Aufgaben zu Kapitel 1

1.1 Allgemeinwissen TM

a) Wozu setzen Sie FEM-Programme ein?

b) Wozu setzen Sie MKS-Programme ein?

c) Was sind die wesentlichen Elemente eines MKS?

d) Wie viele FHG hat ein freier starrer Körper im Raum?

e) Wie viele FHG hat ein freier elastischer Körper im Raum?

f) Erkläre die Begriffe: Statik, Kinetik, Dynamik, inverse Dynamik, Kinematik.

g) Der Arm einer Apparatur ist abgebrochen. Wie würden Sie das Problem beheben?

1.2 Rechnen mit Vektoren

Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ mit den Koordinaten

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Berechne:

a) die Beträge a, b, c der Vektoren.

b) die Richtungen (Einheitsvektoren) der Vektoren

c) den Winkel α_{ab} und α_{ac} zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sowie zwischen $\vec{a}$ und $\vec{c}$.

Prüfe die Richtigkeit der Aussagen

d) $d = a\, b \sin\angle(\vec{a},\vec{b})$ wo d der Betrag aus $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$

e) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} \equiv \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{a}$ -> $\left(\tilde{\mathbf{a}}\, \mathbf{b}\right)^T \mathbf{c} \equiv \left(\tilde{\mathbf{b}}\, \mathbf{c}\right)^T \mathbf{a}$

f) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} \equiv (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} - \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right) \vec{a}$ -> $\left(\tilde{\mathbf{a}}\, \mathbf{b}\right)^{\sim} \mathbf{c} \equiv \left(\mathbf{a}^T\, \mathbf{c}\right) \mathbf{b} - \left(\mathbf{b}^T\, \mathbf{c}\right) \mathbf{a}$

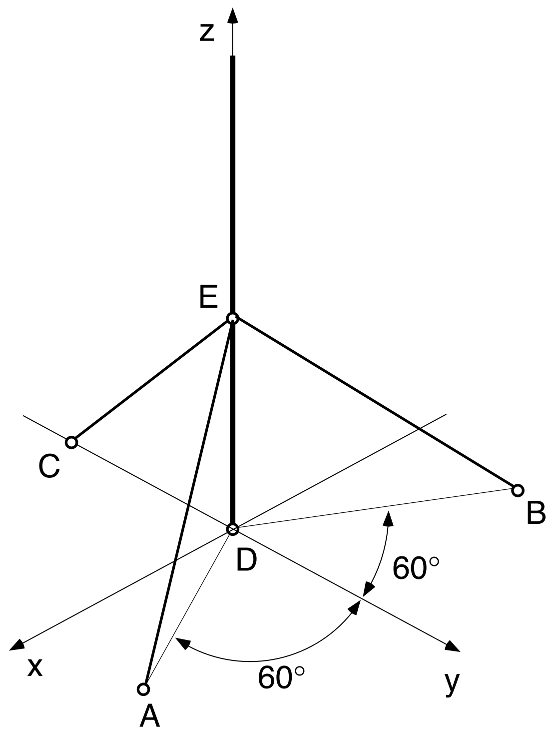
g) $\tilde{\mathbf{a}}\, \tilde{\mathbf{b}}\, \mathbf{c} \equiv \left(\mathbf{b}\, \mathbf{a}^T - \mathbf{a}^T \mathbf{b}\, \mathbf{E}\right) \mathbf{c}$ mit **E** als Einheitsmatrix.

Hinweis: Es gilt $\left(\tilde{\mathbf{a}}\, b\right)^{\sim} = \tilde{\mathbf{a}}\, \tilde{\mathbf{b}} - \tilde{\mathbf{b}}\, \tilde{\mathbf{a}}$

Ergebnisse: a = 6.16, b = 7.28, c = 7.07, $\underline{e}_a$ = (0.323, -0.487, 0.811)^T, $\underline{e}_b$ = (-0.549, 0.137, 0.824)^T, α_{ab} = 64.95 °, α_{ac} = 135.33 °, d = 40.657, e) -147, f) (200, -145, 4)^T, g) (67, -107, -91)^T.

1.3 Finde Ortsvektoren

Ein bei Punkt D verankerter Antennenmast wird zusätzlich durch drei Seile gehalten. Die Seile sind im Punkt E am Mast und in den Punkten A, B und C am Boden befestigt. Die Punkte A, B, und C bilden ein gleichschenkliges Dreieck. Alle Abstände sind gleich: $\overline{DE} = \overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD} = a$.

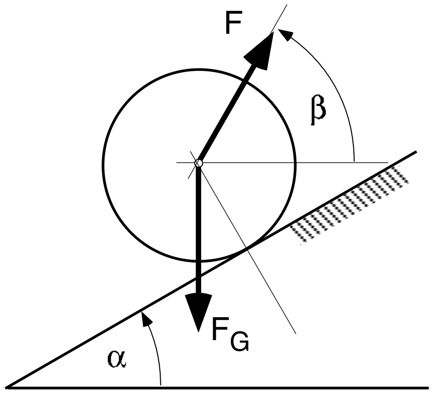


Gesucht:
a) Die Ortsvektoren $\vec{r}_{ij}$ vom Ursprung i= D des Koordinatensystems zu den Punkten j = A, B, C, E.

b) Berechne die Einheitsvektoren der Vektoren $\vec{r}_{EA}$, $\vec{r}_{EB}$, $\vec{r}_{EC}$.

Ergebnisse: $\underline{r}_{DA} = a/2\ (\sqrt{3}, 1, 0)^T$, $\underline{r}_{DB} = a/2\ (-\sqrt{3}, 1, 0)^T$, $\underline{r}_{DC} = a\ (0, -1, 0)^T$, $\underline{r}_{DE} = a\ (0, 0, 1)^T$, $\underline{e}_{EA} = (0.6124, 0.3536, -0.7071)^T$, $\underline{e}_{EB} = (-0.6124, 0.3536, -0.7071)^T$, $\underline{e}_{EC} = (0, -0.7071, -0.7071)^T$.

1.4 Ebenes zentrales Kräftesystem



Für die gezeichnete starre Walze, die reibungsfreie auf der schiefen Ebene liegt, ermittle man grafisch und rechnerisch die Kraft F und die auftretende Normalkraft N, die notwendig sind, um die Walze im Gleichgewicht zu halten, wenn:

a) Die Wirkungslinie von F horizontal verläuft.

b) Die Wirkungslinie von F den Winkel $\beta = 60$ ° mit der Horizontalen einschließt.

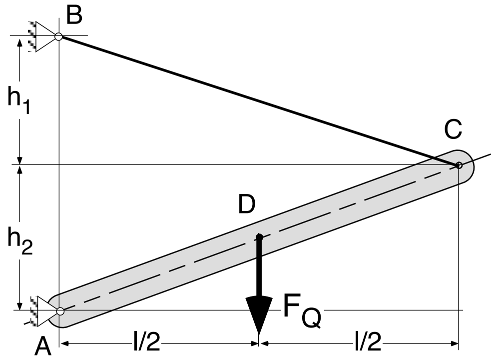
c) Man bestimme ferner die Richtung und Größe der Kraft F und die zugehörige Normalkraft N, wenn F möglichst klein sein soll.

d) Finde F und N, wenn Winkel β den Winkel von 90° hat.

Werte: F_G =200 N, $\alpha = 30°$

Ergebnisse: a) F = 115.47 N, N = 230.94 N; b) F = 115.47 N = N; c) F = 100 N, N = 173.21 N, d) F = 200 N, N = 0.

1.5 Ebenes zentrales Kräftesystem am Balken.



Der gezeichnete starre Stab AC ist bei A gelenkig gelagert, durch das Seil BC gehalten und mit der Kraft F_Q in D belastet.

Wie groß sind die Auflagerkräfte in A und B?

Gegeben: h_1 = 3 m, h_2 = 2 m, l = 5 m, F_Q = 1000 N

Ergebnisse: F_{Ax} = 500 N, F_{Ay} = 700 N, F_A = 860 N, F_B = 583 N = S (Zug)

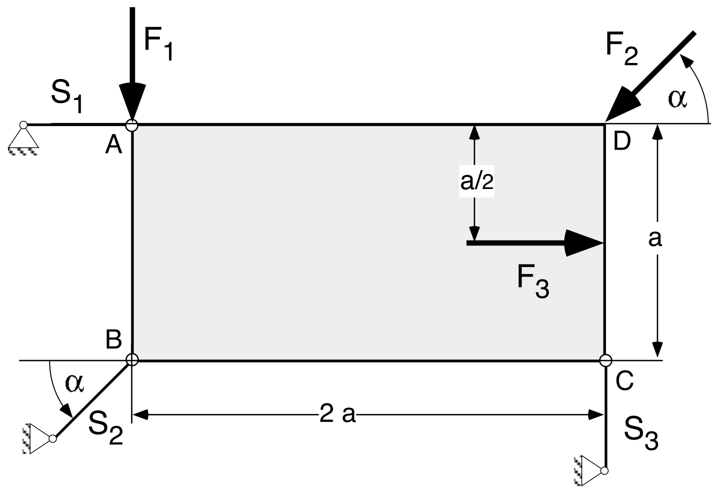
1.6 Drei unbekannte Stabkräfte

Der gezeichnete starre Körper ist durch die Kräfte F_1 bis F_3 belastet und mit den Stäben S_1 bis S_3 abgestützt.

Ermittle sämtliche Stabkräfte.

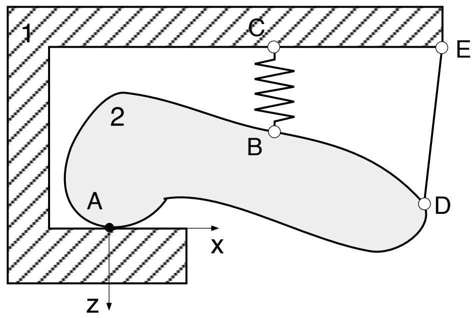
Gegeben: $F_1 = 5$ N, $F_2 = 2$ N, $F_3 = 4$ N, $a = 4$ cm, $\alpha = 45°$

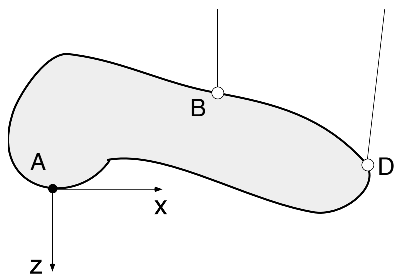
Ergebnisse: a) $S_1 = 14.59$ N, $S_2 = -16.97$ N, $S_3 = 5.59$ N bei der Annahme, alle Stäbe seien Zugstäbe.



1.7 Rollgelenk

Körper 2 rollt auf Körper 1 mit aktuellem Kontaktpunkt A. Gleichzeitig ist Körper 2 an einer Feder in BC und an einem undehnbaren Seil in DE gelagert.





a) Bestimme die Freiheitsgrade des Körpers 2.

b) Bestimme Lagerreaktionen, Anzahl Unbekannte, Lösbarkeit des gezeigten Problems.

c) Berechne die Reaktionskräfte, wenn die Feder mit $F_F = 10$ N vorgespannt ist und die Ortsvektoren folgende Koordinaten in cm aufweisen:

$\underline{r}_A = (0, 0, 0)^T$, $\underline{r}_B = (2.1, 0, -1.2)^T$, $\underline{r}_C = (2.1, 0, -2.3)^T$, $\underline{r}_D = (4.0, 0, -0.3)^T$, $\underline{r}_E = (4.25, 0, -2.3)^T$,

Ergebnisse:

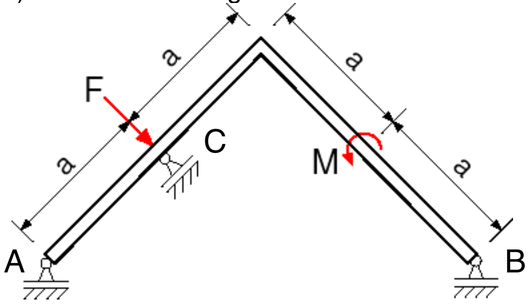
1.8 Lagerfälle

Untersuche die Lagerfälle des gezeigten Bauteils. Es mit einer Kraft F und einem Moment M belastet.

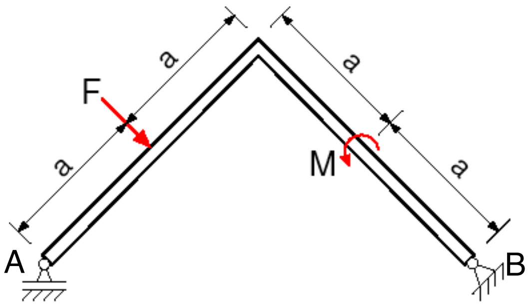
a) Bestimme die Freiheitsgrade des Bauteils.

b) Bestimme Lagerreaktionen, Anzahl Unbekannte, Lösbarkeit des gezeigten Problems.

c) Berechne die Lagerreaktionen.

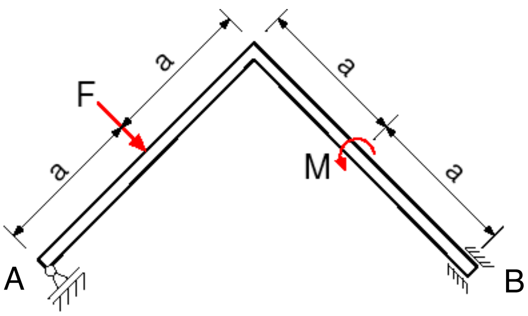


$F_C = -F$, $F_A = -\sqrt{2}/4\ M/a$, $F_B = \sqrt{2}/4\ M/a$



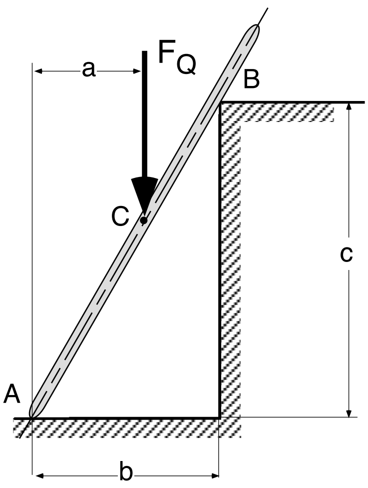
$F_{Az} = -\sqrt{2}/4\ M/a - \sqrt{2}/4\ F$, $F_{Bx} = -\sqrt{2}/2\ F$,

$F_{Bz} = \sqrt{2}/4\ M/a - \sqrt{2}/4\ F$



$F_A = -F$, $F_B = 0$, $M_B = -M + a\,F$

1.9 Kontaktkräfte (Reibung)



Die gezeichnete Leiter stützt sich bei A und B ab und ist durch die Kraft F_Q in C belastet. Bei A können Reibungskräfte übertragen werden, die Ecke B ist reibungsfrei. Die Dicke der Leiter wird vernachlässigt.

a) Stelle die Zahl der FHG der Leiter auf.

b) Zeichne das Freikörperbild mit allen Kräften.

c) Wie groß sind die Auflagerkräfte in A und in B?

d) Welcher Reibungsbeiwert μ_0 ist mindestens nötig, damit die Leiter nicht rutscht?

Gegeben: F_Q = 800 N, a = 1.5 m, b = 3 m, c = 4 m

Ergebnisse: F_{Ax} = 192 N, F_{Ay} = 656 N, F_A = 683.5 N, F_B = 240 N, μ_0 = 0.293

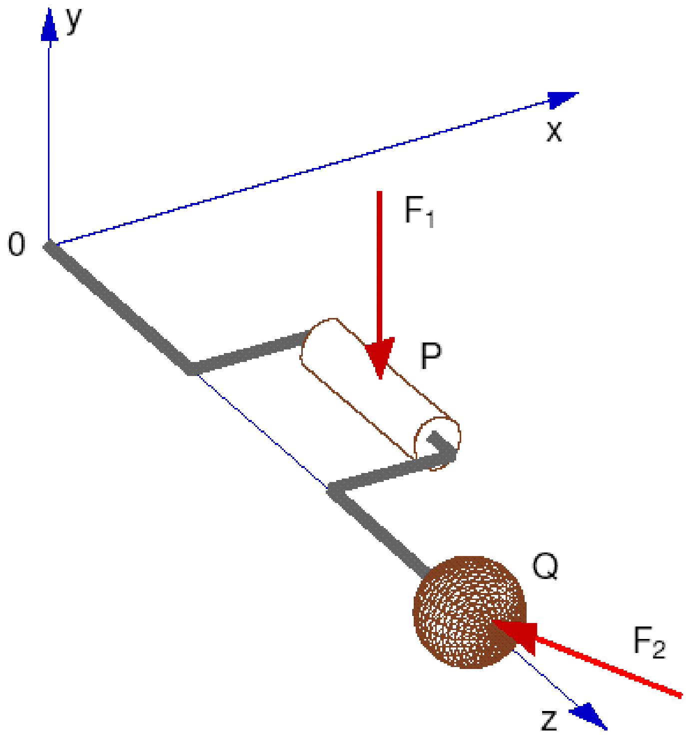
1.10 Handbohrer

Ein Handbohrer wird in den Punkten P und Q mit den Kräften F_1 und F_2 belastet.

Berechnen Sie die Wirkung (Dyname) der Kräfte F_1 und F_2 bezüglich der Bohrerspitze (Punkt 0).

Daten:

$\underline{r}_P = (10, 0, 25)^T$, $\underline{r}_Q = (0, 0, 50)^T$ cm und $\underline{F}_1 = (0, -100, 0)^T$, $\underline{F}_2$ $(-40, 0, -100)^T$ N.



Ergebnisse: $\underline{R} = (-40, -100, -100)^T$ N,

$\underline{M}_0 = (25, -20, -10)^T$ Nm

1.11 Rohrkonstruktion

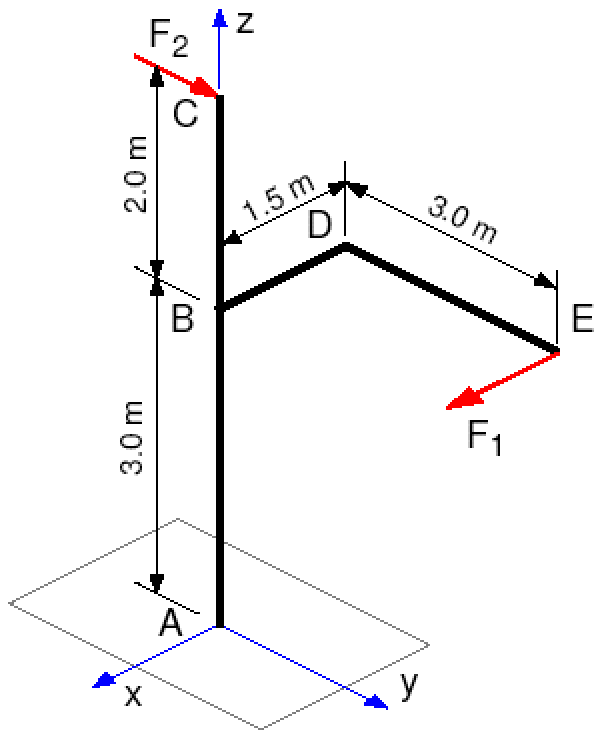
Die Rohrkonstruktion wird in den Punkten E und C mit den Kräften F_1 und F_2 belastet.

Berechnen Sie die Wirkung (Dyname) der Kräfte F_1 und F_2 bezüglich Fuß (Punkt A).

Daten: $F_1 = 5$ kN, $F_2 = 3$ kN.

Ergebnisse: $\underline{R} = (5, 3, 0)^T$ kN,

$\underline{M}_A = (-15, 15, -15)^T$ kNm



1.12 Gleichgewicht Rolle auf Seil

Ein Seil der Länge l ist zwischen den Punkten A und B eingehängt, siehe Lageplan. Auf dem Seil läuft eine reibungsfreie Rolle, an der das Gewicht G hängt.

a) Schneide die Rolle frei und zeichne alle Kräfte an der Rolle an.

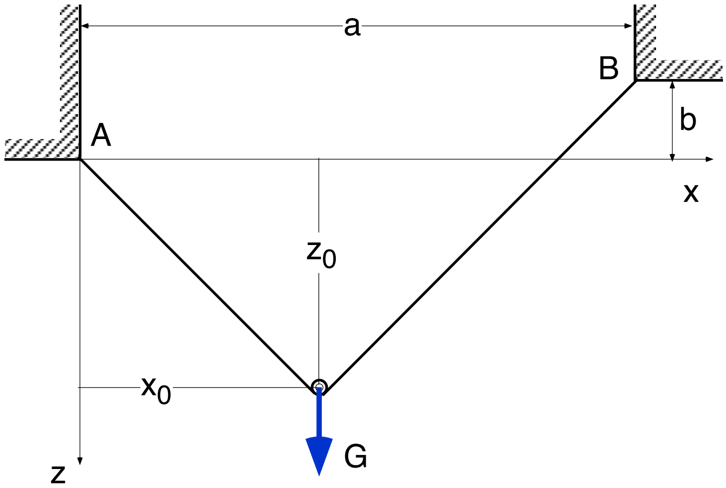
b) Wie lauten die Bedingungsgleichungen für eine Gleichgewichtslage der Rolle.

c) Berechne die Koordinaten x_0 und z_0 der Gleichgewichtslage der Rolle.

d) Berechne die Seilkraft S.

Gegeben: G = 600 N, l = 15 m, a = 10 m, b = 2 m.

Ergebnisse: x_0 = 4.11 m, z_0 = 4.59 m, S = 402.5 N.

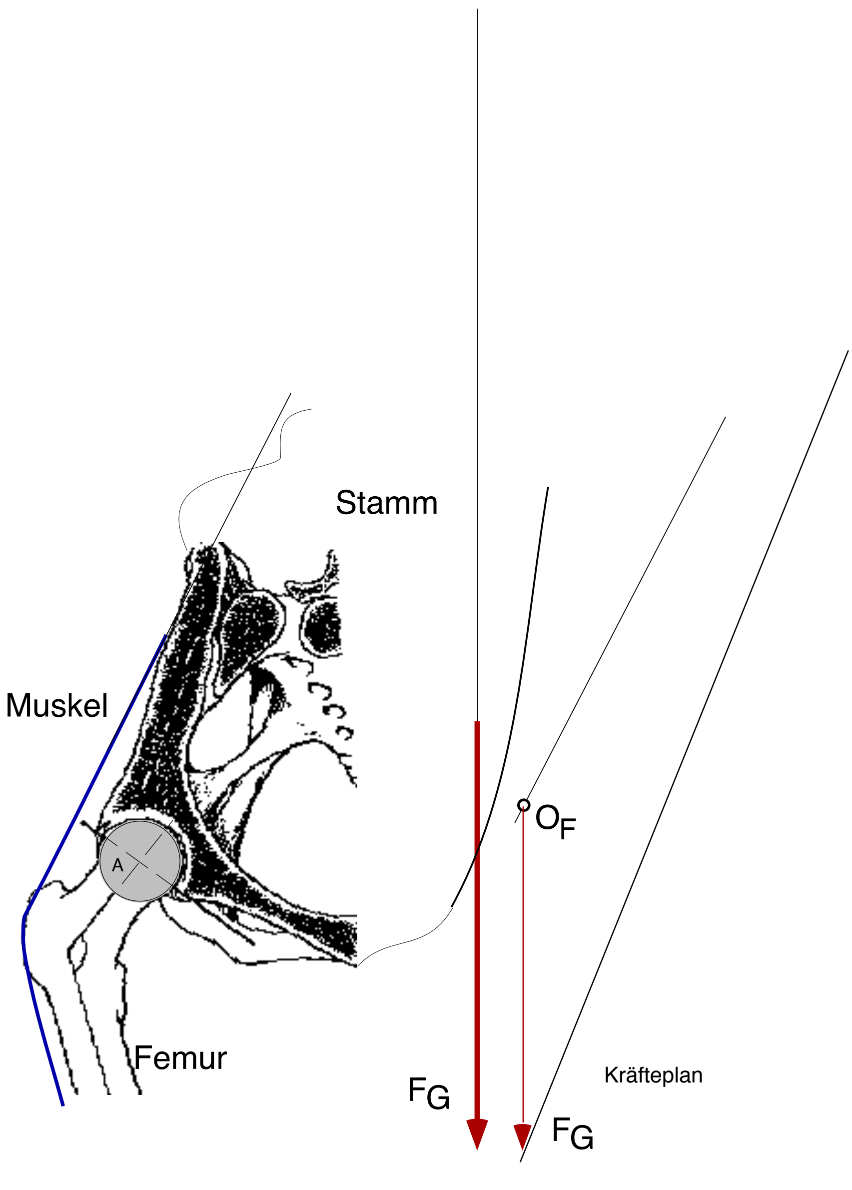


1.13 Muskelkraft Hüfte

Ein Mensch steht auf dem rechten Bein. Sein Gewicht ist 80 kg.

Bestimme die Muskelkraft FM im Trochanter und die Hüftpfannen-Normalkraft FN, wenn der Hüftkugelabstand zur Medianebene 190 mm und der senkrechte Abstand zum Muskel 44 mm beträgt. Die Gewichtskraft F_G wirkt in der Medianebene. Verwende für weitere Angaben den Lageplan.

Ergebnisse: $F_M = 3389$ N, $F_N = 3916$ N.



1.14 Muskelkraft Knie-Strecker

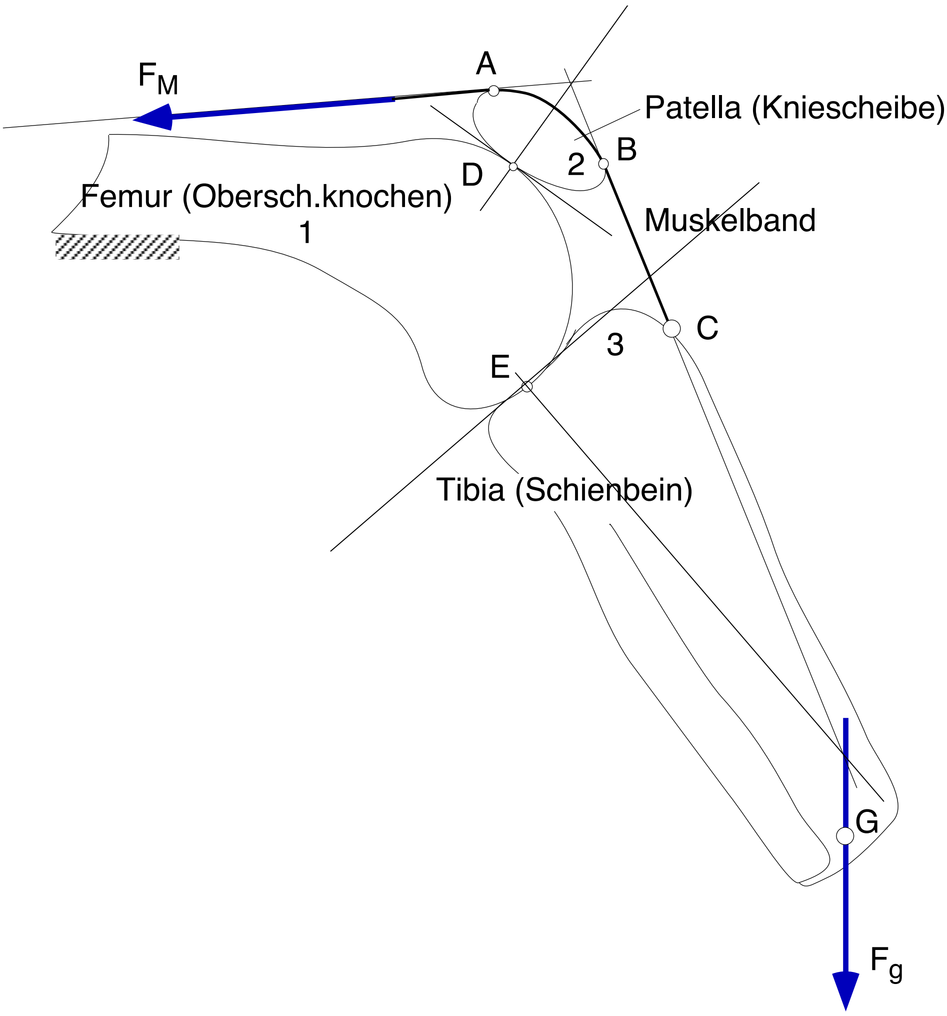
Am Kniegelenk sind Femur (1), Patella(2) und Tibia (3) beteiligt. Die Muskelkraft F_M des Quadrizeps wirkt als Kniestrecker und zieht am Muskelband, das über die Patella läuft (Punkte A und B) und in C an Tibia angewachsen ist. Die Patella gleitet reibungsfrei auf dem Femurhügel (aktueller Kontaktpunkt sei D). Tibia gleitet reibungsfrei auf Femur (aktueller Kontaktpunkt sei E). An der Tibia sei das Gewicht F_g = 10 kg in G wirksam. Wir nehmen an, dass Femur als gestellfest angesehen wird: Bestimme:

a) Schneide die Körper Patella und Tibia frei und trage deren Reaktionskräfte an.

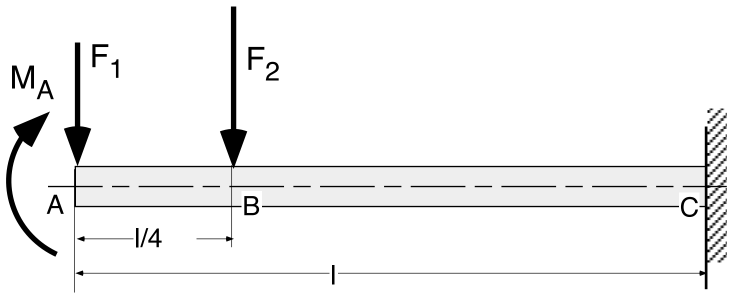
b) Stelle die Gleichgewichtsbedingungen für Patella und Tibia auf.

c) Löse die Gleichgewichtsbedingungen graphisch. (M_F = 1 cm / 20 N, WL aus Lageplan.)

Ergebnisse: ca Werte: FM = 228 N, FD = 254 N, FE = 116 N, FC = 198 N.



1.15 Kragarm



Der bei C eingespannte Balken ist durch die Kräfte F_1, F_2 und das Moment M_A, das bei A eingeleitet wird, belastet. Es sollen ermittelt werden:

a) Die Auflagerreaktion in C.

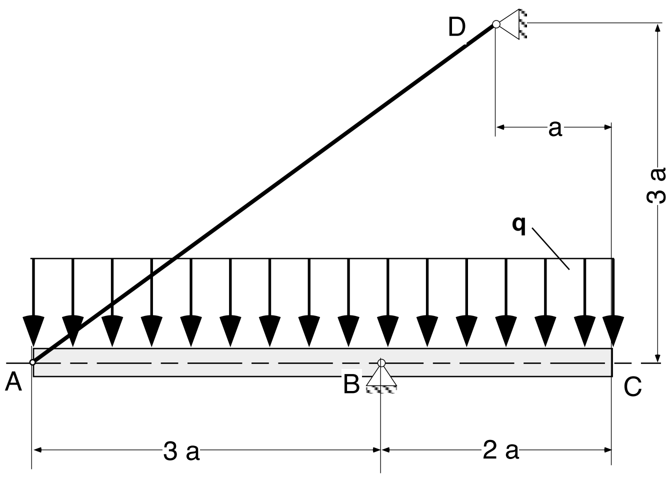
b) Der Querkraft- und Biegemomentenverlauf.

c) Die Größe von M_A, damit das Einspannmoment in C gleich Null wird.

Gegeben: F_1 = 2 N, F_2 = 4 N, M_A = 120 Nmm, l = 80 mm.

Ergebnisse: a) F_{Cx} = 0 N, F_{Cy} = 6 N, M_C = -280 Nmm, b) M_A = 400 Nmm

1.16 Kippbalken mit Seil



Der in nebenstehendem Bild dargestellte Balken AC ist in B gelenkig gelagert und durch eine Streckenlast q belastet. Das Seil AD hält den Balken waagerecht.

a) Bestimme die Freiheitsgrade des Balkens, Lagerreaktionen, Anzahl Unbekannte, Lösbarkeit des gezeigten Problems.

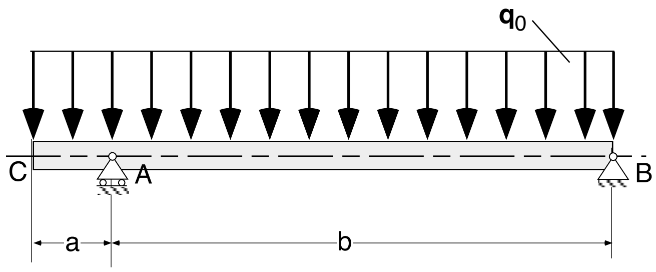
b) Berechne die Auflagerkraft in B und die Seilkraft im Seil AD.

c) Bestimme den Normalkraftverlauf längs AC.

Gegeben: a = 18 cm, q = 30 N/cm.

Ergebnisse: a) F_{Bx} = -600 N, F_{By} = 2250 N, F_S = 750 N.

1.17 Balken auf zwei Stützen



Für das gezeichnete mit einer konstanten Streckenlast q belastete Bauteil soll folgendes ermittelt werden:

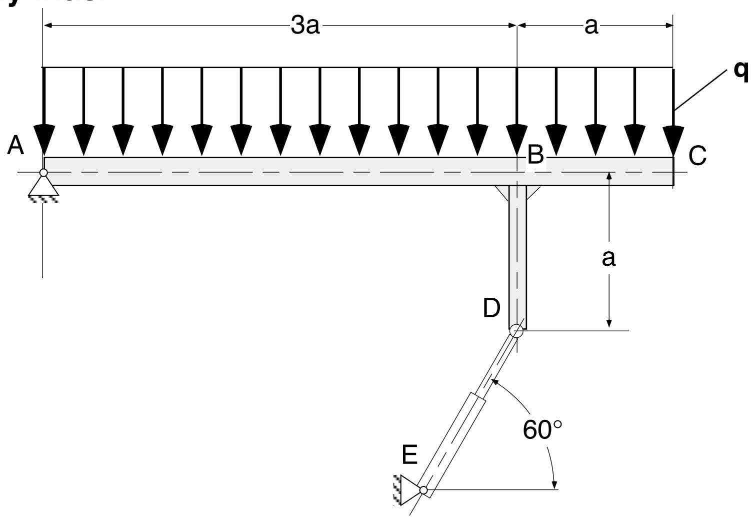
a) Die Auflagerreaktionen

b) Der Querkraft- und Biegemomentenverlauf, grafisch und mit Angabe von Nullstellen, Maxima und den Werten bei A und B.

Gegeben: q_0 = 1,2 N/mm, a = 30 mm, b = 120 mm.

Ergebnisse: a) F_{Ay} = 112.5 N, F_{Bx} = 0 N, F_{By} = 67.5 N.

1.18 Balkenstruktur mit Hubzylinder.



Ein Balken ist in A gelenkig gelagert und in B durch einen angeschweißten Arm BD mit Zylinder DE abgestützt. Der Balken ist durch die Streckenlast q belastet.

Abhängig von q und Länge a bestimme:

a) Freiheitsgrade des Balkens

b) Lagerreaktionen

c) Schnittgrößen im Balken und Arm

d) Max. Biegespannung für Balkenquerschnitt b = a/20 und h = a/5.

Ergebnisse: a) f = 0; b) FD = 2.582 a q; c) Nmax = 1.291 a q, Mmax = 1.556 a^2 q; d) σbmax = 4668 a/q;