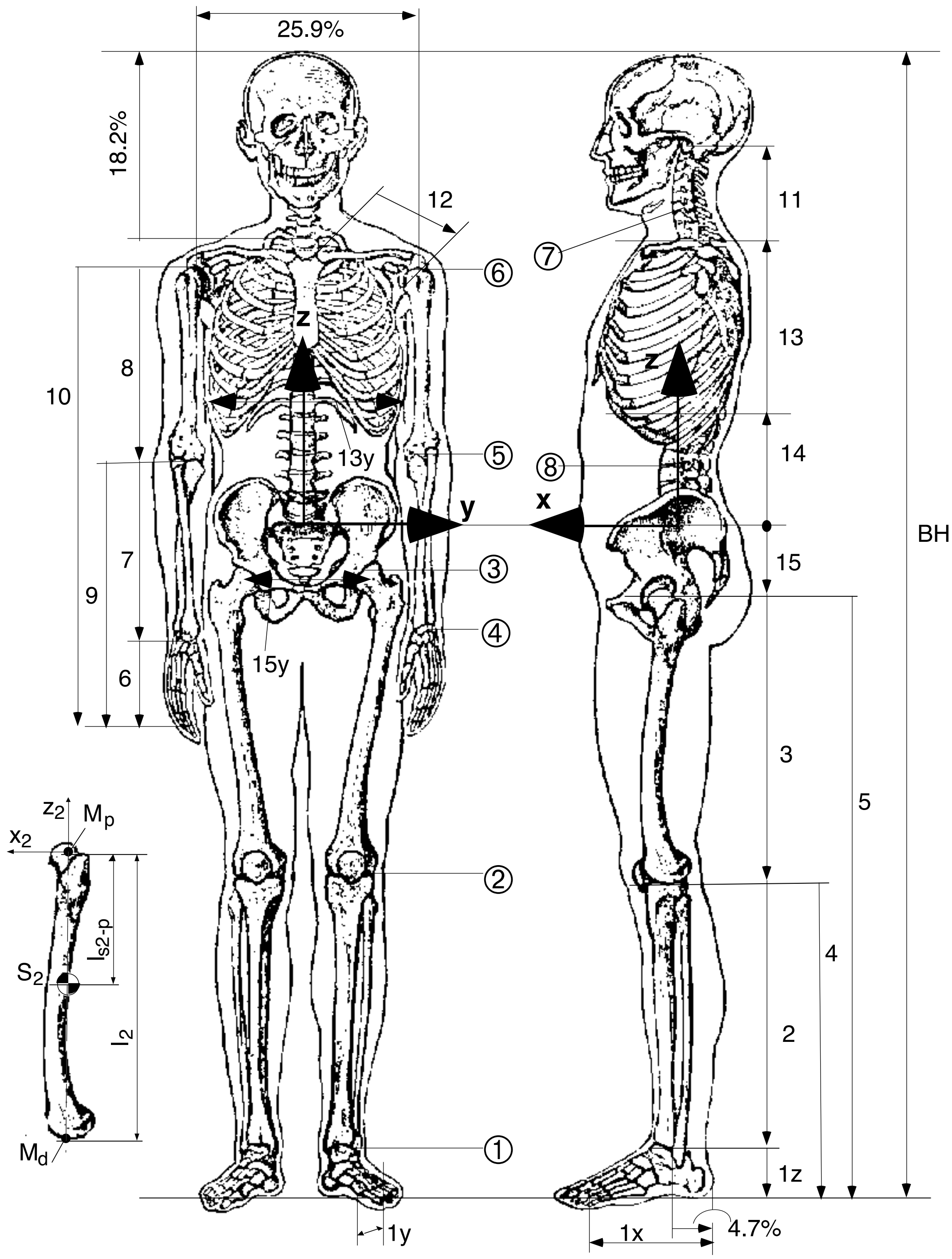
Beispiel: Kniegelenkprothese, entwickelt vom Biomechanics Laboratory, University of California, Berkeley, USA.





Übung: Nenne weitere mechanische Systeme aus dem Bereich Bioingenieurwesen.

Beispiel: Das menschliche Skelett als Mehrkörpersystem, siehe die Vorlesung **Biomechanik**



Übung: Wo könnte man ein mechanisches Modell im Bereich Sport einsetzten?

1.1.3 Wofür wendet der Ingenieur die Technische Mechanik an?

Übung: Gebe Antworten auf die oben gestellte Frage.

1.1.4 Welche Lösungsmethoden müssen wir einsetzen?

Abhängig von der Aufgabenstellung bzw. den gewünschten Ausgabegrößen wähle diese gemäß Tab. 1.1 aus.

Lehrsatz der Modellbildung:

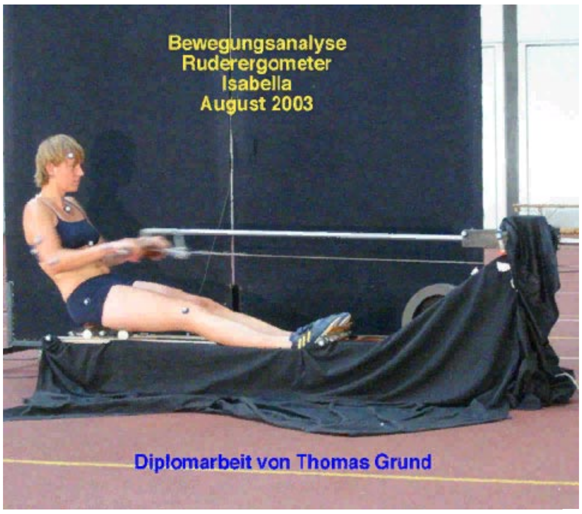
Lege das Modell stets so einfach wie möglich aber so aufwendig wie nötig an!

	Statik	**Kinetostatik**	**Kinetik (Dynamik)**	**Inverse Dynamik**
Eingabe-größen	geometrische Lage Lasten, Gewicht	geometrische Lage Lasten, Gewicht Massenträgheitskräfte (Beschleunigung)	Startlage Lasten, Gewicht, eingeprägte Kräfte Massengeometrie Gesetz Muskelkraft	Zeitl. Verlauf d. Lage, Geschwindigkeit, Beschleunigung Lasten, Gewicht, eingeprägte Kräfte Massengeometrie
Ausgabe-größen	Antriebskräfte, Gelenkkräfte	Antriebskräfte, Gelenkkräfte	Zeitl. Verlauf Lage, Geschwindigkeit, Beschleunigung Gelenkkräfte	Gelenkkräfte, Muskelkräfte
Analyse- & Lösungs-methode	GGB Statik oder Prinzip virt. Leistung a) AE -> Hand oder Computer b) VektorE -> Hand	GGB Statik oder Prinzip virt. Leistung a) AE -> Hand oder Computer b) VektorE -> Hand	GGB Newton&Euler Prinzip virt. Leistung DE oder DAE -> Hand oder Computer	GGB Newton&Euler Prinzip virt. Leistung AE -> Hand oder Computer

Tabelle 1.1: Methoden der Statik und Dynamik
(Kräfte steht synonym für Kräfte und Momente,
GGB Statik => statische Gleichgewichtsbedingungen am freigeschnittenen Körper,
Prinzip virt. Leistung => virtuelle Leistung aller eingeprägten Kräfte und Momente im System ist null)
a) Hilfreiche Mathematik-Programme sind Mathematica, Maple, Matlab, etc.
b) Verwende MKS Programme wie in Tab. 1.2 gezeigt.

Beispiel 1.1: Computersimulation der Bewegung eines Ruderers.

Bild 1.1 links die Bewegungsanalyse, rechts die entsprechende Computersimulation.



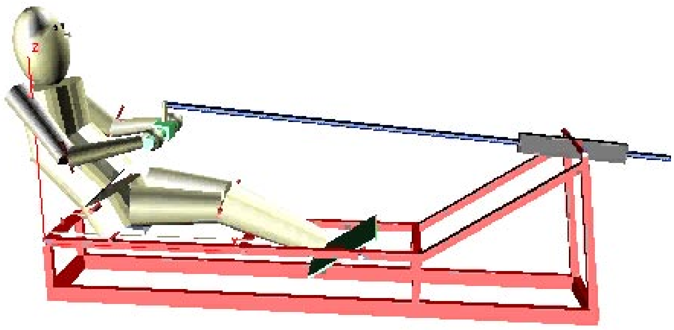
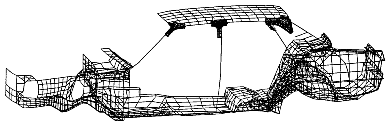
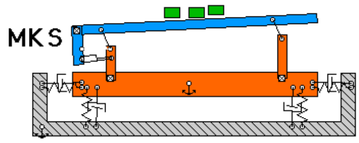


Bild 1.1: Ruderer in der Rudermaschine (Thomas Grund, 2004)

Weitere Stichworte

Bioemchanik	untersucht die Bewegungen von Mensch und Tier vom Standpunkt der Gesetze der Mechanik. Sie erforscht damit die niedrigsten, die einfachen Bewegungen der Natur und schafft so die Voraussetzungen, die komplizierten Formen zu erklären.
Getriebetechnik / Mechanismenlehre	betrachtet vorwiegend die Kinematik und Kinetostatik sowie die kinematische Synthese ebener Mechanismen, Systeme mit mehreren Körpers, die durch Gelenke verbunden sind.
Mehrkörperdynamik	beschäftigt sich mit der Kinematik und Dynamik räumlicher - vielgliedriger Mechanismen mit starren (und elastischen) Körpern und beliebigen Gelenken.
Mechatronik	kommt zur Anwendung, wenn das System neben mechanischen auch elektrische, elektronische, hydraulische Komponenten aufweist.
Maschinendynamik	umfaßt die Berechnung und Auslegung von Bauteilen mit Hilfe von Nachschlagewerken, z.B. für Schrauben, Kugellager, etc.
Finite Elemente Methode	ist ein Lösungsverfahren zur Berechnung der Verformungen und Spannungen von elastischen Körpern infolge seiner Belastungen. Lässt sich aber auch auf die Bewegung von strömender Medien und den Fluss von Magnetwellen anwenden.
Computermechanik	Unter Einsatz des Computers die Bewegungsgleichungen eines mechanischen Systems aufstellen und lösen.

1.1.5 Computerprogramme zur Analyse mechanischer Systeme

Thema	CAD	FEM	MKD / MKS
=			
			
Einsatz	Computerzeichnen eines Systems, Datenerfassung für Geometrie und Material	Berechnung der Verformungen und Spannungen infolge Belastungen	Berechnung der nichtlinearen Kinematik und Dynamik von Systemen mit starren Körpern
Zusatz-optionen	Analyse der Kinematik, Synthesemöglichkeiten, FE-Netzgenerierung	Nichtlineare Kinematik und Dynamik, Bereitung von Daten für MKD	und mit elastischen Körpern, Spannungsberechnung
Pro-gramme	Catia, Euklid Pro-Engineer, AutoCAD, Solid Edge SolidWorks	ANSYS, ABAQUS, MARC, Nastran (Brebbia 1982)	ADAMS, DADS, SIMPACK, WorkingModel RecurDyn (KnowledgeRevolution 1999 , (Schiehlen 1990; Kortüm, Sharp et al. 1993)

Tab. 1.2: Programme aus dem CAE (Computed Aided Enginieering) Bereich.

Beachte intrnet-links zu GT-Programmen unter
http://www.fh-muenchen.de/fb06/professoren/wallrapp/d_wallrapp_o.html

Nehme einfach die Programme der Computermathematik:

☞ Mathematica, Maple, Matlab, etc. und programmiere und löse die Gleichungen selbst!

☞ **Siehe die Ankündigung für den Maple Kurs!**

1.2 Kraft und Schnittprinzip

1.2.1 Lageplan, Freikörper-Bild

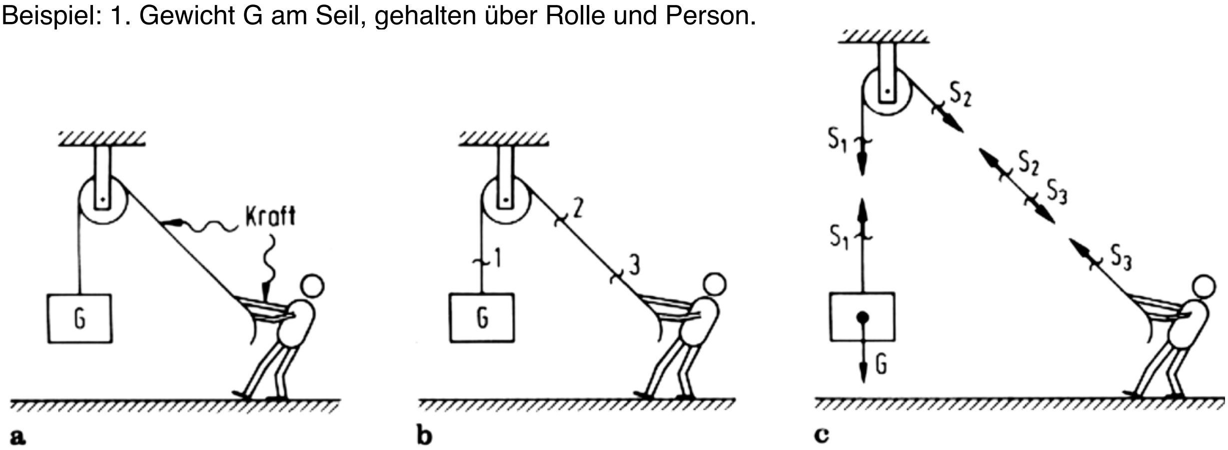
I) Das reale mechanische System muss zunächst abstrahiert werden:

Schema => **Lageplan**, siehe Bilder, Teil a)

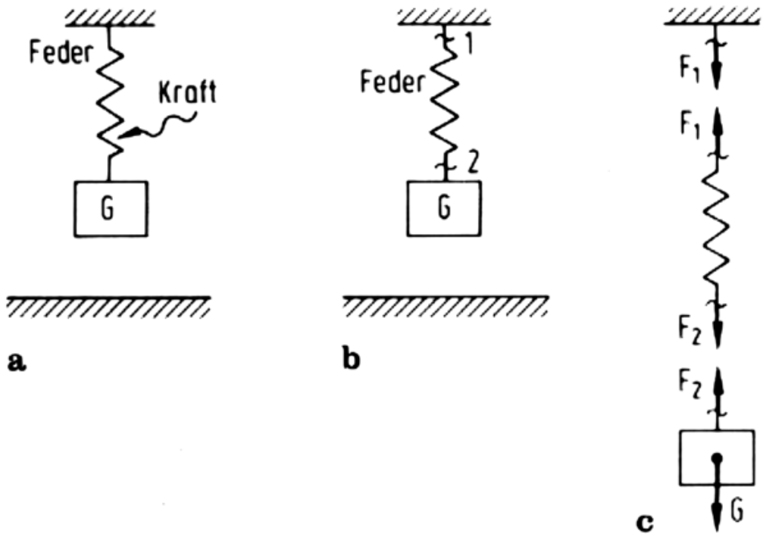
II) Zur Berechnung der Kräfte in den Bauteilen müssen wir die Bauteile durchschneiden und **Schnittkräfte** einführen:

Schnittprinzip => **Freikörper-Bild mit Schnittkräften,** siehe Bilder, Teil b) und c)

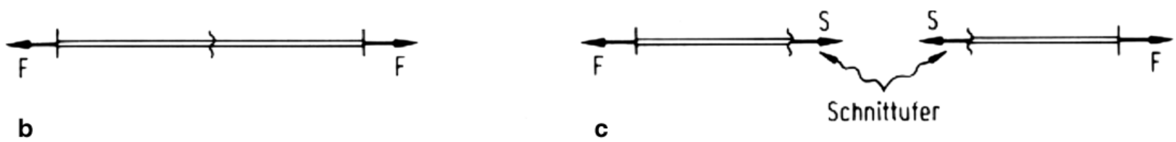
Beispiel: 1. Gewicht G am Seil, gehalten über Rolle und Person.



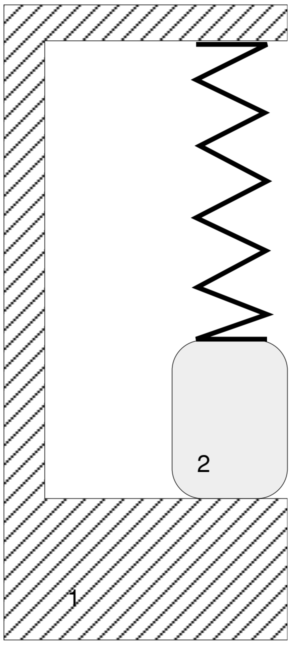
2. Gewicht G an Feder, die an der Decke befestigt ist.



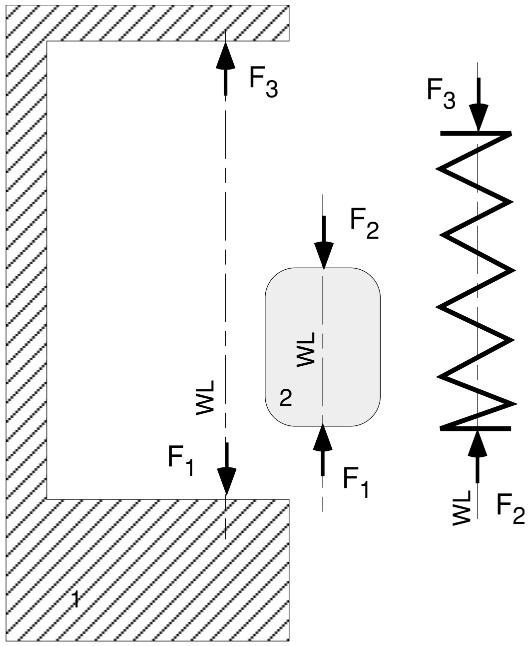
3. Schnitt durch einen Stab mit Zugkraft.



4. Körper 2 eingespannt durch Feder in Zange 1.



a)



b)

1.2.2 Definition Kraft, Kraft am starren Körper

◊ Die **Kraft** ist ein Vektor: $\vec{F}$ mit

- Angriffspunkt P_F
- Betrag F
- Richtungsvektor $\vec{e}_F$
- Wirkungslinie WL und Wirkungsinn WS
- physikalische Einheit: 1 N = 1 kg m / s^2.

Beispiel Kraft am starren Körper

◊ Ein **starrer Körper** ist ein fiktives Gebilde aus Masseteilchen, das sich unter der Einwirkung von Kräften nicht verformt. -> Gegensatz: elastischer Körper.

1.2.3 Einteilung von Kräften

◊ 1. Kräfte unterteilen sich in

+ **äußere Kräfte** (Gewichtskraft, Magnetfeldkraft, Windkraft, etc.) und

+ **innere Kräfte** (Schnittkräfte in Federn, Dämpfern, Gelenken, Lagerungen,

  Sie treten immer paarweise auf.

◊ 2. Kräfte unterteilen sich in

+ **eingeprägte Kräfte** (Gewichtskraft, Magnetfeldkraft, Windkraft, Schnittkräfte von Federn, Dämpfer, Aktoren,)

  Sie beeinflussen die Körperbelastung und die Körperbewegung

+ **Reaktions- oder Zwangs-Kräfte** (Schnittkräfte in Gelenken, Lagerungen,)

  Sie sind die Reaktion auf die eingeprägten Kräfte.

◊ **Gewichtskraft**:

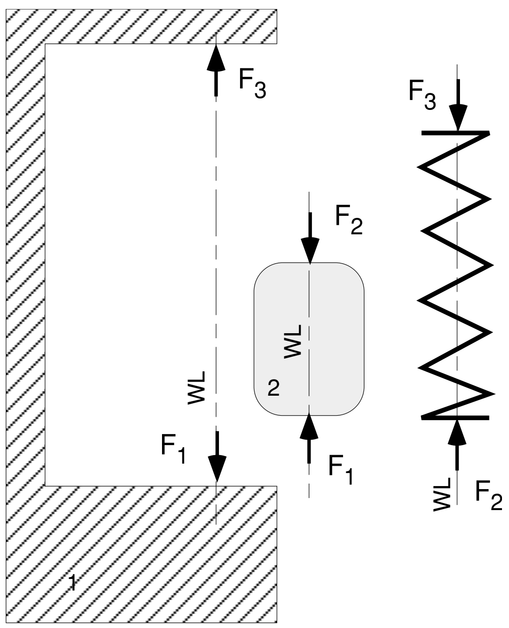
Es gilt $\vec{G} = \vec{F}_g = m\,\vec{g} = \vec{g}\int_B dm$

Sie ist die Anziehungskraft auf einer Masse m, die sich infolge des Gravitationsgesetzes zweier Massen (Newton) , auf der Erde einstellt.

Wir rechnen mit der Erdbeschleunigung $g = 9.81\ m/s^2$.

Für viele Anwendungen (z.B. starrer Körper) können wir die Gewichtskraft im Massenmittelpunkt (S = Schwerpunkt, CM = Center of Mass) vorstellen.

Beispiel: Körper 2 mit Masse im Schwerefeld eingespannt durch Feder in Zange 1. Benenne alle Kräfte



b)

1.3 Axiome der Statik

1.3.1 Axiom 1: Linienflüchtigkeit einer Kraft

Die Wirkung einer Kraft auf einem starren Körper bleibt unverändert, wenn man sie entlang ihrer Wirkungslinie verschiebt. (das gilt nicht am elastischen Körper)

1.3.2 Axiom 2: Gleichgewicht am starren Körper

Zwei Kräfte sind am starren Körper im Gleichgewicht und heben ihre Wirkung auf den starren Körper auf, wenn sie auf der gleichen Wirkungslinie liegen, den gleichen Betrag haben und entgegengesetzt gerichtet sind.

Es gilt: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$ wo $F_1 = F_2$, $WL_{F1} = WL_{F2}$, und $\vec{e}_{F1} = -\vec{e}_{F2}$

$\vec{0}$ = Nullvektor.

1.3.3 Axiom 3: Kräfteparallelogramm

Die Wirkung zweier Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$, die an einem gemeinsamen Punkt P angreifen, ist gleich einer Kraft $\vec{F}_R$, die sich als Diagonale eines mit den Seiten der Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ gebildeten Parallelogramms ergibt.

Es gilt: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_1 = \vec{F}_R$

1.3.4 Axiom 4: Addition/Subtraktion von Gleichgewichtsgruppen

Ist ein starrer Körper mit seinen Kräften im Gleichgewicht, so kann man diesem System beliebige Gleichgewichtsgruppen dazu addieren oder wegnehmen.

1.3.5 Axiom 5: Befreiungsprinzip von Lagrange

Das Gleichgewicht eines nicht freien (gebundenen) Körpers ändert sich nicht , wenn man die Bindungen schneidet und diese durch entsprechende Schnittkräfte ersetzt.

1.3.6 Axiom 6: Reaktionsprinzip (Newton)

Sind zwei Körper (1 und 2) mit einem Gelenk mit einander verbunden, so ist das System äquivalent, wenn man die Körper trennt und die Schnittkräfte (Reaktionskräfte) als actio und reactio (gleich groß und entgegengesetzt) an der Schnittfläche ansetzt.

Es gilt: $\vec{F}_{S1} = -\vec{F}_{S2}$ und $F_{S1} = F_{S2}$.

Festlegung: $F_{S1} > 0$ = Zugkraft, $F_{S1} < 0$ = Druckkraft.

1.3.7 Axiom 7: Reaktionsprinzip zweier glatter Körper

Sind zwei Körper (1 und 2) auf glatter Oberfläche im Kontakt, so steht die Schnittkraft (Reaktionskraft) senkrecht auf der Tangentialebene der beiden Körper.

Es gilt: $\vec{F}_{S1} = -\vec{F}_{S2}$ und $F_{S1} = F_{S2}$. Vielfach auch als Normalkraft F_N bezeichnet.

1.3.8 Axiom 8: Erstarrungsprinzip

Ein freier elastischer Körper ist genau dann im Gleichgewicht, wenn er als starrer Körper im Gleichgewicht wäre.

1.3.9 Axiom 9: System von Körpern

Ein System von Körpern (Mehrkörpersystem) ist genau dann im Gleichgewicht, wenn alle Einzelkörper im Gleichgewicht sind.

1.4 Gleichgewicht eines zentralen Kräftesystems

1.4.1 Resultierende eines zentralen Kräftesystems

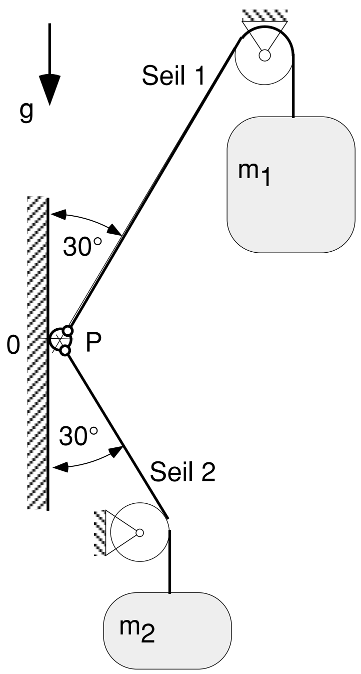
Ein System von Kräften ist ein **zentrales Kräftesystem**, wenn sich alle Kräfte in einem Punkt, hier Q genannt, schneiden.
Die Wirkung eines zentralen Kräftesystems an einem starren Körper ist gleich der Wirkung seiner **Resultierenden**.

Es gilt: **Resultierende** $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \overset{hier}{=} \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$

Koordinatendarstellung mit den Achsen x, y, z:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} R_x &= \textstyle\sum_i F_{ix} \\ R_y &= \textstyle\sum_i F_{iy} \\ R_z &= \textstyle\sum_i F_{iz} \end{aligned} \quad hier: \quad \begin{aligned} R_x &= F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} \\ R_y &= F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} \\ R_z &= F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} \end{aligned}$$

Beispiel: Massen m_1 und m_2 sind über Seile 1 und 2 und reibungsfreier Umlenkrollen an der Maueröse in P befestigt. Bestimme die resultierende Kraft R in der Öse.



1.4.2 Gleichgewicht eines zentralen Kräftesystems

Ein System von Kräften ist Gleichgewicht, wenn es ein **zentrales Kräftesystem** mit Schnittpunkt Q darstellt und dessen Resultierende R gleich null ist.
Alle Wirkungslinien WL_i schneiden sich im Punkt Q.

Es gilt: **Gleichgewicht:** $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} = \mathbf{0};$

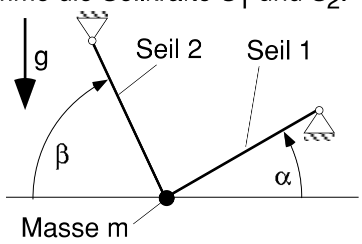
$$R_x = \sum_i F_{ix} = 0$$
$$R_y = \sum_i F_{iy} = 0$$
$$R_z = \sum_i F_{iz} = 0$$

Sonderfall n = 2: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$ wo $F_1 = F_2$, $WL_{F1} = WL_{F2}$ und $\vec{e}_{F1} = -\vec{e}_{F2}$, vgl. Abschn. 1.3.2

Zeichnerische Lösung für n = 3: Geg. F_1, WL_1, F_2, WL_2, Q, Finde WL_3, F_3.
Geg. F_1, WL_1, WL_2, WL_3 Finde F_2, F_3.

Beispiel: Masse m im Schwerefeld an Seil 1 und Seil 2, F_g = 600 N, α = 30°, β = 65°.

Bestimme die Seilkräfte S_1 und S_2.



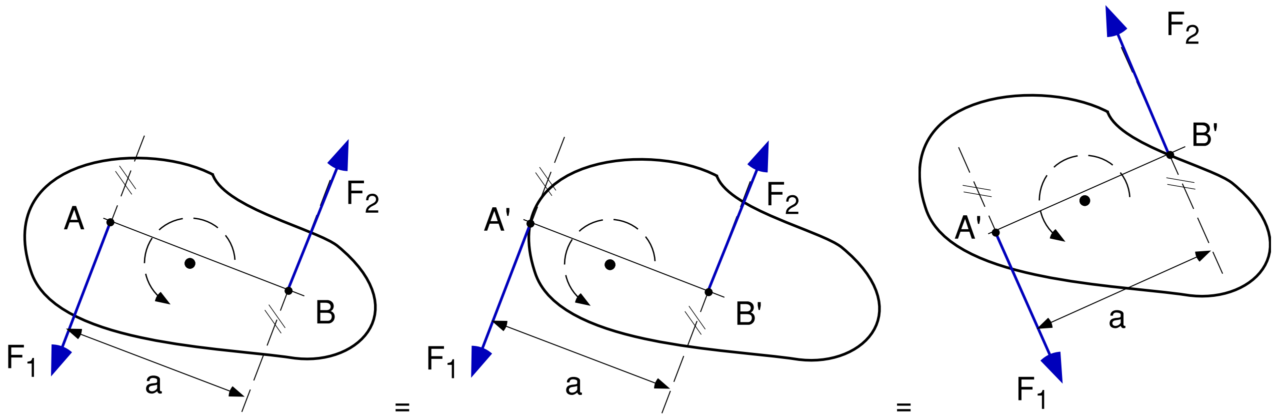
1.5 Kräftepaar und Moment

1.5.1 Kräftepaar

Die Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ mit der Resultierenden $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$ bilden ein **Kräftepaar**, wenn sie den gleichen Betrag haben ($\left|\vec{F}_1\right| = F_1 \quad = F = \quad F_2 = \left|\vec{F}_2\right|$, auf parallelen Wirkungslinien liegen,

entgegengesetzt gerichtet sind und den Abstand *a* bilden.

==> Kräftepaar $\{-F, a, F\}$ mit Drehsinn



Ein Kräftepaar $\{-F, a, F\}$ ist eine unabhängige mechanische Größe.

Ein Kräftepaar $\{-F, a, F\}$ ist auf dem starren Körper frei verschiebbar.

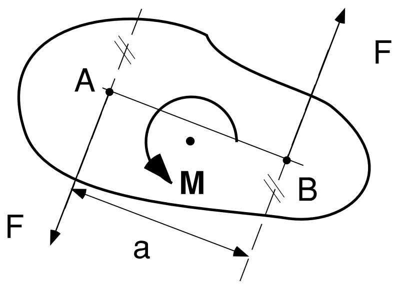
1.5.2 Das Moment

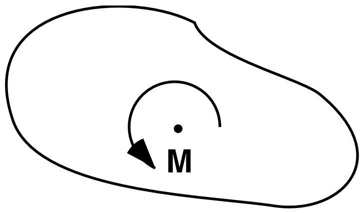
Ein Kräftepaar $\{-F, a, F\}$ mit Drehsinn kann durch ein Moment repäsentiert werden.

Moment M = a F. (Nm).

Zu einem Kräftepaar gehört genau ein Moment.
Ein Moment kann aus ∞ vielen Kräftepaaren herrühren.

M = a F = a* F* = ... mit selben Drehsinn.

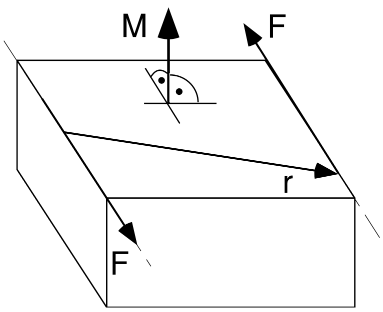


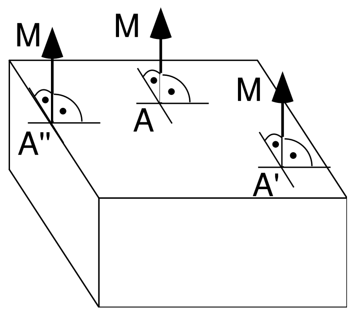


Das **Moment** mit Betrag M = a F ist ein Vektor, der senkrecht auf der Ebene der Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{F}$ steht.

Es gilt: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ (rechte Handregel)

Koordinatendarstellung $\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{r}}\,\mathbf{F}$.





Die Drehachse eines Momentes kann auf dem starren Körper frei verschoben werden.

=> Das Moment ist ein freier Vektor auf dem starren Körper.

1.5.3 Das Moment einer Kraft bezüglich Punkt P

Wirkt an einem Punkt A die Kraft $\vec{F}$, so ergibt sich das Moment M, bezogen auf einem anderen Punkt P, (P $\neq$ A und P nicht auf der Wirkungslinie von $\vec{F}$) zu

$$\vec{M}_{(P)} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \text{wo } \vec{r} = \overrightarrow{PA} \text{ der Ortsvektor von P nach A.}$$

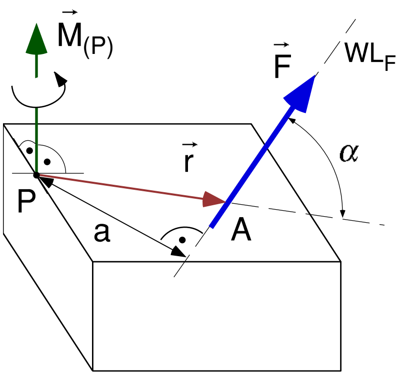
Für den Betrag gilt: $M_{(P)} = r\,F\,\sin(\alpha) = a\,F$

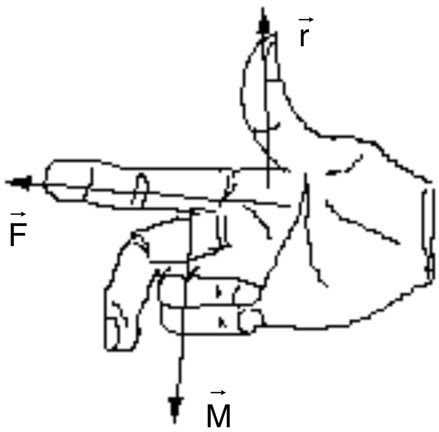
wo a = senkrechter Abstand der WL_F von P: $a = r \sin \alpha$

Koordinatendarstellung 3D: $\mathbf{M}_{(P)} = \tilde{\mathbf{r}}\,\mathbf{F} = \begin{pmatrix} +r_y F_z - r_z F_y \\ -r_x F_z + r_z F_x \\ +r_x F_y - r_y F_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}.$

In der x-y- Ebene gilt: $M_{(P)} = r_x\,F_y - r_y\,F_x = M_{z(P)}$ = a F.

In der x-z- Ebene gilt: $M_{(P)} = r_z\,F_x - r_x\,F_z = M_{y(P)}$ = a F.



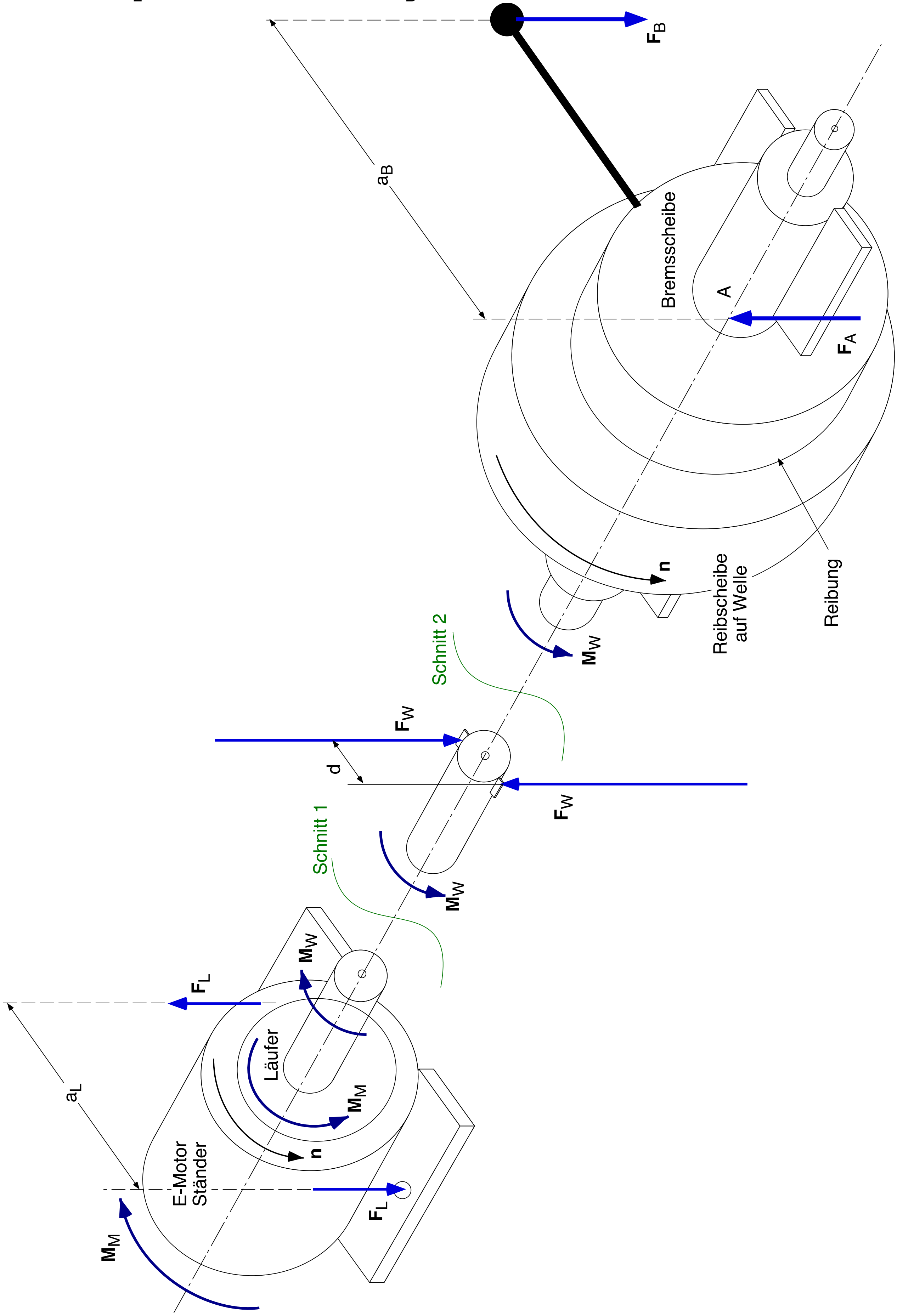


Wirken auf einem Körper n Kräfte $\vec{F}_i$, i = 1, ... n, am Punkt A_i, so ergibt sich daraus das Moment M, bezogen auf einem Punkt P, zu

$$\vec{M}_{(P)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i \qquad \text{wo } \vec{r}_i = \overrightarrow{PA_i} \text{ die Ortsvektoren von P nach } A_i.$$

Beispiel 1.5.1 **Kraft - Kräftepaar - Moment:** Motorprüfstand mit Reibbremse.

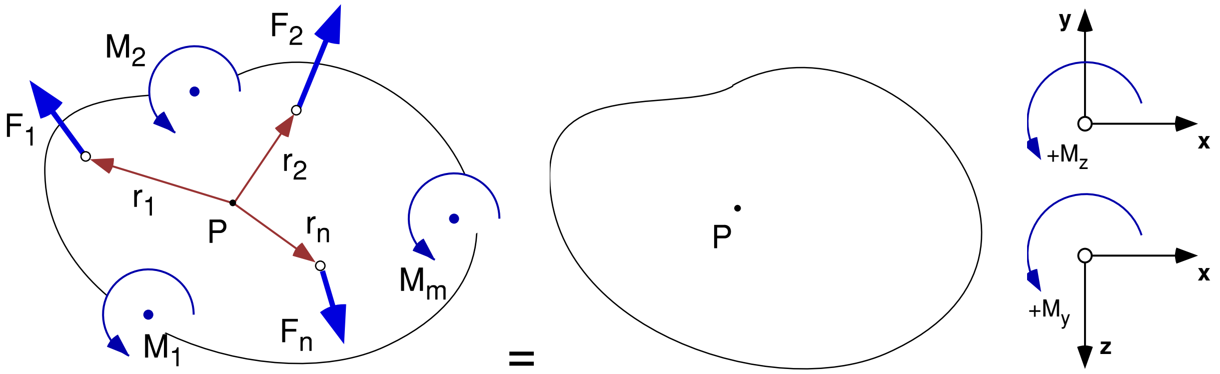
E-Motor mit Drehzahl n = 191 U/min, Motorleistung P_M = 40 W, Wellendurchmesser d = 10 mm, Lagerabstand a_L = 100 mm, Bremshebellänge a_B = 200 mm. Bestimme alle Kraftgrößen.



1.6 Gleichgewicht von Kräften und Momenten an einem Körper

1.6.1 Erweitertes Äquivalenzprinzip

Jedes System von Kräften, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ... \vec{F}_n$ und Einzelmomenten $\vec{M}_1, \vec{M}_2, ... \vec{M}_m$ kann in seiner Wirkung auf einen **starren Körper** in äquivalenter Weise durch eine **Dyname** (Kraftwinder) $\left\{\vec{R}, \vec{M}_P\right\}$ bezogen auf den Punkt P, beschrieben werden.



Für die auf den Punkt P bezogene **Dyname** gilt:

Resultierende Kraft	$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$
Resultierendes Moment bez. P	$\vec{M}_P = \vec{M}_{(P)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{m} \vec{M}_i$

1.6.2 Allgemeines Gleichgewichtsaxiom

Ein mechanisches System befindet sich im Zustand der Ruhe (Gleichgewicht) oder im Zustand der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn die angreifenden Kräfte und Momente in ihrer Wirkung auf einen starren Körper einer verschwindenden Dyname mit $\vec{R} = 0$ und $\vec{M}_P = 0$ äquivalent sind.

Die Gleichgewichtsbedingungen für einen **beliebigen Punkt P** lauten:

Resultierende Kraft	$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0}$
Resultierendes Moment bez. P	$\vec{M}_P = \vec{M}_{(P)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{m} \vec{M}_i = \vec{0}$

Die **Gleichgewichtsbedingungen für einen beliebigen Punkt P** in Koordinatendarstellung ergeben 6 skalare Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\sum F_{ix} = 0\\
&\sum F_{iy} = 0\\
&\sum F_{iz} = 0\\
&\sum\left(+r_{iy} F_{iz} - r_{iz} F_{iy}\right) + \sum M_{ix} = 0\\
&\sum\left(-r_{ix} F_{iz} + r_{iz} F_{ix}\right) + \sum M_{iy} = 0\\
&\sum\left(+r_{ix} F_{iy} - r_{iy} F_{ix}\right) + \sum M_{iz} = 0
\end{aligned}$$

In der x-z-Ebene genügen 3 Gleichungen

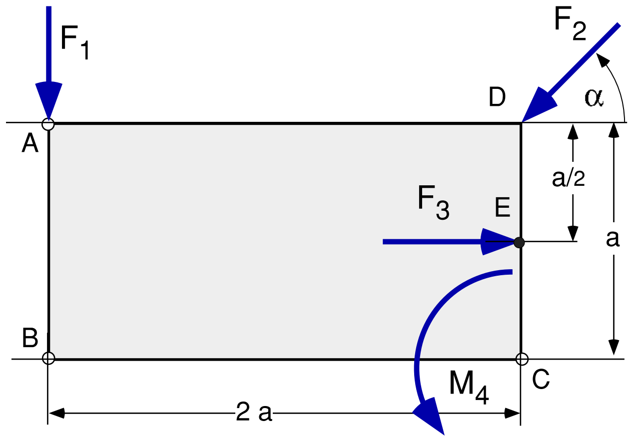
$$\begin{aligned}
&\sum F_{ix} = 0\\
&\sum F_{iz} = 0\\
&\sum\left(-r_{ix} F_{iz} + r_{iz} F_{ix}\right) + \sum M_{iy} = 0
\end{aligned}$$

Beispiel 1.6.2

Für das ebene Kräftesystem bilde die Dyname (Resultierende **R** und resultierendes Moment $\mathbf{M}_p$) im Punkt P, wenn F_1 = 5 N, F_2 = 2 N, F_3 = 4 N, M_4 = 10 Ncm, a = 4 cm, α = 45° und

a) Wähle P = A.

b) Bestimme die Dyname für P = C.



Ergebnisse: x-y-System: **R** = $(2.59, -6.41)^T$ N, $M_{P=A}$ = +6.686 Ncm, $M_{P=B}$ = -3.657 Ncm, $M_{P=C}$ = +47.657 Ncm,

1.7 Lager und Freiheitsgrade starrer Körper

1.7.1 Definitionen

Ein freier starrer Körper im Raume hat b = 6 Freiheitsgrade (FHG); in der Ebene b = 3 FHG.

Lager (Auflager) der Körper zur Umgebung und **Gelenke** zwischen den Körpern schränken die Bewegungen der Körper ein.

Ein Lager / Gelenk bewirkt u = 0 ... 6 kinematischen Zwangsbedingungen.
Die Zahl der Zwangsbedingungen u ist gleich der Wertigkeit eines Lagers.

Die noch möglichen Bewegungen eines Körpers infolge eines Lagers / Gelenkes ist die Zahl der **Freiheitsgrade f = 6 ... 0.**
Es gilt für ein Lager / Gelenk: **f = b – u**

Zur Einhaltung der kinematischen Zwangsbedingungen sind in den Lagern / Gelenken laut Schnittprinzip **Reaktionskräfte und -momente** (auch Zwangskräfte und -momente genannt) einzuführen.
Ihre **Wirkung** ergibt sich aus der Richtung und Aussage der Zwangsbedingung: z.B.

Drehung φ_x eingeschränkt: -> Reaktionsmoment M_x einführen

Verschiebung s_x eingeschränkt: -> Reaktionskraft F_x einführen.

Die Größe der Reaktionskräfte und -momente sind noch unbekannt. Sie ergibt sich aus den eingeprägten Kräften am Körper und können mit Hilfe der Dynamik berechnet werden.

1.7.2 Lagerungen in der Ebene (b=3)

Tabelle 1.1: Lagerungen in der Ebene

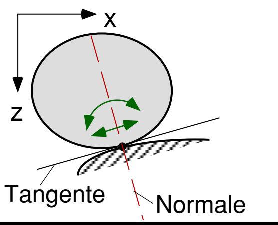
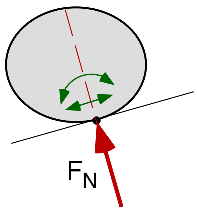
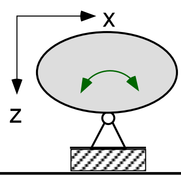
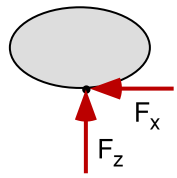
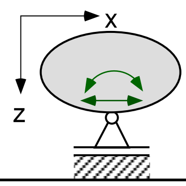
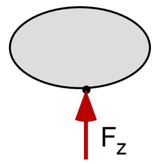
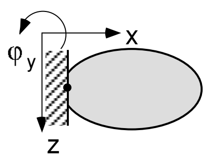
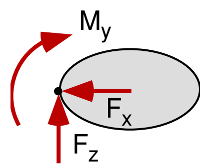
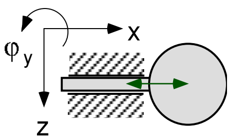
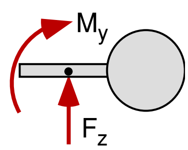
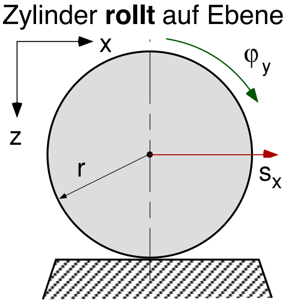
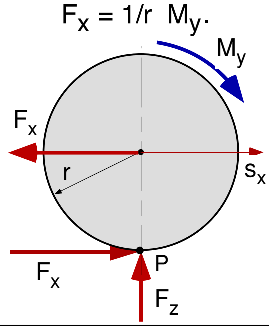
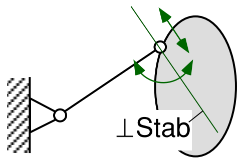
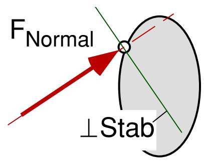
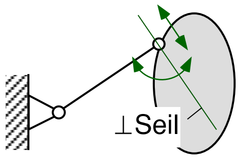
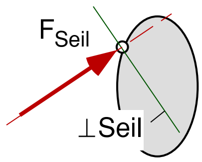
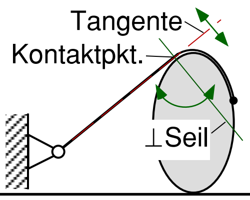
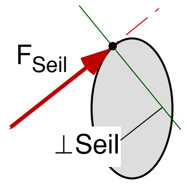
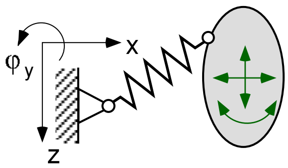
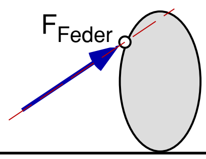
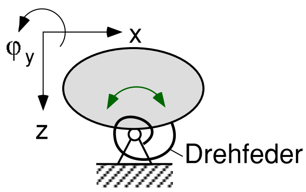
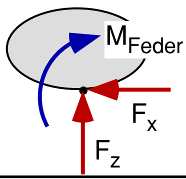
<table>
<tr><th>Name</th><th colspan="4">Kinematik</th><th>Statik</th></tr>
<tr><th>Symbol</th><th>f</th><th>Bewegung</th><th>u = Wertigk.</th><th>Zwangs-bedingungen</th><th>Reaktionskräfte / -momente</th></tr>
<tr><td>Reibungsfreie Berührung
</td><td>2</td><td>$s_{tangential}$
φ_y</td><td>1</td><td>$s_{Normal} = 0$</td><td></td></tr>
<tr><td>Drehlager, Drehgelenk
</td><td>1</td><td>φ_y</td><td>2</td><td>$s_x = 0,\ s_z = 0$</td><td></td></tr>
<tr><td>Loslager,
Dreh-Schub-Gelenk
</td><td>2</td><td>$s_x,\ \varphi_y$</td><td>1</td><td>$s_z = 0$</td><td></td></tr>
<tr><td>Fix-Lager,
feste Einspannung
</td><td>0</td><td>–</td><td>3</td><td>$s_x = 0,\ s_z = 0,$
$\varphi_y = 0$</td><td></td></tr>
<tr><td>Schubgelenk, Führung
</td><td>1</td><td>$s_x,$</td><td>2</td><td>$s_z = 0,\ \varphi_y = 0$</td><td></td></tr>
<tr><td>Zylinder rollt auf Ebene
</td><td>1</td><td>φ_y</td><td>2</td><td>$s_x = r\ \varphi_y,$
$s_z = 0$
mit r =
Rollradius
Haftreibung!</td><td>$F_x = 1/r\ M_y.$
</td></tr>
</table>

Tabelle 1.1: Lagerungen in der Ebene (Fortsetzung)

Name / Symbol	Kinematik: f	Bewegung	u = Wertigk.	Bedingung	Statik: Reaktionskräfte / -momente
gelenkig gel. starrer Stab, Pendelstütze 	2	$s_{\perp Stab}$ φ_y	1	$s_{Stabrichtg} = 0$	
Undehnbares Seil 	2	$s_{\perp Seil}$ φ_y	1 einseitig	$s_{Seilrichtg} = 0$	nur Zugkräfte 
Undehnbares Seil an Punkt und Rolle 	2	$s_{\perp Seil}$ φ_y	1 einseitig	$s_{Seilrichtg} = 0$	nur Zugkräfte, tangential an Rolle 
Aber! Axiale Feder 	3	s_x, s_z, φ_y,	0		eingeprägte Schnittkraft $F_{Feder} =$ 
Aber! Drehfeder mit Drehgelenk 	1	φ_y	2	$s_x = 0$, $s_z = 0$	eingeprägtes Schnittmoment $M_{Feder} =$ 

1.7.3 Ebene Lager mit Reibung

Reibung ist ein Widerstand gegen die Bewegung.

Reibung bewirkt Verlustleistung, die in Wärme umgewandelt wird.

Reibung wird durch **Reibungskräfte** für lineare Bewegungen und **Reibmomente** für Drehbewegungen zweier benachbarter Körper (2 gegenüber 1) abgebildet. Sie sind eingeprägte Größen.

Die lineare Relativgeschwindigkeit sei $\vec{v}_{21}$, die relative Drehgeschwindigkeit sei $\vec{\omega}_{21}$.

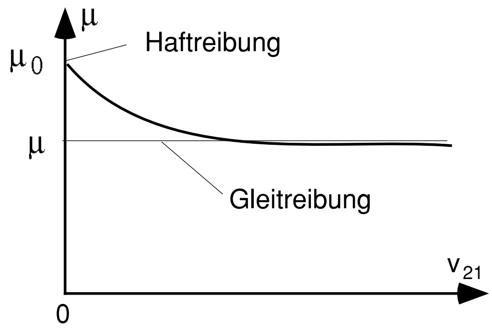
Reibungsmodelle:

Gleitreibung: $\vec{v}_{21} > 0$ oder $\vec{\omega}_{21} > 0$: Bewegung von Körper 2 bez. 1 vorhanden:
Reibkraft $\vec{F}_{R21}$ wirkt entgegen der Relativbewegung $\vec{v}_{21}$ oder
Reibmoment $\vec{M}_{R21}$ wirkt entgegen der Relativbewegung $\vec{\omega}_{21}$.

Haftreibung: $\vec{v}_{21} = 0$ oder $\vec{\omega}_{21} = 0$: keine Bewegung vorhanden:
Betrag F_{R21} der Reibkraft $\vec{F}_{R21}$ ist stets größer als erforderliche Reaktionskraft,
oder Betrag M_{R21} der Reibkraft $\vec{M}_{R21}$ ist stets größer als erforderliches Reaktionsmoment,
in beiden Wirkrichtungen.

Vereinfachtes Modell Reibkraft = Reibbeiwert μ · Normalkraft.

Reibbeiwerte (vgl. Dubbel, Hütte, etc,)



Werkstoffpaarung	μ trocken	μ gefettet
Stahl auf Stahl	0,15	0,01
Metall auf Holz	0,4 ... 0,5	0,1
Stahl auf Eis	0,015	-
Holz auf Holz	0,2 .. 0,4	0,08
Bremsbelag auf Stahl	0,5 .. 0,6	0,3 .. 0,5

Beispiele für Gelenke: Die genannten Kräfte sind für Körper 2 eingezeichnet!

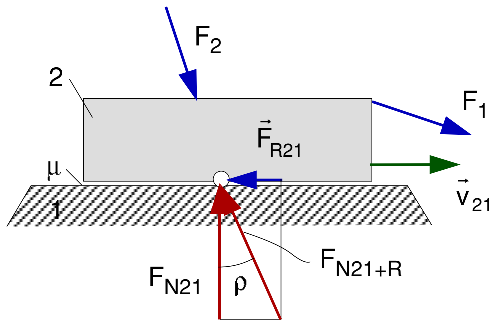
Schubgelenk - Gleitreibung:

Reibkraft $\vec{F}_{R21} = -\mu F_{N21} \dfrac{\vec{v}_{21}}{|\vec{v}_{21}|}$

Betrag $F_{R21} = \mu F_{N21}$

Gelenkkraft $F_{N21+R} = \sqrt{F_{N21}^2 + F_{R21}^2} = F_{N21}\sqrt{1+\mu^2}$

Reibwinkel $\rho = \arctan \mu$



Drehgelenk - Gleitreibung:

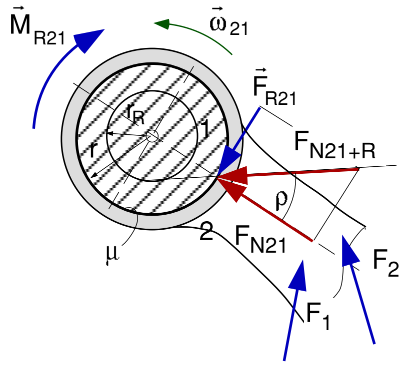
Zapfenradius r

Reibkraft-Betrag $F_{R21} = \mu F_{N21}$

Reibmoment $\vec{M}_{R21} = -\mu\, r\, F_{N21} \dfrac{\vec{\omega}_{21}}{|\vec{\omega}_{21}|}$

Betrag $M_{R21} = r\ F_{N21} = r_R\ F_{N21+R}$

Reibradius $r_R \approx \mu\, r$



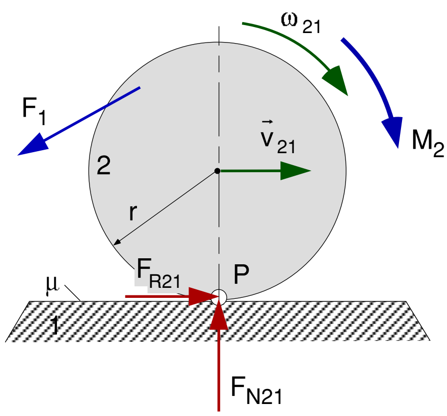
Rollgelenk - Haftreibung: (vgl. Rollgelenk in 1.7.2)

Rollradius r

Lineargeschwindigkeit $v_{21} = r\ \omega_{21}$

Reibkraft $\vec{F}_{R21} = -\mu_0 F_{N21} \dfrac{\vec{v}_{21}}{|\vec{v}_{21}|}$

Betrag $F_{R21} = \mu_0 F_{N21}$

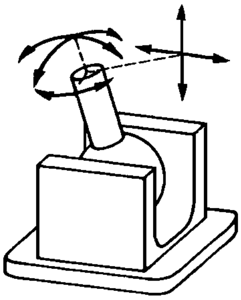
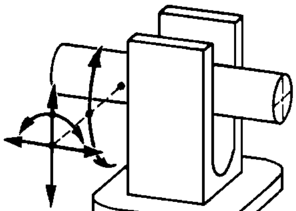
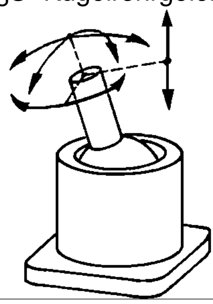
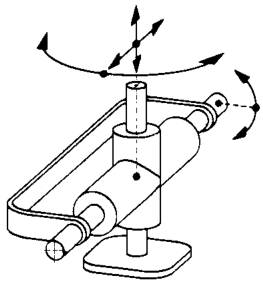
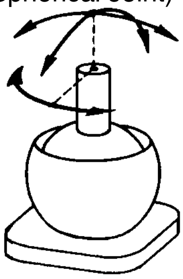
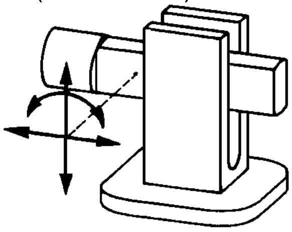
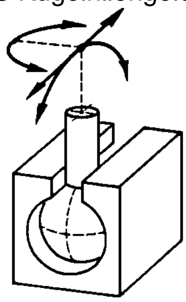
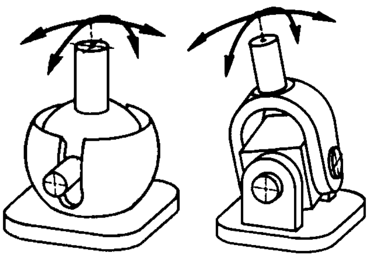
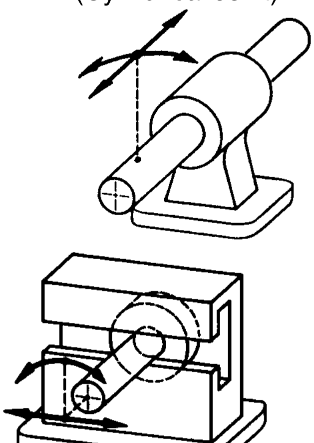
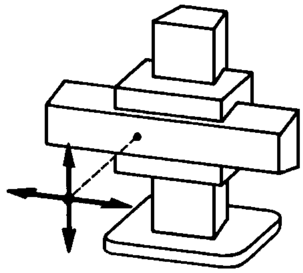
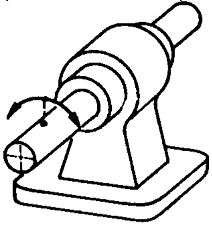
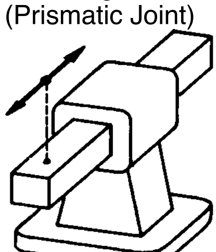
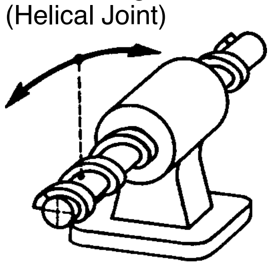


Rollen ist gewährleistet, wenn F_{R21} >= – Summe eingeprägter Kräfte II zu $\vec{v}_{21}$.

Punkt P ist der momentane Drehpunkt ($v_P = 0$, wie ein Drehgelenk).

1.7.4 Räumliche Lager

Tabelle 1.2: Formschlüssige Gelenke mit 1 bis 5 Gelenkfreiheitsgraden

FGH			
5	23) D_3S_2- Kugelflächengelenk 		
4	24) D_2S_2- Zylinderflächengelk. 	25) D_3S- Kugelrohrgelenk 	26) D_2S_2 - Doppeldrehschubg. 
3	27) D_3 - Kugelgelenk (Spherical Joint) 	28) DS_2- Plattengelenk (Planar Joint) 	29) D_2S Kugelrillengelenk 
2	30) D_2 - Kreuz-(Kardan-)gelenk (Universal (Tait-Bryan) Joint) 	31) DS - Drehschubgelenk (Cylindrical Joint) 	32) S_2 - Doppelschubgelenk 
1	33) D - Drehgelenk (Revolute Joint) 	34) S - Schubgelenk (Prismatic Joint) 	35) W - Schraubgelenk (Helical Joint) 

1.7.5 Freiheitsgrade des starren Körpers mit Lagerungen

Die Zahl der Freiheitsgrade eines starren Körpers mit g Lagerungen bzw. Gelenken ergibt sich zu

$$f_K = b - \sum_{k=1}^{g} u_k \quad \text{FHG.}$$

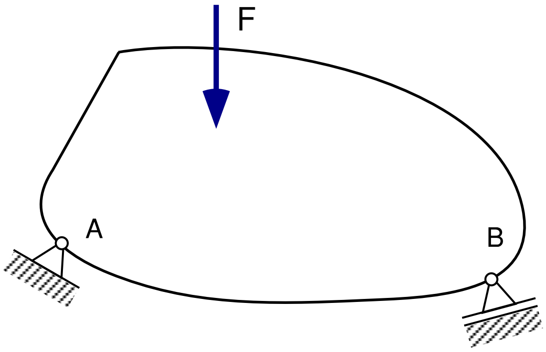
Aussage:

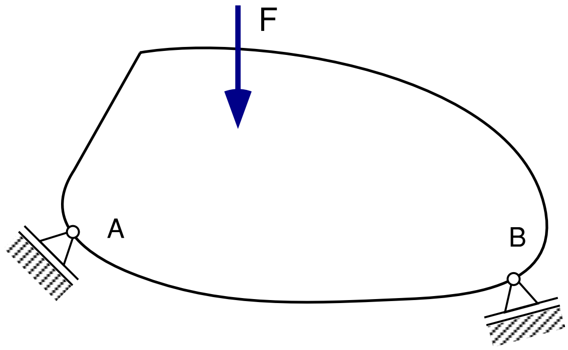
$f_K = 0$: starrer Körper ist **statisch bestimmt gelagert**,
keine Bewegung möglich.
Reaktionskräfte / - momente mit Hilfe der Statik lösbar.

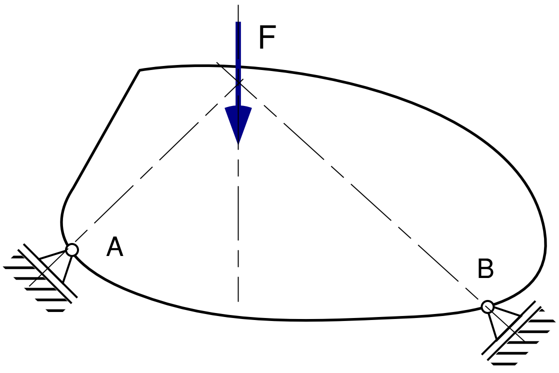
$f_K > 0$: starrer Körper ist **nicht statisch bestimmt gelagert**,
Körper wird sich bewegen.
Problem mit der Kinetik lösbar.

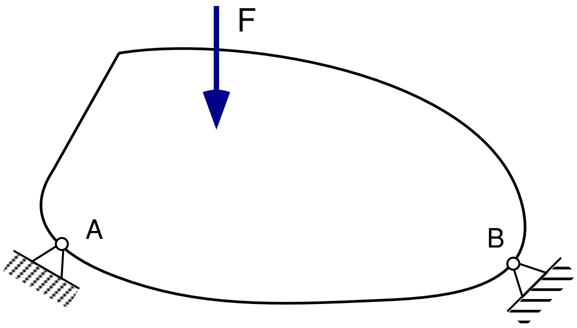
$f_K < 0$: starrer Körper ist **statisch überbestimmt gelagert**,
keine Bewegung möglich.
Reaktionskräfte / - momente nur mit Hilfe der Elastostatik lösbar.

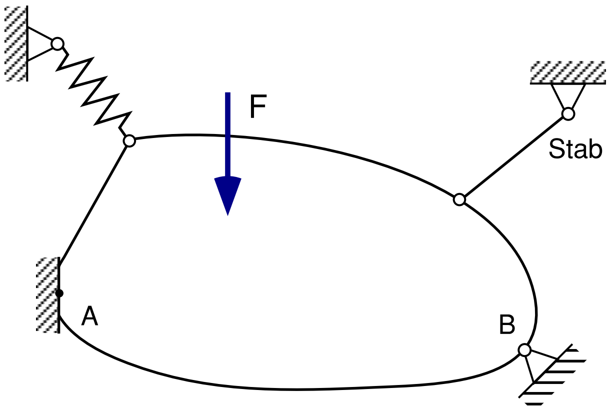
Beispiele 1.7.5 Bestimme Freiheitsgrade, Lagerreaktionen, Anzahl Unbekannte, Lösbarkeit.





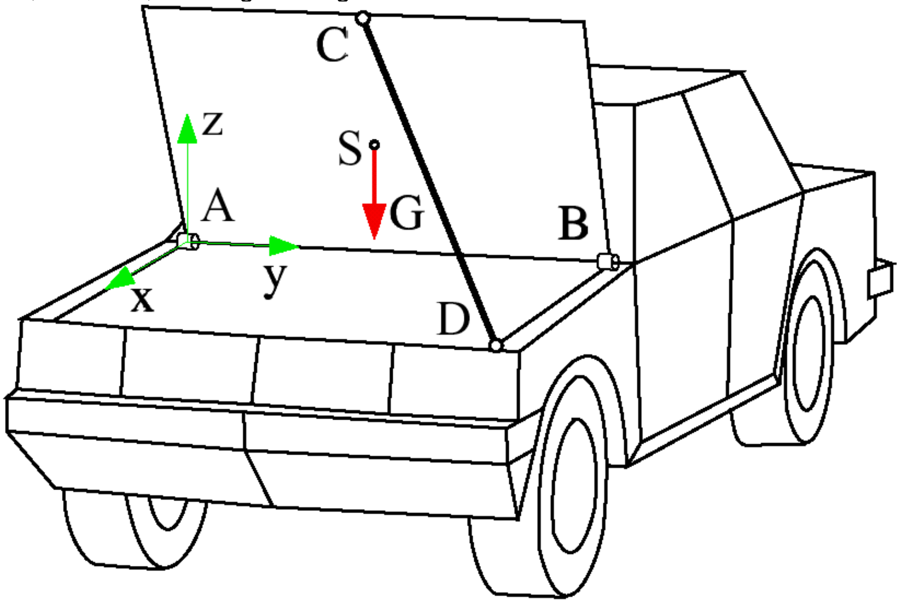



F
A
B


F
Stab
A
B

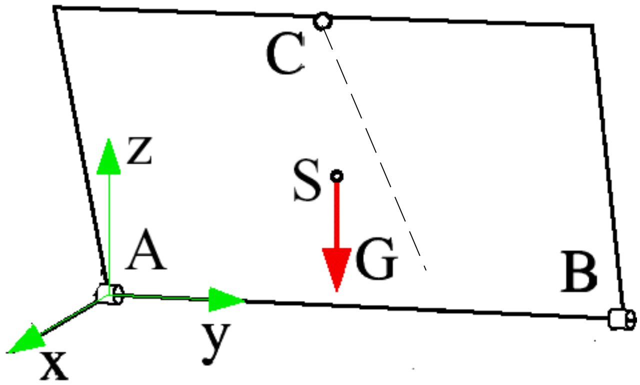
1.7.6 Beispiel Abstützung der Motorhaube.

aus TM I, Prof. Rill, FH-Regensburg

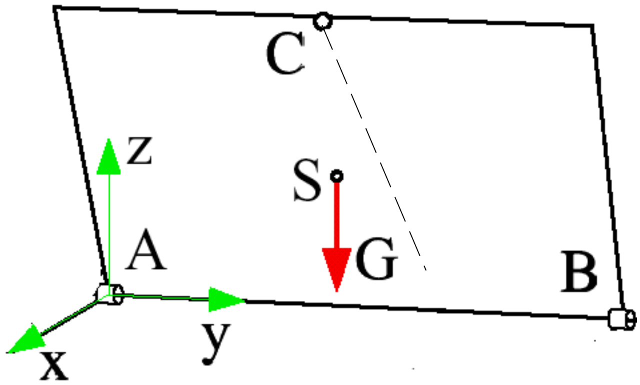


Die Motorhaube ist in A und B drehbar gelagert. In S wirkt die Gewichtskraft G = 50 N. Die Haube wird durch eine Pendelstütze in CD offen gehalten.

a) Bestimme Freiheitsgrade, Lagerreaktionen, Anzahl Unbekannte, Lösbarkeit.



b) Verändere die Lager so, damit die Aufgabe mittels Statik lösbar ist.



c) Berechne die Lagerreaktionen aus b)

Die Koordinaten in mm sind:

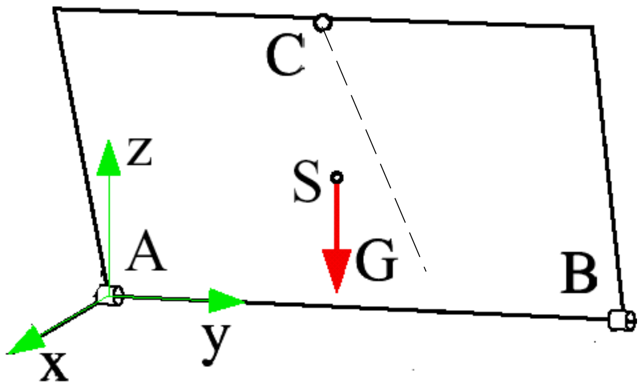
$\underline{r}_{AB}$ = (0 I 1500 I 0)^T

$\underline{r}_{AC}$ = (500 I 750 I 866)^T

$\underline{r}_{AD}$ = (1000 I 1500 I 0)^T

$\underline{r}_{AS}$ = (250 I 750 I 433)^T

Ergebnisse: F_S = 18.05 N, A_x = 7.22 N, A_y = 10.82 N, A_z = 25 N, B_x = 0, B_z = 12.486 N



1.8 Gleichgewicht von Mehrkörpersystemen

Ein Mehrkörpersystem (MKS) ist ein System besteht aus n beweglichen Körpern (ohne Umgebung / Gestell), die durch Gelenke (Lager, Bindungen)) mit der Umgebung oder untereinander verbunden sind. Neben den Reaktionskräften der Gelenke (Lager) wirken an ihnen noch eingeprägte Kräfte und Momente.

Das Mehrkörpersystem (MKS) ist in Gleichgewicht, wenn jeder Körper selbst im Gleichgewicht ist.

Die Lagerreaktionen zum Gestell sind mit den äußeren eingeprägten Kräften/Momenten im Gleichgewicht.

Vorgehen:

1. Bestimme die Freiheitsgrade f_{MKS} des Mehrkörpersystems

$$\boxed{f_{MKS} = b\,n - \sum_{k=1}^{g} u_k} \text{ FHG}$$

wo b = Zahl der FHG des freien Körpers, (b = 6 für 3D, b = 3 für 2D Probleme)

n = Zahl der Körper (ohne Gestell),

g = Zahl der Gelenke

u_k Zahl der Bewegungseinschränkungen im Gelenk k.

2. Unterbinde die freie Bewegungen des Systems durch Hinzunahme von Reaktionskräften bzw. Reaktionsmomenten.

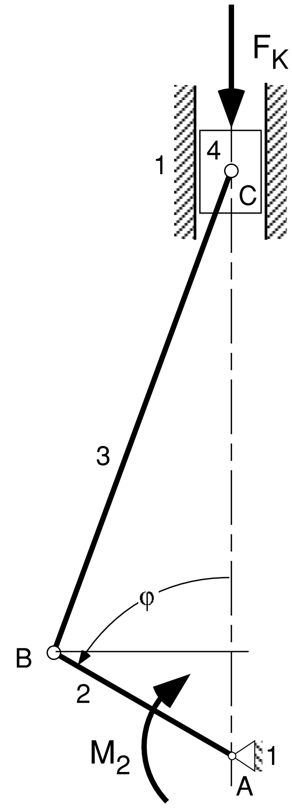
3. Schneide jeden Körper aus seiner Umgebung frei und ersetze die Wirkungen der Gelenke und Federn etc. durch Kräfte und Momente.

4. Stelle die Gleichgewichtsbedingungen an jeden Körper auf (vgl. Abschn. 3.6).

5. Löse das Gleichungssystem nach den Unbekannten auf.

6. Prüfe die Bilanz der äußeren Kräfte/Momente mit den Gestellreaktionen.

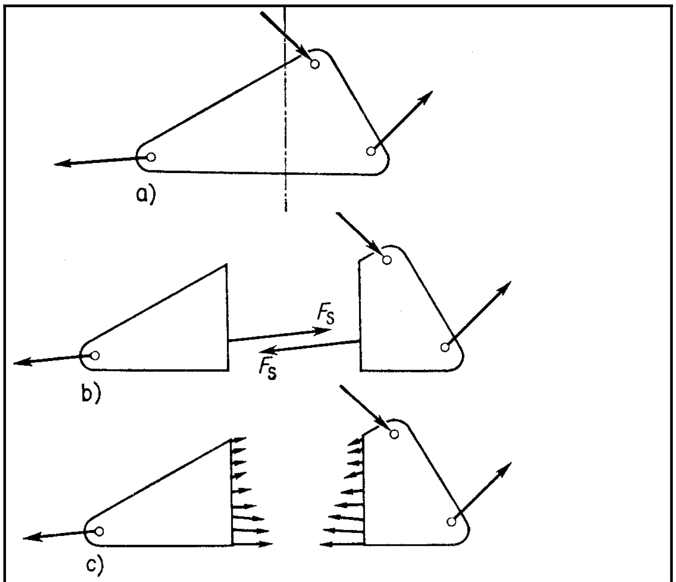
Beispiel 1.8.1: Der Kolbenmotor wird durch Kolbenkraft F_K am Kolben 4 belastet. Gewichtskräfte und Reibung werden nicht berücksichtigt.
Gesucht ist das dazu gehörenden Moment M_2 an der Kurbel 2 abhängig von φ.
Werte die Gleichungen für $\varphi = 60°$, $F_K = 20$ N, r = AB = 30 mm, l = BC = 60 mm aus.



1.9 Innere Kräfte und Momente in Bauteilen

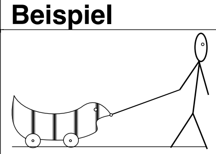
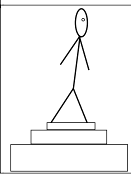
Lasten auf Bauteilen (Körpern) verursachen nicht nur Auflagerkräfte und Einspannmomente, sondern auch Beanspruchungen (Kräfte, Spannungen = Kräfte pro Fläche) im Inneren dieser Bauteile.
Diese inneren Beanspruchungen werden im Weiteren (**innere) Schnittgrössen** genannt.

Schnittgrössen dienen der Vorbereitung zur Untersuchung der **Festigkeit von Bauteilen**.



a) Nicht zerschnittenes Konstruktionsteil
b) Resultierende der inneren Kräfte für einen Schnitt
c) Auf der Schnittfläche verteilte innere Kräfte

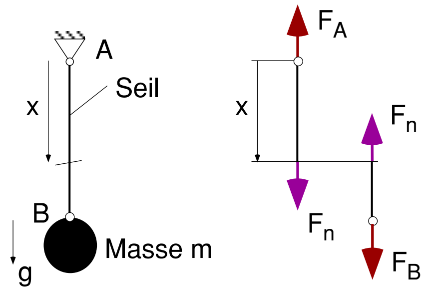
Folgende Bauteilformen sind denkbar:

Formen	Definition	Schnittgrössen	Beispiel
Seile (Saiten, Ketten)	sind schlanke, dehnsteife und biegeweiche, torsionsweiche Bauteile.	Sie ergeben nur Zugkräfte in Seilrichtung.	
Stäbe	sind schlanke, dehnsteife, torsionssteife, aber biegeweiche Bauteile.	Sie ergeben Längskräfte (Zug oder Druck) und / oder Torsionsmomente.	ist nur eine vereinfachtes Modell
Balken	sind schlanke, dehnsteife, torsionssteife und biegesteife Bauteile.	Sie ergeben Längskräfte (Zug oder Druck), Querkräfte, Biegemomente und Torsionsmomente.	
Dicke, gedrungene Bauteile:	Hier ist die 3D-Kontinuumsmechanik anzuwenden	FEM-Theorie.	

Schlank heißt hier, dass Quermaße sehr viel kleiner sind als die Bauteillänge.

Merke:
Die Schnittgrössen an der Stelle x lassen sich mit Hilfe der Statik starrer Körper berechnen.
Bei allen unstetigen Änderungen der Belastung des Bauteiles ist ein neuer Bereich festzulegen.

1.9.1 Gestreckte Seile - Zug



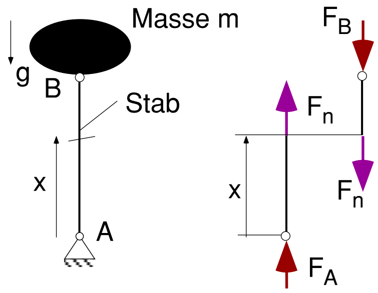
Ein Seil kann nur Zugkräfte aufnehmen.

Betrachten wir ein Seil zwischen den Punkten A und B, so ist als Schnittgröße im Seil die Längskraft

$$\boxed{F_n(x) = F_A = \text{konst. bez. } x \qquad (1.9.1)}$$

in positiver x-Richtung am x-seitigen Schnittufer anzusetzen.

1.9.2 Gerade Stäbe - Zug/Druck



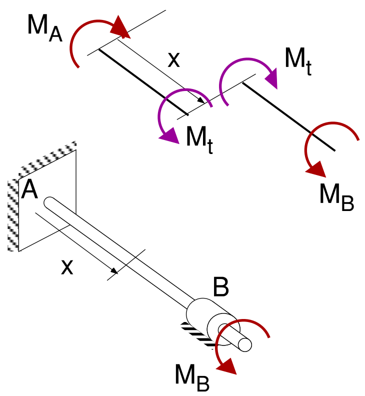
Ein Stab kann Zug- oder Druckkräfte aufnehmen.
Als Schnittgröße ist somit die Längskraft F_n (x) aus dem

Gleichgewicht in x-Richtung $F_n(x) + \Sigma F_x = 0 = F_n + F_A = 0$

anzusetzen. Folgt:

$$\boxed{\begin{array}{l} F_n(x) = -F_A = \text{konst über x. \^{}} \qquad (1.9.2) \\ F_n < 0 \quad \text{==> Druckkraft,} \quad F_n > 0 \quad \text{==> Zugkraft.} \end{array}}$$

1.9.3 Gerade Stäbe - Torsion



Für Torsionsstäbe gilt in analoger Weise zu 1.9.2 für das Torsionsmoment $M_t(x)$

Gleichgewicht um x-Achse

$M_t(x) + \Sigma M_x = 0 = M_t - M_A = 0$

Folgt:

$$\boxed{M_t(x) = M_A = \text{konst. bez. } x \qquad (1.9.3)}$$

1.9.4 Gerader Balken in der Ebene mit diskreten Lasten

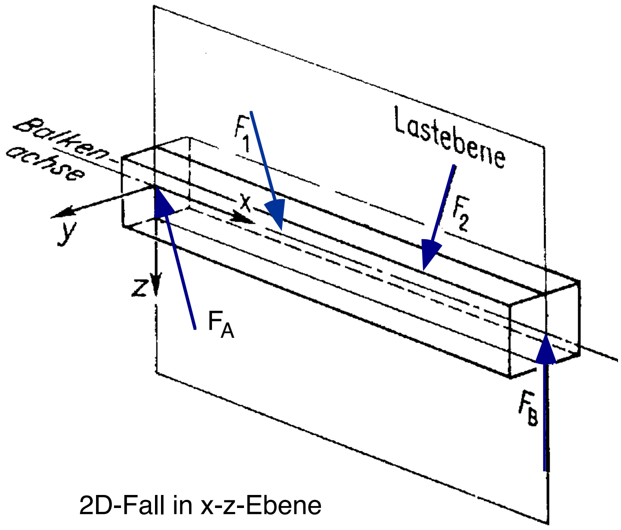
Ein Balken ist ein schlankes Bauteil, dessen Ausdehnungen nur in Richtung der Balkenachse betrachtet werden.

Die **Balkenachse** liegt in der Querschnitt-Symmetrieachse des Balkens.

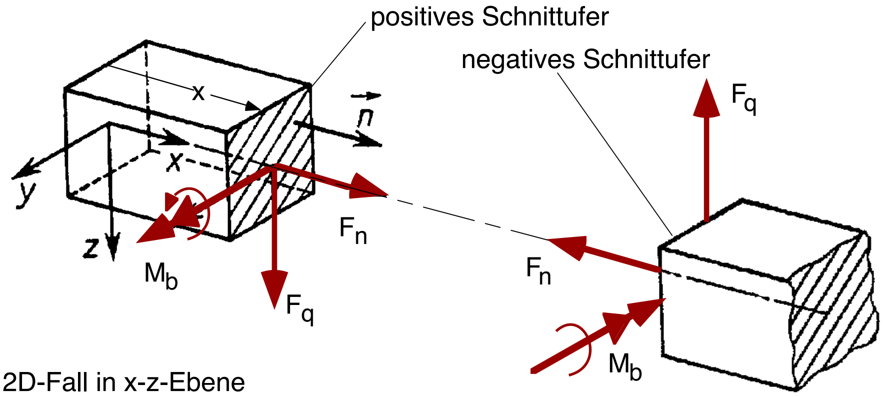
Einschränkungen:

1. Die Balkenachse bildet eine gerade Linie.
2. Alle Belastungen und Schnittgrößen sind nur an der Balkenachse anzusetzen.
3. Die Balkenachse bildet die x-Achse.

Merke: Verwende x-z -Ebene, dann ist das Moment $+M_b = M_y$ links herum gerichtet.



2D-Fall in x-z-Ebene



2D-Fall in x-z-Ebene

Zur Ermittlung der Schnittgrössen wird der Balken senkrecht zur Längsachse an der Stelle x geschnitten.

Seine resultierenden Schnittgrössen sind

die **Normalkraft** F_n

die **Querkraft** F_q

das **Biegemoment** M_b

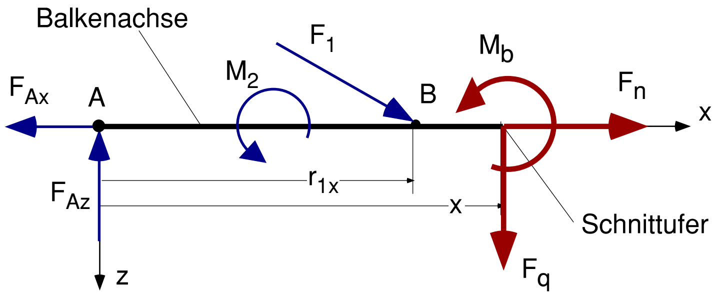
aufweisen.

Schnittgrössen werden am x-seitigen Schnittufer positiv, (d.h. alle Wirkrichtungen zeigen in positive Richtungen des Koordinatensystems), am Gegenufer negativ angetragen. (actio = reactio)

Vorzeichenregel:	**Normalkraft**:	positiv = Zugkraft, negativ = Druckkraft
	Querkraft:	positiv = Gleichgewichtskraft am Schnittufer nach unten
	Biegemoment:	positiv = Bauteil nach unten konvex verbogen.

Andere Schreibweise $F_n = N$, $F_q = Q$, $M_b = M$:

Im 3D- Fall sind auch Torsionsmomente und Querkräfte und Biegemomente in 2 Richtungen zu betrachten , siehe z.B. (Dankert and Dankert 2004)



Gleichgewichtsbedingungen am geschnittenen Bauteil der Länge x:

Sei der Bauteilabschnitt 0 .. x durch Kräfte F_{ix} und F_{iz} am Ort r_{ix} sowie durch Einzelmomente $M_{jy} = M_j$ belastet, folgt

Normalkraft $F_n(x) + \sum_i F_{ix} = 0 \quad \rightarrow \quad F_n(x) = -\sum_i F_{ix}$ (1.9.4)

Querkraft in z $F_q(x) + \sum_i F_{iz} = 0 \quad \rightarrow \quad F_q(x) = -\sum_i F_{iz}$ (1.9.5)

Biegemoment $M_b(x) + \sum_i (x - r_{ix})\, F_{iz} + \sum_j M_j = 0 \quad \rightarrow \quad M_b(x) = -\sum_i (x - r_{ix})\, F_{iz} - \sum_j M_j$ (1.9.6)

r_{ix} ist der Ort der Kraft, gemessen vom Koordinatenursprung.

Für den 3D-Fall sind die Gleichungen entsprechend zu ergänzen.

Merke:

Jeder neue Lastangriff stellt eine Unstetigkeit der Belastung und damit eine Unstetigkeit der Schnittgrössen dar. Das erfordert somit eine Unterteilung des Balkens in Bereiche.

Für jeden Bereich ist eine Gleichgewichtsbetrachtung aufzustellen.

Ort maximaler Schnittgrössen = Ort maximaler Bauteilbelastungen

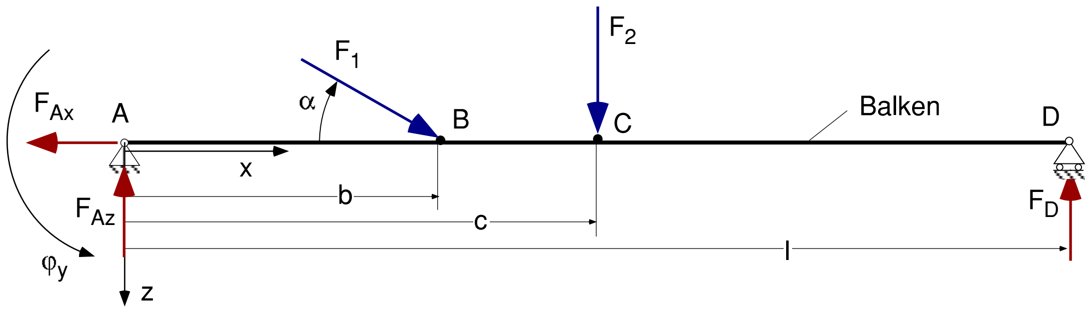
Seien die Funktionen $F_n(x)$, $F_q(x)$, $M_b(x)$ gegeben, findet man den Ort und die Maximalwerte aus

$$\frac{\partial F_n(x)}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{Fn-\max} \quad \Rightarrow \quad F_{n-\max} = F_n(x = x_{Fn-\max})$$

$$\frac{\partial F_q(x)}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{Fq-\max} \quad \Rightarrow \quad F_{q-\max} = F_q(x = x_{Fq-\max})$$

$$\frac{\partial M_b(x)}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{Mb-\max} \quad \Rightarrow \quad M_{b-\max} = M_b(x = x_{Mb-\max})$$

Beispiel 1.9.1



Der gezeigt Balken ist durch Kräfte F_1 und F_2 belastet.

Daten: F_1 = 80 N, F_2 = 60 N, α = 30 °, b = 0.4 m, c = 0.6 m, l = 1.2 m.

Berechne: a) Die Freiheitsgrade des Balkens.

b) Die Lagerreaktionen in A und D.

c) Die Schnittgrössen und stelle diese graphisch dar.

d) Gebe die Maximalwerte an.

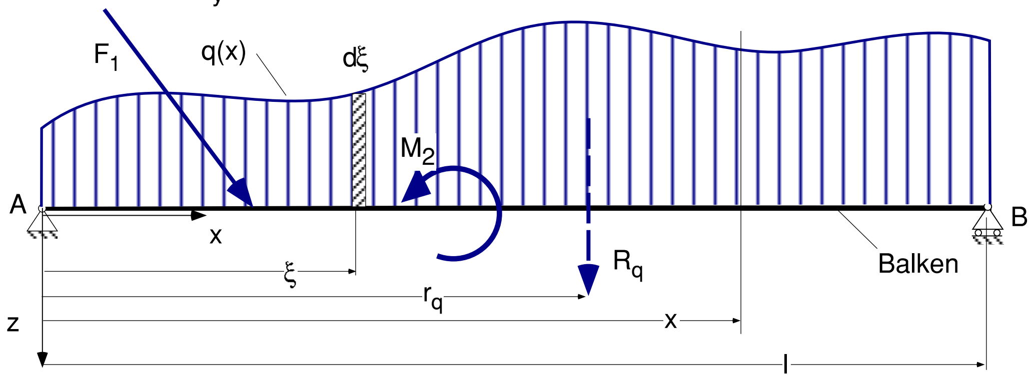
1.9.5 Gerader Balken in der Ebene mit Streckenlasten

Neben den diskreten Lasten stellen wir uns verteilte Lasten vor.

Längslasten $q_x(x)$ [N/m] wirken in x-Richtung

Querlasten $q_z(x) = q(x)$ [N/m] wirken in z-Richtung

verteilte Momente $m_y(x)$ [Nm/ m] wirken um y-Achse.



Zur Bestimmung der **Lagerreaktionen** können wir für den Lastbereich 0 <= ξ <= η die

resultierende Kraft	$R_q = \int_0^\eta q(\xi)\, d\xi$	(1.9.7)
am **Angriffspunkt**	$r_q = \frac{1}{R_q} \int_0^\eta \xi\, q(\xi)\, d\xi$	(1.9.8)

heranziehen.

η ist eine beliebige Position auf der x-Achse, im Bild η = l.

Zur Bestimmung der **Schnittgrössen** sind die Gl. (1.9.4), (1.9.5), (1.9.6) zu erweitern:

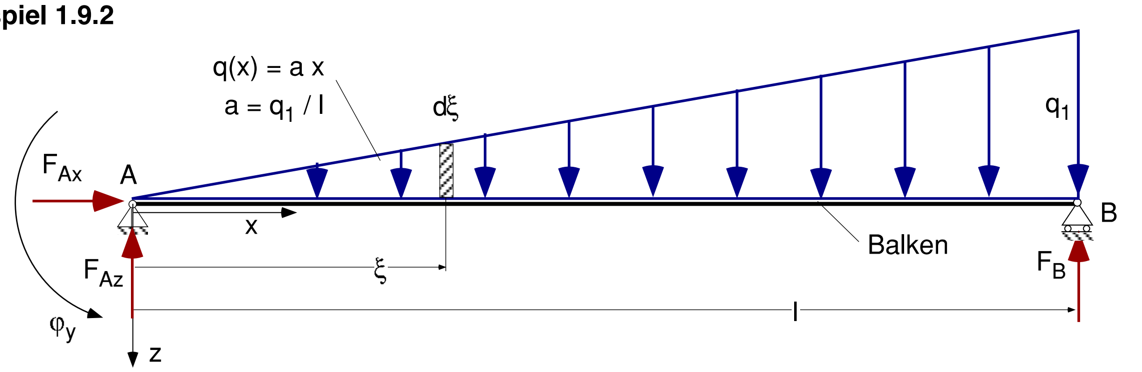
Normalkraft	$F_n(x) = -\sum_i F_{ix} - \int_0^x q_x(\xi)\, d\xi$	(1.9.9)
Querkraft	$F_q(x) = -\sum_i F_{iz} - \int_0^x q_z(\xi)\, d\xi$	(1.9.10)
Biegemoment	$M_b(x) = -\sum_i (x - r_x)\, F_{iz} - \sum_j M_j - \int_0^x (x-\xi)\, q_z(\xi)\, d\xi - \int_0^x m_y(\xi)\, d\xi$	(1.9.11)

Für den 3D-Fall sind die Gleichungen entsprechend zu ergänzen.

Merke:

Jede Änderung der stetigen Belastungen des Balkens erfordert die Festlegung eines neuen Balkenbereiches (**Feldes**)

Beispiel 1.9.2



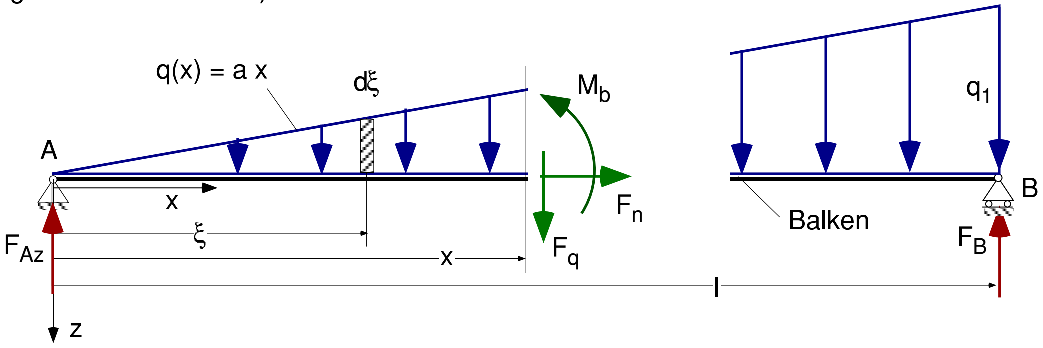
Der gezeigte Balken mit der Streckenlast $q(x) = q_1/l\ x$ in Bereich von $0 <= x <= l$ ist zu untersuchen.

Daten: q_1 = 50 N/m, l = 1.2 m.

a) Resultierende Last

b) Lagerreaktionen in A und B

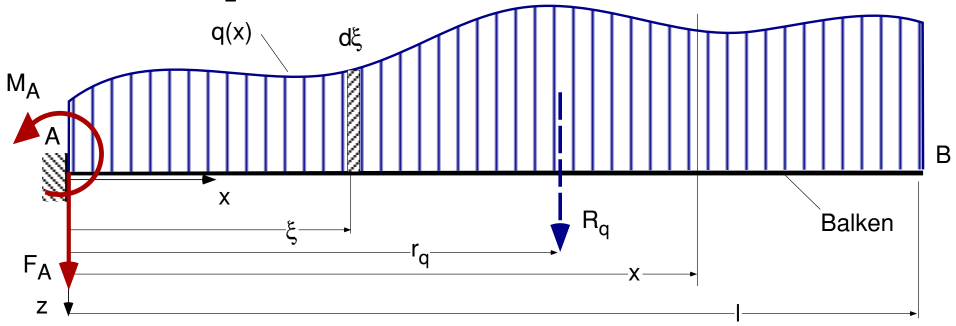
c) Schnittgrössenverlauf und d) deren Maximalwerte



1.9.6 Feldgleichungen der Biegung gerader Balken in der Ebene

Wir betrachten einen Balken der Länge l, eingespannt in A und freies Ende in B.

Er ist durch eine Streckenlast $q_z(x) = q(x)$ [N/m] in z-Richtung belastet.



Die Lagerreaktionen sind in A: $F_A = -R_q$ und $M_A = +r_q R_q$, vgl. Abschn. 1.9.5.

Nun schneiden wir am Lager A (x = 0) ein Randelement der Länge dx frei. Querkraft Q_0 und Biegemoment M_0 sind dort positiv anzutragen. Am rechten Schnittufer wirken die negativen Grössen.

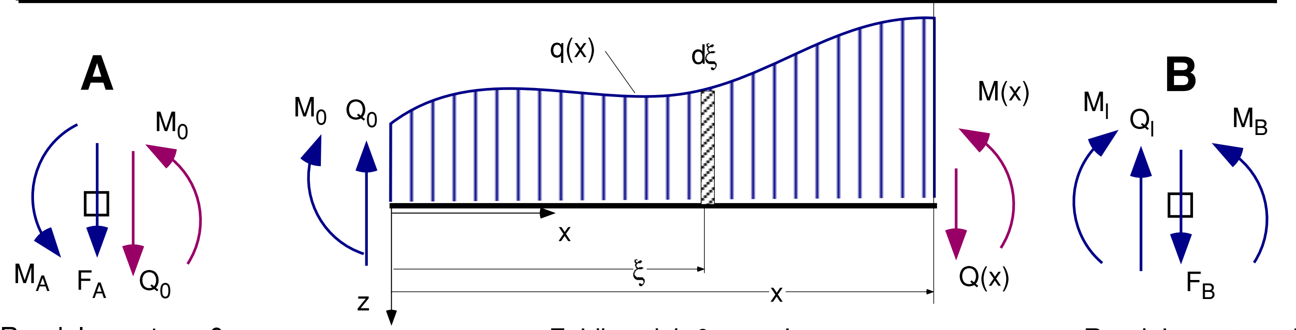
Den Rest des Balkens nennen wir Feld der Länge 0 < x < l.

Rechts in B (x = l) kann ebenfalls ein Randelement vorhanden sein.

Am **Randelement** A (x = 0) gilt:

$$\text{Querkraft:} \quad Q_0 + F_A = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_0 = -F_A$$

$$\text{Biegemoment:} \quad M_0 + M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad M_0 = -M_A \tag{1.9.12}$$



Randelement x = 0 Feldbereich 0 < x < l Randelement x = l

Im **Feld** 0 < x < l gelten die Feldgleichungen:

$$\text{Querkraft:} \quad Q(x) = Q_0 - \int_0^x q(\xi)\, d\xi$$

$$\text{Biegemoment:} \quad M(x) = M_0 + x\,Q_0 - \int_0^x (x-\xi)\, q(\xi)\, d\xi = M_0 + x\,Q(x) + \int_0^x \xi\, q(\xi)\, d\xi \tag{1.9.13}$$

Mit die Lastterme folgt für (1.9.13) $\hat{Q}(x) = \int_0^x q(\xi)\, d\xi \qquad \hat{M}(x) = \int_0^x (x-\xi)\, q(\xi)\, d\xi$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Querkraft:} & Q(x) = Q_0 - \hat{Q}(x) \\ \text{Biegemoment:} & M(x) = M_0 + x\,Q_0 - \hat{M}(x) \end{array}} \tag{1.9.14}$$

Weitere Lastterme siehe Tabelle 1.9.1

Es gilt folgender differenzieller Zusammenhang:

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{dQ}{dx} = Q'(x) = -q(x) & : \text{Ableitung Querkraft} \;=\; -\text{Streckenlast} \\ \dfrac{dM}{dx} = M'(x) = Q(x) \; \underbrace{+x\,Q'(x) + x\,q(x)}_{0} = Q(x) & : \text{Ableitung Biegemoment} \;=\; \text{Querkraft} \end{array}\right\} \quad (1.9.15)$$

Merke:

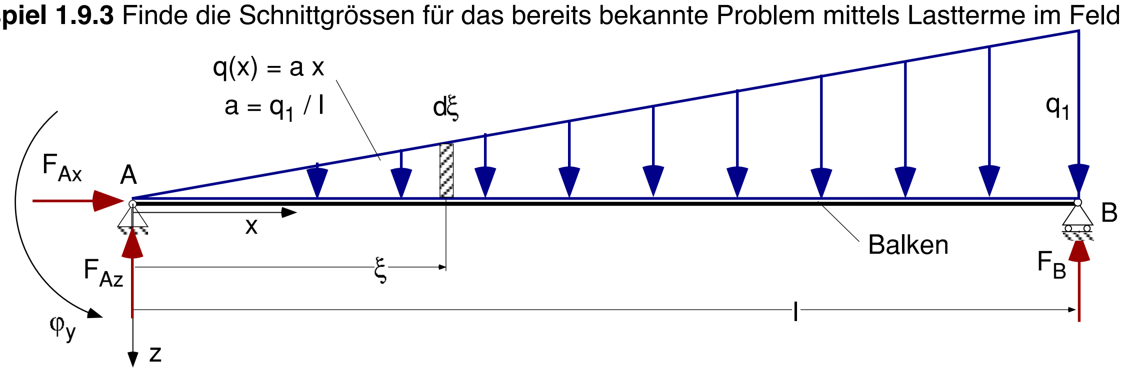
Für Balken mit unterschiedlichen Lasten wendet man (1.9.13) bis (.9.13) für jeden Bereich == Feld k = 1 ... n an.

Bei verzweigten Strukturen verwende lokale Koordinatensysteme und Feldgleichungen

Querkraft Q_0 und Biegemoment M_0 sind dann die Lasten am linken Schnittufer des Feldes k.

HW:

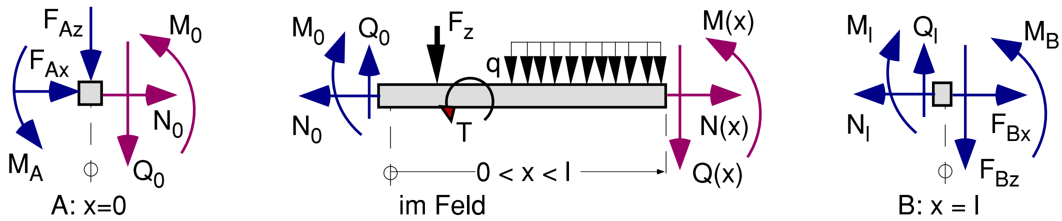
Beispiel 1.9.3 Finde die Schnittgrössen für das bereits bekannte Problem mittels Lastterme im Feld.



Daten: q_1 = 50 N/m, l = 1.2 m.

Tabelle 1.9.1: Zur Biegung gerader Balken

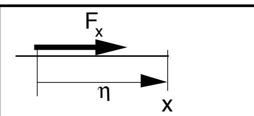
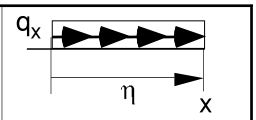
aus Falk, Technische Mechanik, Band 3.

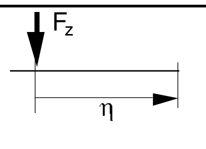
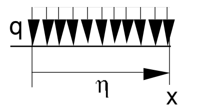
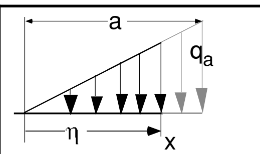
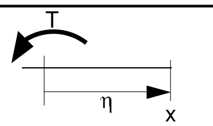
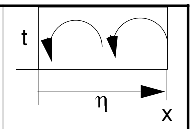


Benennung	Randelement bei A = x = 0	Beziehung für Stelle x	Ableitung nach x	Randelement bei B = x = l
Normalkraft	$N_0 = -F_{Ax}$	$N(x) = N_0 - \hat{N}(x)$		$N_l = F_{Bx}$
Querkraft	$Q_0 = -F_{Az}$	$Q(x) = Q_0 - \hat{Q}(x)$	$= \dfrac{dM(x)}{dx}$	$Q_l = F_{Bz}$
Biegemoment	$M_0 = -M_A$	$M(x) = M_0 + Q_0\, x - \hat{M}(x)$		$M_l = M_B$

Terme für Lasten im Feld zwischen 0 und x

(außer Randlasten, sofern diese im Randelement x = 0 enthalten sind

Lastterme für Längsbelastung		
Normalkraft $\hat{N}(\eta)$	F_x	$q_x\, \eta$

Lastterme für Biegung in z					
Result. R_q	--	$q\,\eta$	$q_a \dfrac{a}{2}$	--	$t\,\eta$
Angriffspkt. r_q	–	$\dfrac{\eta}{2}$	$\dfrac{2}{3} a$	–	$\dfrac{\eta}{2}$
$\hat{Q}(\eta)$	F_z	$q\,\eta$	$\dfrac{q_a}{a}\dfrac{\eta^2}{2}$	–	–
$\hat{M}(\eta)$	$F_z\,\eta$	$q\dfrac{\eta^2}{2}$	$\dfrac{q_a}{a}\dfrac{\eta^3}{6}$	T	$t\,\eta$

Werden die Gleichungen für einen Bereich k mit Koordinate x_k angewendet, so sind Q_0, M_0 die Größen für $x_k = 0$, wobei die Lasten an der Stelle $x_k = 0$ in Q_0 und M_0 einzubeziehen sind.

1.9.7 Superpositionsprinzip

In der linearen Statik gilt das Superpositionsprinzip:

Ist eine System mit F_i Kräften und M_j Momenten belastet, so ergeben sich die Lagerreaktionen und die Schnittgrössen des Systems aus der Summe der Ergebnisse, die sich einstellen, wenn das System mit jeder Einzelkraft oder jedem Einzelmoment belastet wird.

Dabei wird vorausgesetzt, dass jeder Belastungszustand vom Referenzzustand aus betrachtet wird.
Die Reihenfolge der Belastungen ist beliebig.