

2	Statik elastischer Körper – Elastostatik – Festigkeitslehre	1
2.1	Einleitung zur Elastostatik - Festigkeitslehre	1
2.1.1	Grundlegende Aufgaben des Elastostatik	2
2.1.2	Modellannahmen	3
2.1.3	Technisch wichtige Beanspruchungen von Bauteilen	4
2.2	Definition der Spannung.....	6
2.2.1	Beispiel zur Normalspannung	8
2.2.2	Beispiel zur Schubspannung / Scherspannung	9
2.3	Definition des Verzerrungszustandes.....	10
2.3.1	Beispiel zur Dehnung.....	12
2.4	Materialverhalten - Materialgesetze	13
2.4.1	Der Zugversuch	13
2.4.2	Elastizitätsmodul E und Hooke'sches Gesetz	14
2.4.3	Schubmodul G	15
2.4.4	Wärmedehnung und Wärmespannungen	16
2.5	Festigkeitsnachweis, zulässige Spannungen	17
2.5.1	Belastungsarten und deren Faktoren	17
2.5.2	Zulässige Spannungen	18
2.6	Dehnung des geraden Stabes	20
2.6.1	Gleichung der Dehnung und Verschiebung	20
2.6.2	Federmodell des Zug/Druck-Stabes	21
2.7	Biegung des geraden schubstarren Balkens	22
2.7.1	Modellannahmen - Bernoulli-Hypothese.....	22
2.7.2	Dehnung und Biegespannung	23
2.7.3	Biegelinie des geraden Balkens	27
2.7.4	Federmodell des Biegebalkens.....	30
2.8	Flächengeometrie	32
2.8.1	Fläche, Flächenschwerpunkt, Flächenmomente 1. und 2. Ordnung	32
2.8.2	Der Satz von Steiner.....	34
2.8.3	Zusammengesetzte Flächen.....	35
2.9	Weitere Themen der Balkentheorie	36
2.9.1	Superposition von Dehnung und Biegung	36
2.9.2	Torsion von kreisrunden Stäben	37

2 Statik elastischer Körper – Festigkeitslehre

Wir verlassen die Einschränkungen des starren Körpers und erlauben nun elastische Verformungen der Bauteile => Wir kommen zur **Statik elastischer Körper, Elastostatik, Festigkeitslehre**.

Ziel: Berechnung der Verformungen (Dehnungen und Scherungen) und Spannungen (Normal- und Schubspannungen) in Bauteilen und Bewertung dieser hinsichtlich ihrer zulässigen Werte der Festigkeit, Steifigkeit, Stabilität, Dauerfestigkeit, Verformbarkeit.

2.1 Einleitung zur Elastostatik - Festigkeitslehre

Der Körper darf sich nun infolge Belastungen verformen, er ist deformierbar, elastisch, flexibel.

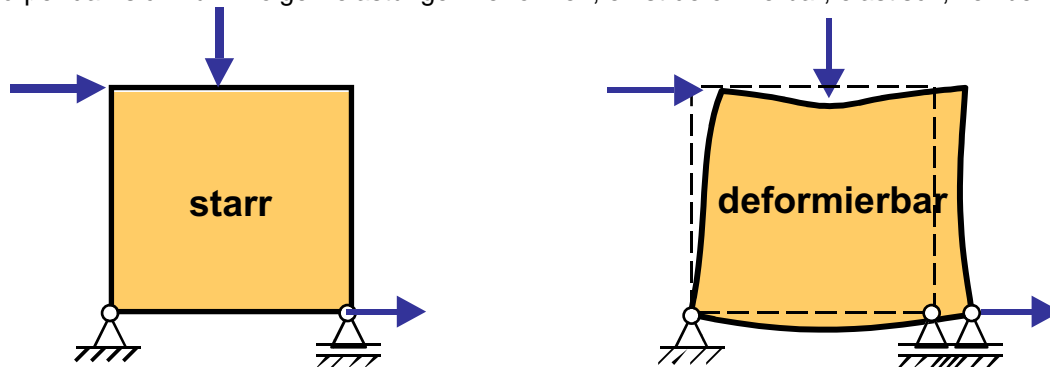


Bild 2.1: Körper mit Kräften (starres Modell, elastisches Modell)

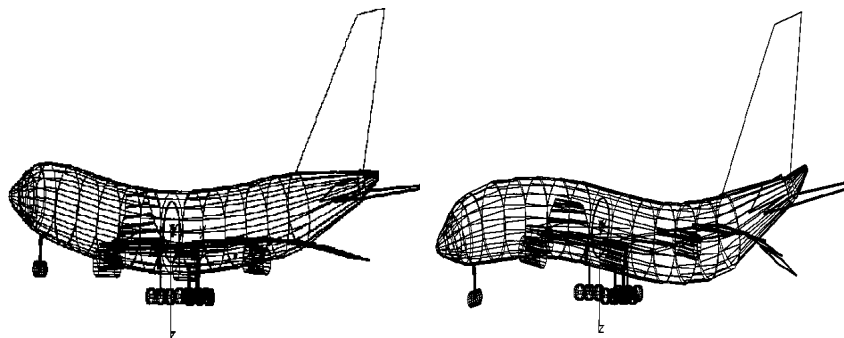


Bild 2.2: Die beiden ersten Eigenformen eines flexiblen Flugzeugmodells.

Beachte: Durch die Hinzunahme der elastischen Verformungen eines Bauteiles (Körper) erhält der Körper ∞ viele Freiheitsgrade.

Körper mit statisch unbestimmten Lagerungen (statisch überbestimmt gelagerte Systeme) sind nun damit lösbar.

2.1.1 Grundlegende Aufgaben des Elastostatik

<i>Thema</i>	<i>Gegeben</i>	<i>Nachweis</i>
Festigkeitsnachweis oder Spannungsnachweis	Körper in seiner Geometrie, Material, Belastung	Spannungen müssen kleiner sein als die für das Material zulässigen Werte.
Steifigkeitsnachweis oder Verformungsnachweis	Körper in seiner Geometrie, Material, Belastung	Verformungen des Körpers müssen kleiner sein als zulässige Werte. (Bauwerke, Präzisionsmaschinen)
Dimensionierung bezüglich Festigkeit	Körper in seiner Geometrie mit noch freien Parametern, Material, Belastung	Maße so festlegen, dass die Spannungen kleiner sind als die für das Material zulässigen Werte.
Dimensionierung bezüglich Steifigkeit	Körper in seiner Geometrie mit noch freien Parametern, Material, Belastung	Maße so festlegen, dass die Verformungen kleiner sind als die für das Bauteil zulässigen Werte.
Belastungsbeanspruchung	Körper in seiner Geometrie, Material	Maximale Belastungen, damit die Spannungen bzw. Verformungen zulässige Werte nicht überschreiten.

2.1.2 Modellannahmen

In der Elastostatik werden vielfach folgende Annahmen (Modelleinschränkungen) vereinbart, die es erlauben, mit erträglichem Rechenaufwand Lösungen zu erarbeiten.

1. Die Verformungen sind klein:

=> Gleichgewicht kann am unverformten System aufgestellt werden (Theorie 1. Ordnung).

Ausnahme: Stabilitätsuntersuchungen; dort wird das Gleichgewicht am verformten System aufgeschrieben.

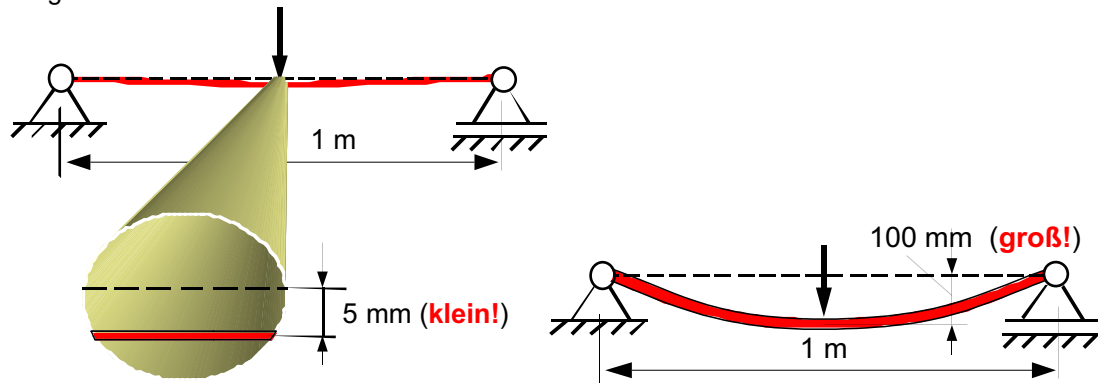


Bild 2.3: Was bedeuten kleine Verformungen (nur ein Anhaltswert)

2. Die Verformungen gehen bei Wegnahme der Belastungen wieder vollständig zurück:

=> ideal elastisches Materialverhalten (keine plastischen Verformungen)

3. Die Verformungen und Spannungen sind linear voneinander abhängig:

=> lineares Materialverhalten (lineares Materialgesetz)

4. Das Material ist *homogen* :

=> an jeder Stelle gelten die gleichen Materialeigenschaften

und das Material ist *isotrop*:

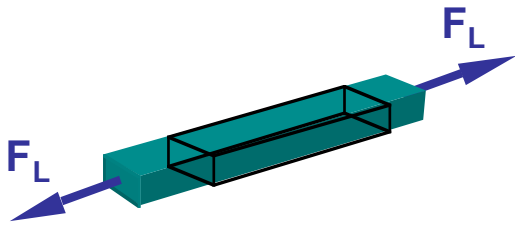
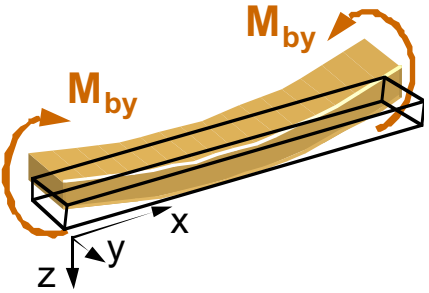
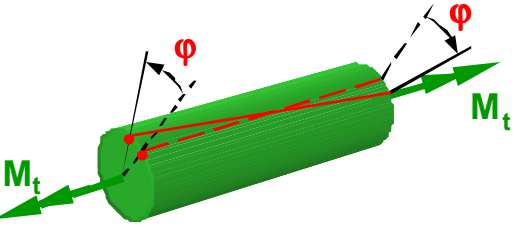
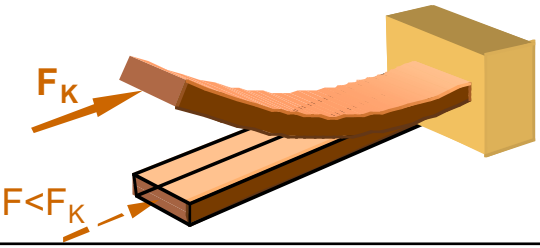
=> Materialeigenschaften sind unabhängig von der Richtung

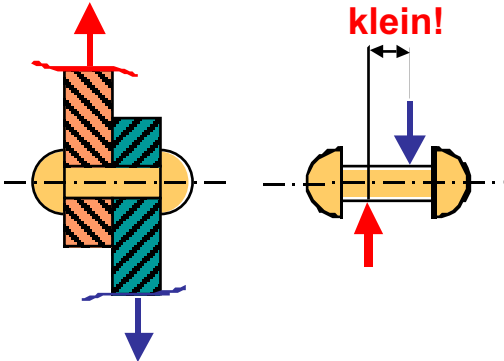
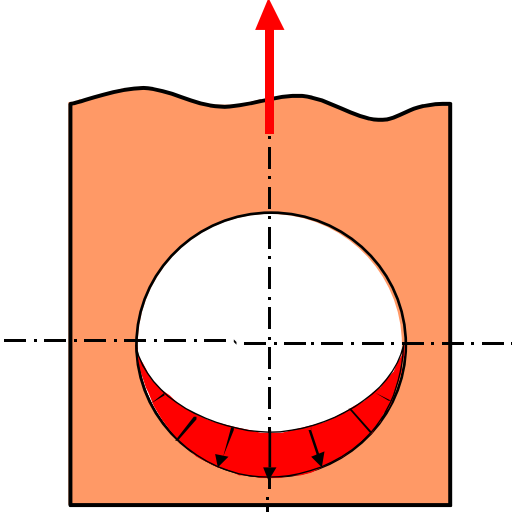
5. Es werden spezielle Annahmen für bestimmte Körperformen getroffen:

=> Stab, Balken sind lange schlanke Körper: einachsiger Spannungszustand. Dehnungen nur in einer Richtung. Querschnitte bleiben eben, etc. siehe weiterführende Abschnitte.

Weiter reichende Verfahren sind der Literatur zu entnehmen, wie zu Theorien 2. und 3. Ordnung für große Verformungen, nichtlineares und plastisches Materialverhalten; Theorien für Scheiben, Platten und Schalen; Finite Elemente Methode (FEM).

2.1.3 Technisch wichtige Beanspruchungen von Bauteilen

Beanspruchungsart	Ursache	Typische Verformung
Zug/Druck	Längskraft F_L 	Längsdehnung (konst. über die Querschnittsfläche) => Verlängerung/Verkürzung
Reine Biegung	Biegemoment M_{by} 	Längsdehnung (linear veränderlich über den Querschnitt) => Biegung der Längsachse (neutrale Faser)
Reine Torsion	Torsionsmoment M_t 	Gleitung/Scherung in der Querschnittsebene => Verdrehung der Querschnitte um die Längsachse
Stabilität (Knicken)	Kritische Druckkraft F_K 	Ausknicken beim Erreichen von F_K => Biegung der Längsachse (neutrale Faser) Für $F < F_K$ gilt Druckmodell.
Querkraftschub bei Biegung	Querkraft F_{qz} Verformungsanteil aus Biegemoment zusätzlicher Verformungsanteil aus Querkraftschub (meist gering!) Dieser Beitrag kann für kurze Balken wichtig sein.	Gleitung /Scherung in der Querschnittsebene => Krümmung der Längsachse wie bei der Biegung. Hinweis: Eine reine Querkraftschubbeanspruchung kommt praktisch kaum vor. Sie ist in der Regel an eine Biegebeanspruchung gekoppelt. Ihre Verformungsanteile sind in der Regel im Vergleich zu den Biegebeanspruchungen klein.

Scher-beanspruchung	<p>Dicht (theoretisch unendlich dicht) nebeneinander liegende entgegengesetzt gerichtete parallele Kräfte (Querkräfte F_q)</p> 	<p>Gleitungen / Scherungen in der Querschnittsebene => Gefahr der Zerstörung durch Abscheren</p>
Flächenpressung	<p>Druckbelastung einer ebenen oder gekrümmten Fläche (z. B. zwischen Niet und Blech, Bolzen und Lasche an der gemeinsamen Kontaktfläche)</p> 	<p>Eindrückungen / Stauchungen an der Kontaktfläche. => Gefahr der Oberflächenschädigung (insbesondere bei einer Relativbewegung der Kontaktflächen)</p>

2.2 Definition der Spannung

Die äußeren Belastungen auf einen Körper werden über innere Kräfte zu den Lagern geleitet. Schneiden wir einen im Gleichgewicht befindlichen Körper, so muss auch jedes Teilsystem mit seiner Belastung und mit den in den Schnittflächen verteilten inneren Kräften und Momenten im Gleichgewicht sein, vgl.

Abschnitt 1.9, siehe Bild 2.4

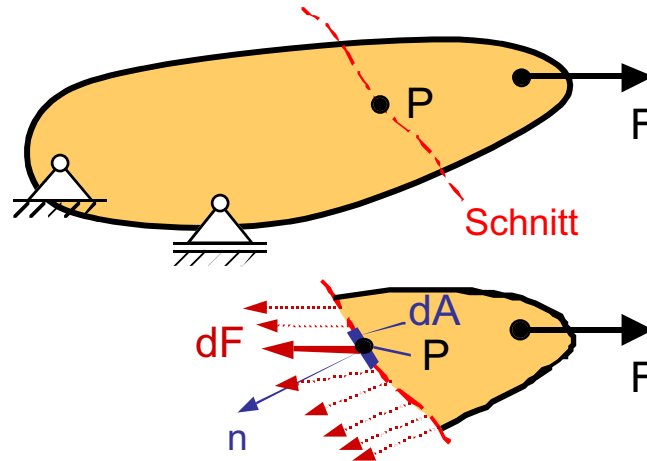


Bild 2.4: Schnittfläche und Schnittkräfte am Teilkörper infolge Last F.

Definition des **Spannungsvektors** an der Schnittfläche dA im Punkt P am Ort R zur Zeit t:

$$\vec{\sigma}(\vec{R}, t) = \frac{d\vec{F}(\vec{R}, t)}{dA}, \quad (2.1)$$

dabei ist $d\vec{F}$ die an der Schnittfläche dA mit der Normalen \vec{n} wirksame Schnittkraft.

$\vec{\sigma}$ ist ein Vektor. Er steht im Allgemeinen nicht normal zur Fläche dA , siehe Bild 2.4 und Bild 2.5.

Einheiten: $[\sigma] = \text{Kraft} / \text{Fläche}$; $[\sigma] = 1 \text{ N/mm}^2 = 1 \text{ MPa}$, $1 \text{ Pa} = 1 \text{ Pascal} = 1 \text{ N/m}^2$.

Wir definieren ein Dreiein in der Fläche dA mit der x -Achse als Normalenvektor \vec{n} , so kann der Vektor $\vec{\sigma}$ in drei Spannungskomponenten zerlegt werden: (Bild 2.5)

Normalspannung $\sigma_n = \sigma_{xx}$

Tangential- oder Schubspannungen τ_{xy} und τ_{xz}

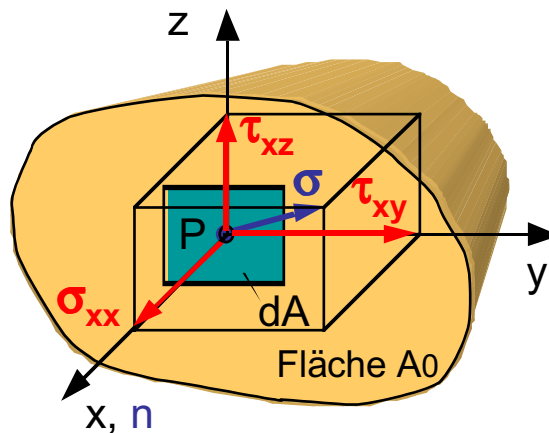


Bild 2.5: Die Spannungskomponenten des Spannungsvektors $\vec{\sigma}$ zur Schnittfläche dA am positivem Schnittufer.

Beachte:

1. **Bezugsfläche** : Spannungen so definiert, dass sie auf die **unverformte Schnittfläche A_0** (Referenzzustand des Körpers) beziehen (Maße des zweiten Piola'schen oder Kirchhoff'schen Spannungstensors).
2. **Indizierung der Spannungen**: Der erste Index gibt an, in welche Richtung die Flächennormale \vec{n} zeigt und der zweite Index beschreibt die Richtung des Spannungsvektors.
(Bei der Normalspannung kann der Index auch wegfallen, da es nur eine Normalspannung für eine Fläche dA gibt: $\sigma = \sigma_{xx}$.)
3. **Definition Schnittufer**: Ein positiven Schnittufers liegt vor, wenn der Normalenvektor \vec{n} aus der Schnittfläche heraus zeigt. Am Gegenufer zeigt er dann in die Fläche hinein, ist also negativ.
Am positivem Schnittufer sind immer die Spannungen positiv anzusehen. Das in Bild 2.5 gezeigt Schnittufer ist somit positiv.
Wir wählen im Allgemeinen in \vec{n} -Richtung auch die x -Achse des Schnittflächen-Dreibeins.

Man kann einen räumlichen Spannungszustand definieren mit 6 unabhängigen Spannungsmaßen, siehe Literatur.

2.2.1 Beispiel zur Normalspannung

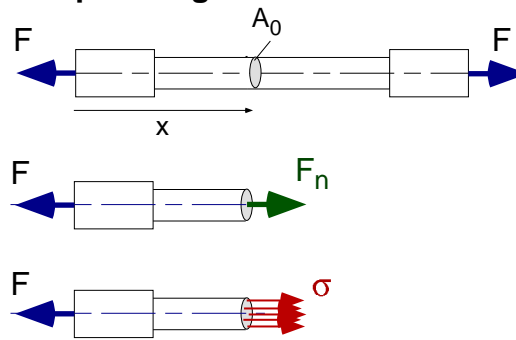


Bild 2.6: Zugstab mit Normalkraft F_n und Normalspannung σ

Auf den Stab wirken die Kräfte F . Die Normalkraft $F_n(x) = N(x)$ am Ort x kann auf die Fläche A_0 im Referenzzustand des Körpers (Fläche im unverformten Zustand) bezogen werden.

Wir nehmen an, sie sei gleichmäßig über den Querschnitt verteilt:

<p>Normalspannung $\sigma(x) = \frac{F_n(x)}{A_0(x)}$ (2.2)</p>
--

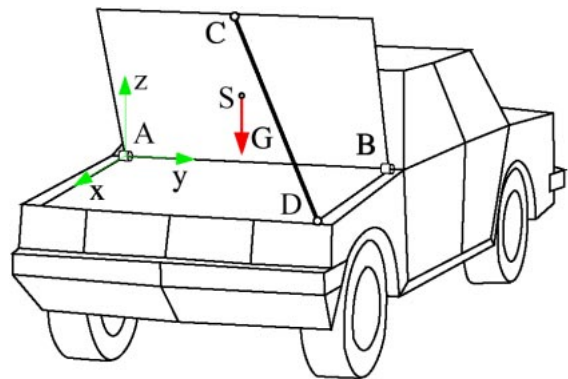
Vorzeichen: $\sigma > 0 \Rightarrow$ Zugspannung, $\sigma < 0 \Rightarrow$ Druckspannung

Beispiel 2.2.1:

An einem homogenen Seil der Länge $l = 50$ m hängt ein Bergsteiger mit $m = 85$ kg Masse. Das Seil hat einen Durchmesser von 8 mm.

Berechne die Normalspannung. (Zug oder Druck?)

Beispiel 2.2.2: Zum Halten der Motorhaube wird in den Stab CD eine Stabkraft von $F_n = -30$ N eingeleitet. Der homogene Stab hat einen Durchmesser von 6 mm. Berechne die Normalspannung. (Zug oder Druck?)



2.2.2 Beispiel zur Schubspannung / Scherspannung

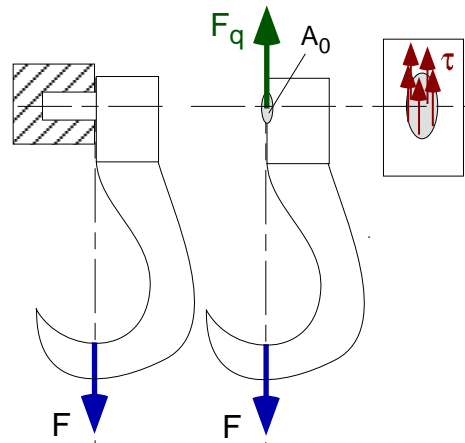


Bild 2.7: Scherung am Bolzen mit Schubspannung

Der Kranhaken ist mit einem Bolzen an die Lasche befestigt. Wir betrachten keine Biegung, sondern nur die Scherung mit der Querkraft F_q als Schnittkraft.

Durch diese Belastungen $F_q(x)$ quer (tangential) zur Fläche A_0 ergeben sich Scherspannungen.

Wir nehmen an, sie sei gleichmäßig über den Querschnitt verteilt:

Schubspannung $\tau = \frac{F_q}{A_0}$	(2.3)
---	-------

Beispiel 2.2.3:

Der Haken in Bild 2.7 ist mit 100 N belastet. Der Bolzen hat einen Durchmesser von 4 mm.

Berechne die Schubspannung.

2.3 Definition des Verzerrungszustandes

Die Änderung der Gestalt und der Größe eines Körpers infolge äußerer Belastungen und Temperatureinwirkungen wird Formänderung oder Deformation oder Verzerrung genannt. Wir betrachten einen Körper mit dem Punkt $P_0(R_0)$ im Referenzzustand (unverformter Zustand) und im verformtem Zustand $P(R)$, (Bild 2.8)

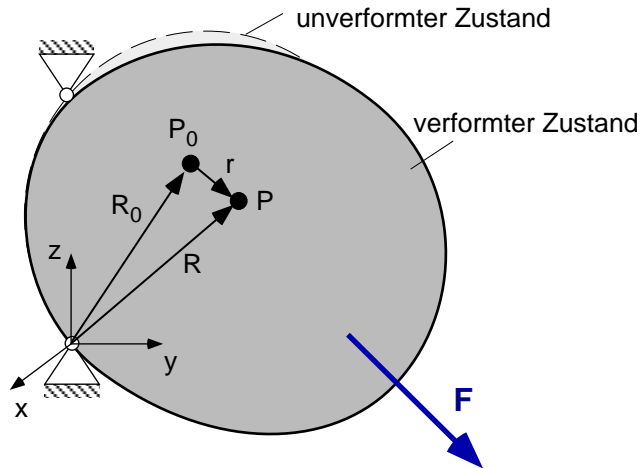


Bild 2.8: Deformation eines Körpers mit dem Verschiebungsvektor $\mathbf{r} = (u, v, w)^T$ in x, y, z-Richtung.

Merke: Erfahren alle Punkte die gleiche Verschiebung, so liegt eine Starrkörperbewegung vor. Es entstehen keine Verformungen. Bild 2.9 zeigt eine Verzerrung und eine Drehung,

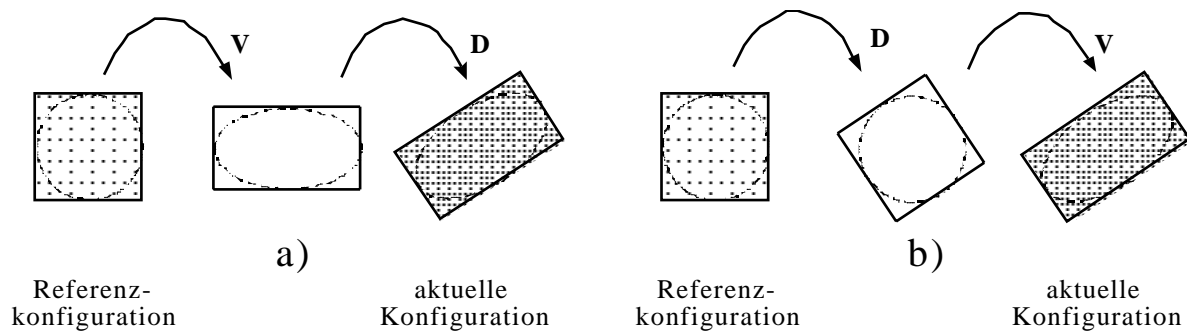


Bild 2.9: Der Körper erfährt eine Starrkörperdrehung und eine Verzerrung. Die Zerlegung der Bewegung kann a) als Verzerrung und Rotation oder b) als Rotation und Verzerrung angesehen werden.

Zwei Verformungsmaße haben sich technisch bewährt:

Dehnung ϵ	als Verlängerung einer Körperlinie bezogen auf die Referenzlänge
Scherung γ	als Winkeländerung eines Körperwinkels bezogen auf die Referenzlage

In der Ebene kann man ein rechteckiges Flächenelement dA_0 im Referenzzustand der Länge dx und dy betrachten, das sich infolge Belastungen dehnt und schert mit der neuen Fläche dA . Die Eckpunkte des P_{01} , P_{02} , und P_{03} sind die Punkte im Referenzzustand. Somit gilt $dx = P_{01}P_{02}$, $dy = P_{01}P_{03}$.

Die **Dehnung** bewirkt eine Verlängerung der Kanten dx und dy in $dx+du(x) = P_1P_2$ und $dy+dv(y) = P_1P_3$.

Die **Scherung** bewirkt eine Verformung des rechten Winkels der 3 Punkte P_{01} , P_{02} , P_{03} in P_1 , P_2 , P_3 .

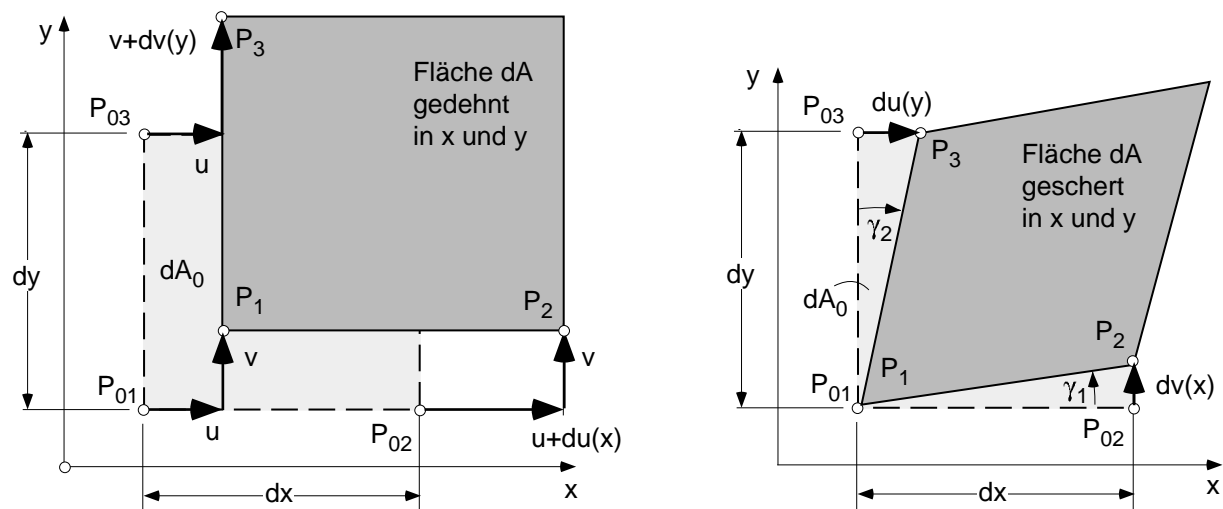


Bild 2.10: Dehnung (links) und Scherung (rechts) eines Flächenelements dA_0 .

$$\text{Hierbei gilt: } du(x) = \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad du(y) = \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad dv(x) = \frac{\partial v}{\partial x} dx, \quad dv(y) = \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

Für kleine Verformungen (lineare Theorie) entnimmt man aus Bild 2.10:

$$\text{Dehnung in x-Richtung } \epsilon_x = \frac{P_1P_2 - P_{01}P_{02}}{P_{01}P_{02}} = \frac{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx - dx}{dx} \Rightarrow \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.4)$$

$$\text{Dehnung in y-Richtung } \epsilon_y = \frac{P_1P_3 - P_{01}P_{03}}{P_{01}P_{03}} = \frac{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy - dy}{dy} \Rightarrow \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.5)$$

$$\text{Scherung in x-y-Ebene } \gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy} \Rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.6)$$

Diese Gleichungen lassen sich auf ein 3D-Volumenelement erweitern. Man erhält den Green'schen Verzerrungstensor, siehe Literatur.

Einheiten: $[\epsilon] = \text{Länge} / \text{Länge} = \text{dimensionslos}$, $[\gamma] = \text{Länge} / \text{Länge} = \text{dimensionslos}$.

2.3.1 Beispiel zur Dehnung

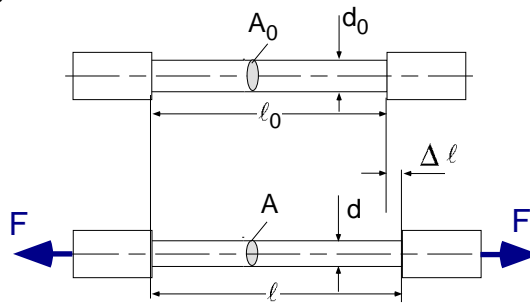


Bild 2.11: Dehnung eines Zugstabes

Auf den Stab wirken die Kräfte F . Der homogene Bereich der Referenzlänge ℓ_0 und mit dem Durchmesser d_0 dehnt sich in Längsrichtung und verjüngt sich in Querrichtung.

Wir machen den Übergang in (2.4) von dx auf die Länge ℓ_0 und von du auf die Längenänderung $\Delta \ell$. Gleichzeitig wird eine Verjüngung des Stabes festgestellt:

Für einen homogenen Stab gilt

$$\text{Dehnung in Längsrichtung} \quad \varepsilon = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} = \frac{\Delta \ell}{\ell_0} \quad (2.7)$$

$$\text{Dehnung in Querrichtung} \quad \varepsilon_q = \frac{d - d_0}{d_0} = -\nu \varepsilon \quad (2.8)$$

mit ν als Querkontraktions- oder Poisson-Zahl, siehe auch Abschnitt 2.4.

Beispiel 2.3.1:

An einem homogenen Stab der Länge $\ell_0 = 12 \text{ m}$ hängt ein Gewicht der Masse $m = 1500 \text{ kg}$. Der Stab hat einen Durchmesser von 8 mm . Die Dehnung sei $\varepsilon = 0.25 \text{ ‰}$ und $\nu = 0.3$.

Berechne die Längenänderung, aktuelle Länge und Durchmesser und Querdehnung.

2.4 Materialverhalten - Materialgesetze

2.4.1 Der Zugversuch

Mittels eines Zugversuches lässt sich ein Zusammenhang zwischen der Spannung und der Dehnung herstellen. Im Zugversuch (vgl. Werkstofftechnik) wird ein genormter Zugstab (Bild 2.12) mit Kreisquerschnitt d_0 , festgelegter Messlänge ℓ_0 und einer bestimmten Oberflächenbeschaffenheit belastet und dabei das Spannungs-Dehnungs-Diagramm (Bild 2.13) aufgezeichnet. Dabei wenden wir (2.2) und (2.7) an:

$$\text{Nennspannung } \sigma = \frac{F}{A_0} \text{ mit Dehnung } \varepsilon = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} = \frac{\Delta \ell}{\ell_0} \quad (2.9)$$

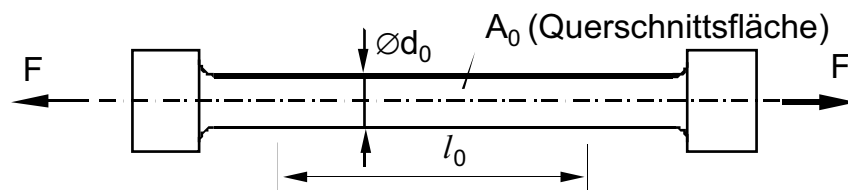


Bild 2.12: Der genormte Zugstab (DIN 50145) zur Bestimmung des Spannungs-Dehnungs-Diagramms

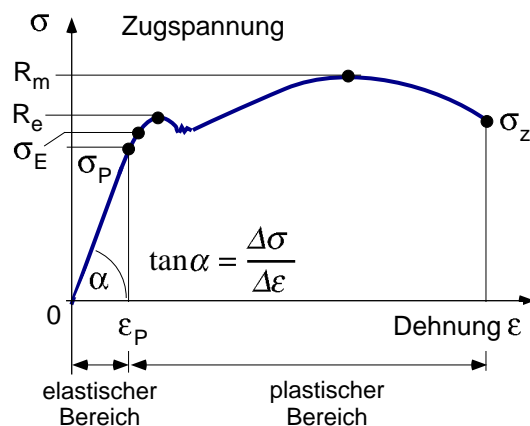


Bild 2.13: Spannungs-Dehnungs-Diagramm für Baustahl

Hierin bedeuten:

σ_P : Spannung der Proportionalgrenze
mit Proportionaldehnung ε_P
Hieraus entnimmt man das Hooke'sche Gesetz.

σ_E : Spannung der Elastizitätsgrenze
Rücknahme der Belastungen ergibt wieder den
Referenzzustand des Bauteils (elastischer Bereich)

R_e : Streckgrenze

Wird zur Beurteilung der Tragfähigkeit einer
Konstruktion verwendet. Wenn Wert nicht auffindbar,
nehme $R_{P,0.2}$ - bei 0.2% plastischer Dehnung.

R_m : Zugfestigkeitswert (Kaltfestigkeit).

Sie bezeichnet z.B. die Baustähle.
(St37 hat $R_m = 370 \text{ N/mm}^2$ bei $R_e = 240 \text{ N/mm}^2$)

σ_Z : Bruchnennspannung mit Bruchdehnung ε_Z

2.4.2 Elastizitätsmodul E und Hooke'sches Gesetz

Aus σ_P in Bild 2.13 bestimmt man den **Elastizitätsmodul E**.

Somit gilt für das (lineare)

$$\text{Hooke'sche Gesetz} \quad \sigma = E \varepsilon \quad \text{oder} \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (2.10)$$

Es beschreibt den einachsigen Spannungszustand, vgl. Abschn. 2.2.1 und 2.3.1.

Im der englischen Literatur wird E als Young's modulus bezeichnet.

Das verallgemeinerte Hooke'sche Gesetz der 3D Elastizitätstheorie ist der Literatur zu entnehmen.

Der **Elastizitätsmodul E** ist eine wichtige Materialkenngröße. In Tabellenbüchern kann man Werte für E nachlesen. Tabelle 2.1 zeigt einige Richtwerte, vgl. Vorlesung Werkstofftechnik.

Die **Querkontraktionszahl v** ist neben E die zweite wichtige Materialgröße, vgl. (2.8). Hierfür gelten die Grenzwerte: $v = 0$ bedeutet keine Querdehnung, $v = 0.5$ bedeutet inkompressibles Material.

Werkstoff	Elastizitätsmodul E (N/mm ²)	Gleitmodul G (N/mm ²)	Querkontraktions-zahl v (-)	Wärmeausdehn.- koeff. α (K ⁻¹)	Dichte ρ (kg/dm ³)
Stahl / Stahlguss	$2.1 \cdot 10^5$		0.3	$12 \cdot 10^{-6}$	7.8
Grauguss	$0.8 \cdot 10^5$		0.1 ... 0.2	$9 \cdot 10^{-6}$	7.3
Kupfer	$1.25 \cdot 10^5$		0.3	$16 \cdot 10^{-6}$	8.9
Messing	$0.9 \cdot 10^5$		0.3	$18 \cdot 10^{-6}$	8.5
Aluminium	$0.71 \cdot 10^5$		0.3	$23 \cdot 10^{-6}$	2.7
Stahlbeton	$0.4 \cdot 10^5$		0 ... 0.16		2.8
Buchenholz	$0.12 \cdot 10^5$		0	$3 \cdot 10^{-6}$	0.72
Gummi	2 ... 3		0.5		
Glas	$0.72 \cdot 10^5$		0	$4 \cdot 10^{-6}$	2.2 .. 6.3
Diamant	$10 \cdot 10^5$		0	$1 \cdot 10^{-6}$	3.5
Titanlegierung	$1.1 \cdot 10^5$		0.3	$9 \cdot 10^{-6}$	4.8
Polyamid	$0.4 \cdot 10^5$		0.5	$100 \cdot 10^{-6}$	1.1

Tabelle 2.1: Materialeigenschaften technisch wichtiger Werkstoffe



Ergänzen Sie die Tabelle durch weitere Werte aus der Literatur, z.B. Hütte.

2.4.3 Schubmodul G

Für die Scherung in Bild 2.10 gilt ein ähnliches Gesetz wie für die Dehnung. Der lineare Zusammenhang von Schubspannung τ und Scherung γ lautet

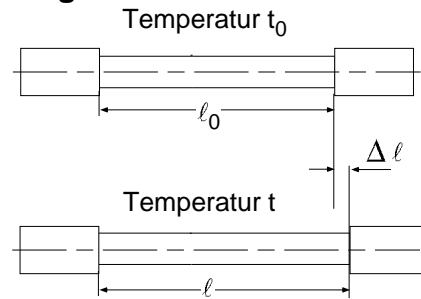
$$\tau = G \gamma \quad \text{oder} \quad \gamma = \frac{\tau}{G} \quad \text{mit} \quad \text{Schubmodul} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.11)$$

Mit der Beziehung (2.11) kann mittels **Elastizitätsmodul E** und **Querkontraktionszahl ν** der **Schubmodul (oder Gleitmodul) G** berechnet werden.

Beispiel 2.4.1: Bestimme den Schubmodul G für Stahl und Aluminium. Trage die Werte in Tab. 2.1 ein.

2.4.4 Wärmedehnung und Wärmespannungen

Bild 2.14: Dehnung eines Stabes infolge Erwärmung.



Wird ein Stab erwärmt, so dehnt er sich aus. Wir betrachten den eindimensionalen Zustand, Bild 2.14:

Wärmedehnung $\varepsilon_{th} = \frac{\Delta \ell_{th}}{\ell_0} = \alpha (t - t_0) = \alpha \Delta t$ (2.12)

Hier sind:

α = Längenausdehnungskoeffizient [1/ Kelvin] = [1/K]. Werte für Materialien siehe Tabelle 2.1.

Δt = Temperaturdifferenz [K] zwischen Referenztemperatur t_0 zur Länge ℓ_0

und aktueller Temperatur t . Bei $t > t_0$ gilt $\Delta t > 0$ und $\varepsilon_{th} > 0$.

Hält man die Ränder des Stabes in Bild 2.14 fest und erwärmt den Stab, stellt sich eine Wärmespannung (Druckspannung) im Stab ein.

Wärmespannung $\sigma_{th} = -E \varepsilon_{th} = -E \alpha \Delta t$ bei $\Delta \ell_{th}$ und $t > t_0$ (2.13)
--

Beispiel 2.4.2: Ein Bolzen der Länge $\ell_0 = 300$ mm mit Durchmesser $d_0 = 30$ mm bei Raumtemperatur $t_0 = 20$ °C wird auf $t = 220$ °C erwärmt. Der Bolzen ist aus Kupfer und an den Enden fest eingespannt.

Welche Normalspannung und welcher Durchmesser stellen sich dadurch ein?

2.5 Festigkeitsnachweis, zulässige Spannungen

Dimensionierung eines Bauteils auf Festigkeit bedeutet, die aktuell berechnete Spannung σ mit einer dem Material zulässigen Spannung σ_{zul} zu vergleichen. Es muss für alle Zeiten gelten

$$\sigma \leq \sigma_{zul} \quad (2.14)$$

Das gilt für die Normalspannung wie für die Schubspannung.

2.5.1 Belastungsarten und deren Faktoren

Man unterscheidet zwischen (Bild 2.15)

- ◇ statische Belastungen
- ◇ schwingende Belastungen
- ◇ stoßartige und stochastische Belastungen

Aufgrund dieser Belastungsarten werden die zulässigen Spannungen aus den Spannungs-Dehnungs-Diagramm in Bild 2.13) durch **Sicherheitsfaktoren S** modifiziert. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2.2 zusammengestellt.

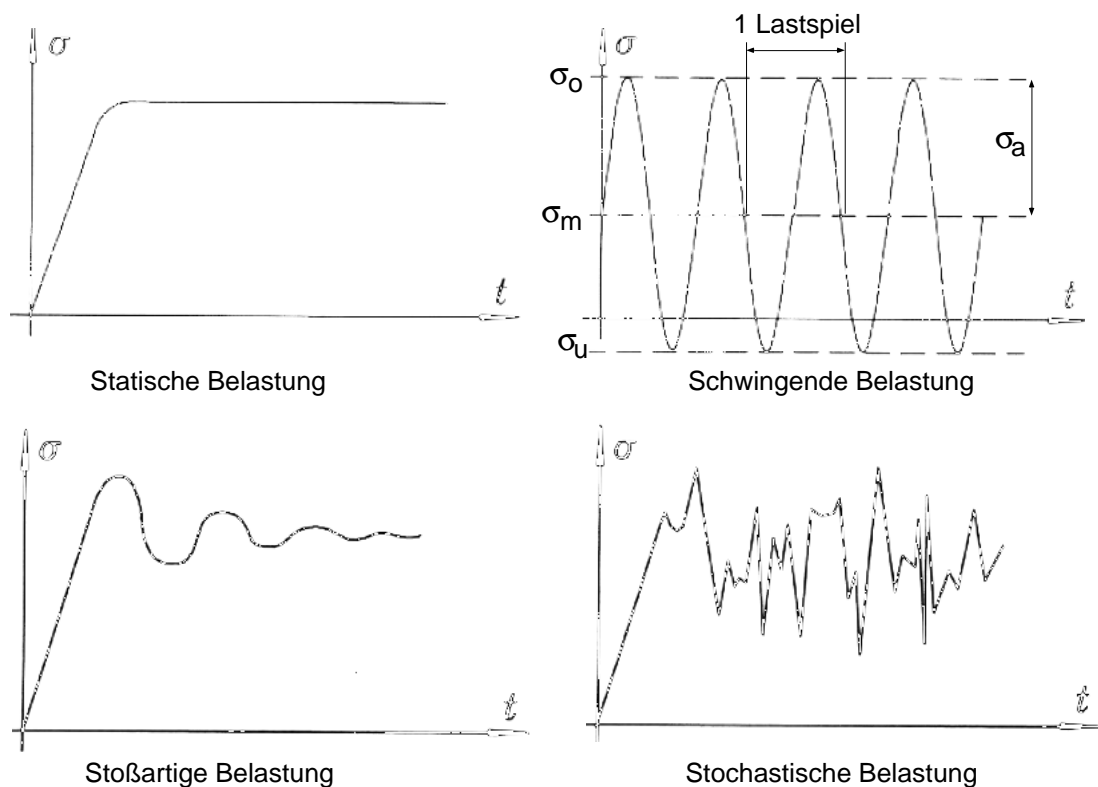


Bild 2.15: Belastungsarten auf das Bauteil

Neben den Belastungsfaktoren sind auch Formfaktoren aufgrund von Kerben, Löchern usw. in Bauteilen gebräuchlich. Hier wird auf die Literatur verwiesen.

Bei schwingende Belastungen ist das Diagramm nach Wöhler und Smith in Anwendung. Hieraus wird eine Dauerfestigkeit σ_D für z.B. 10^6 -Lastzyklen ermittelt. Auch hier wird auf die Literatur verwiesen.

2.5.2 Zulässige Spannungen

Tab. 2.2: Zulässige Spannungen

(R_m = Zugfestigkeit, R_e = Streckgrenze, σ_D = Dauerfestigkeit aus Smith-Diagramm)

Vielfach werden noch weitere Faktoren angenommen.

Belastung	Statisch	Statisch	Schwingend
Werkstoff	Spröde	Zäh	Spröde oder zäh
Zulässige Spannung	$\sigma_{zul} = R_m / S_B$ S_B = Bruchspannungs-Sicherheitsfaktor 2 ... 4	$\sigma_{zul} = R_e / S_F$ S_F = Formänderungs-Sicherheitsfaktor 1.2 ... 2	$\sigma_{zul} = \sigma_D / S_D$ S_D = Dauerfestigkeits-Sicherheitsfaktor 1.2 ... 3

Tab. 2.3: Zahlenwerte von Stahl und Gußeisen

Auszug aus K. Kabus, Mechanik und Festigkeitslehre, Tabellen, Hanser Verlag, 2003.

Tabelle 13. Festigkeitswerte einiger Eisenwerkstoffe (Auszüge aus DIN- und DIN EN-Normen)

Mindest-Festigkeitswerte in N/mm ² der Stahlsorten nach DIN EN 10025 für warmgewalzte Erzeugnisse aus unlegierten Baustählen (gültig für alle Gütegruppen)									
Stahlsorte	Zugfestigkeit R_m			Streckgrenze R_e					
	für Nenndicken in mm								
	<3	≥3 ≤100	>100 ≤150	≤16	>16 ≤40	>40 ≤63	>63 ≤80	>80 ≤100	>100 ≤150
S185	310	290	—	185	175	—	—	—	—
S235 ^{*)}	360	340	340	235	225	215	215	215	195
S275	430	410	400	275	265	255	245	235	225
S355	510	490	470	355	345	335	325	315	295
E295	490	470	450	295	285	275	265	255	245
E335	590	570	550	335	325	315	305	295	275
E360	690	670	650	360	355	345	335	325	305
^{*)} Die Gütegruppen JR und JRG1 sind nur in Nenndicken ≤25 mm lieferbar.									
Streckgrenzen R_e bzw. 0,2-%-Dehngrenzen und Zugfestigkeiten R_m (bei Gusseisen mit Lamellengraphit) in N/mm ² von Eisenwerkstoffen									
Vergütungsstähle nach DIN EN 10083 (DIN 17200) im vergüteten Zustand									
Sorte	Dicke in mm			Sorte	Dicke in mm				
	≤16	>16 ≤40	>40 ≤100		≤16	>16 ≤40	>40 ≤100	>100 ≤160	
C22, C22E, C22R	340	290	—	34Cr4, 34CrS4	700	590	460	—	
C25, C25E, C25R	370	320	—	37Cr4, 37CrS4	750	630	510	—	
C30, C30E, C30R	400	350	300	41Cr4, 41CrS4	800	660	560	—	
C35, C35E, C35R	430	380	320	25CrMo4, 25CrMoS4	700	600	450	400	
C40, C40E, C40R	460	400	350	34CrMo4, 34CrMoS4	800	650	550	500	
C45, C45E, C45R	490	440	370	42CrMo4, 42CrMoS4	900	750	650	550	
C50, C50E, C50R	520	460	400	50CrMo4	900	780	700	650	
C55, C55E, C55R	550	490	420	36CrNiMo4	900	800	700	600	
C60, C60E, C60R	580	520	450	34CrNiMo6	1000	900	800	700	
28Mn6	590	490	440	30CrNiMo8	1050	1050	900	800	
Stahlguss nach DIN 1681									
GS-38	200	GS-45	230	GS-52	260	GS-60	300		
Temperguss nach DIN EN 1562 (DIN 1692)									
EN-GJMB-450-6 (GTS-45-06)		270	EN-GJMW-360-12 (GTW-S38-12)		190				
EN-GJMB-550-4 (GTS-55-04)		340	EN-GJMW-400-5 (GTW-40-05)		220				
EN-GJMB-650-2 (GTS-65-02)		430	EN-GJMW-450-7 (GTW-45-07)		260				
Gusseisen mit Kugelgraphit nach DIN EN 1563 (DIN 1693)									
EN-GJS-400-15 (GGG-40)		250	EN-GJS-600-3 (GGG-60)		370				
EN-GJS-500-7 (GGG-50)		320	EN-GJS-700-2 (GGG-70)		420				
Gusseisen mit Lamellengraphit nach DIN EN 1561 (Grauguss DIN 1691) Zugfestigkeit R_m									
EN-GJL-100 (GG-10)		100	EN-GJL-250 (GG-25)		250				
EN-GJL-150 (GG-15)		150	EN-GJL-300 (GG-30)		300				
EN-GJL-200 (GG-20)		200	EN-GJL-350 (GG-35)		350				

Tab. 2.3: Zulässige Spannungen - FortsetzungTabelle 14. Festigkeitskennwerte von Stahl und Gusseisen (Grauguss) für ruhende Beanspruchung (R_m und R_e bzw. $R_{p0,2}$ nach Tab. 13, f_q nach Tab. 17)

Werkstoff	Beanspruchungsart				
	Zug	Druck	Biegung	Schub	Torsion
Stahl	R_m	$\sigma_{dB} \approx R_m$	$\sigma_{bB} \approx f_q \cdot R_m$	$\tau_{aB} \approx 0,8 R_m$	$\tau_{tB} \approx 0,7 R_m$
	R_e bzw. $R_{p0,2}$	$\sigma_{dF} \approx R_e$	$\sigma_{bF} \approx f_q \cdot R_e$	—	$\tau_{tF} \approx 0,6 R_e$
Gusseisen (Grauguss)	R_m	$\sigma_{dB} \approx 4 R_m$	$\sigma_{bB} \approx f_q \cdot R_m$	$\tau_{aB} \approx R_m$	$\tau_{tB} \approx R_m$

Tabelle 15. Werkstoffkennwerte von Stahl und Gusseisen (Grauguss) bei schwingender Beanspruchung (R_m und R_e bzw. $R_{p0,2}$ nach Tab. 13)

Beanspruchung	Stahl		Gusseisen (Grauguss)	
	Ruhegrad		Ruhegrad	
	$R = 0$	$R = 0,5$	$R = 0$	$R = 0,5$
Zug-Druck	$\sigma_W \approx 0,4 R_m$	$\sigma_{Sch} \approx 0,8 \dots 1,0 R_e^{1)}$	$\sigma_W \approx 0,3 R_m$	$\sigma_{Sch} \approx 0,45 R_m$
Biegung	$\sigma_{bW} \approx 0,5 R_m$	$\sigma_{bSch} \approx 0,8 \dots 1,0 \sigma_{bF}^{1)}$	$\sigma_{bW} \approx 0,45 R_m$	—
Torsion	$\tau_{tW} \approx 0,3 R_m$	$\tau_{tSch} \approx \tau_{tF} = 0,6 R_e$	$\tau_{tW} \approx 0,35 R_m$	$\tau_{tSch} \approx 0,3 R_m$

1) Oberwert bei Baustahl nach DIN EN 10025

Tabelle 16. Anhaltswerte für Zug-Druck-Wechselfestigkeiten σ_W in N/mm^2

Baustahl DIN EN 10025	σ_W	Vergütungsstahl DIN EN 10083	σ_W	Stahlguss DIN 1681	σ_W	Gusseisen DIN EN 1561	σ_W
S235	165	C45	290	GS-38	130	EN-GJL-150	45
S275	200	C60	340	GS-45	150	EN-GJL-200	60
E295	225	34CrMo4	360	GS-52	175	EN-GJL-250	75
E335	270	51CrV4	400	GS-60	205	EN-GJL-300	90
E360	315	30CrNiMo8	500			EN-GJL-350	104

Tabelle 17. Anhaltswerte für die Querschnittsformzahl f_q bei ruhender Biegebeanspruchung






Querschnittsform						
$f_q \approx$	1,05	1,15	1,2	1,2	1,4	1,5

Tabelle 18. Richtwerte für erforderliche Sicherheiten S_{Def} gegen Dauerbruch in Abhängigkeit von der Häufigkeit H der Höchstlast und dem Ruhegrad R (eingeklammerte Werte bei Druck und Biegedruck)

H in %	Zähe Stoffe (Stahl)					Spröde Stoffe (Grauguss)				
	R					R				
	0	0,25	0,5	0,75	1	0	0,25	0,5	0,75	1
100	1,8	1,75	1,7	1,45	$S_{Def} = 1,2$	2	2 (2,4)	2 (2,8)	2 (3,2)	$S_{Def} = 2 (3,5)$
75	1,6	1,55	1,5	1,4		1,8	1,9 (2,2)	1,9 (2,7)	1,95 (3,1)	
50	1,4	1,4	1,4	1,3		1,7	1,75 (2,1)	1,8 (2,6)	1,9 (3)	
25	1,2	1,2	1,2	1,2		1,5	1,6 (2)	1,75 (2,5)	1,9 (3)	

Beispiel 2.5.1:

Ein Federblech der Dicke 0,2 mm und Höhe 4 mm aus 30CrNiMo8 wird als schwingende Aufhängung eines Schwingers benutzt. Bestimme den Wert für die zulässige Biegespannungen. Verwende Tab. 2.3. Hierin: $f_q = S_F$.

2.6 Dehnung des geraden Stabes

2.6.1 Gleichung der Dehnung und Verschiebung

Für die Dehnung von geraden Stäben oder Balken werden folgende

Annahmen getroffen:

1. Der Querschnitt ist symmetrisch
2. Die Belastung greift im Flächenschwerpunkt der Stabachse an und wirkt nur in x-Richtung. Die Normalspannung ist für die gesamte Fläche gleich.
3. Der Belastungszustand ist von allen anderen Belastungen entkoppelt und liefert nur eine Normalkraft $F_n = N$.
4. Die Querschnitte bleiben eben und parallel zu einander. Sie verschieben sich nur in x-Richtung.

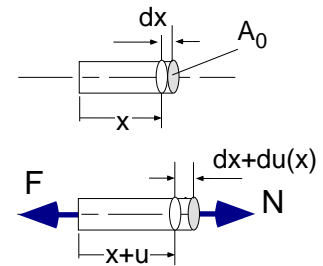


Bild 2.16: Stabdehnung

Für ein Element der Referenzlänge dx und der aktuellen Länge $dx+du(x)$ (Bild 2.16), wo u die Verlängerung des Stabes an der Stelle x sein soll, findet man mit (2.4) und (2.10) bei kleinen Dehnungen

$$\text{Dehnung} \quad \varepsilon_x = \frac{(dx + du) - dx}{dx} = \frac{\partial u(x)}{\partial x} = u'(x) \quad (2.15)$$

$$\text{Dehnungsgleichung} \quad u'(x) = \frac{\sigma}{E} = \frac{F_n(x)}{E A_0} = \frac{N(x)}{E A_0} \quad (2.16)$$

$$\text{Längsverschiebung am Ort } x: \quad u(x) = u_0 + \int_0^x \frac{N(\xi)}{E A_0} d\xi \quad (2.17)$$

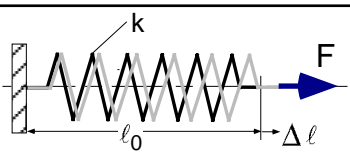
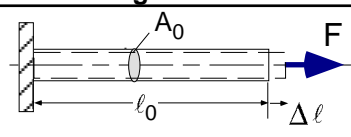
$u_0 = u(x=0)$ ist die Randauslenkung in x-Richtung an der Stelle $x = 0$.

Beispiel 2.6.1: Ein Kupferstab der Länge $L_0 = 100$ m hängt im Schwerfeld.

- a) Bestimme den Verlauf der Normalkraft und Normalspannung infolge Eigengewicht.
 - b) Bestimme die Dehnung u des Stabes als Funktion von x .
- Werte: $E = 1.25 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$, Dichte $\rho = 8900 \text{ kg/m}^3$, $A_0 = 1 \text{ mm}^2$.

2.6.2 Federmodell des Zug/Druck-Stabes

Der Zug-/Druckstab in Abschnitt 2.2.1 und 2.3.1 stellt eine lineare Zug-/Druck-Feder dar:

Federmodell	Modell homogener Stab
 <p>Bild 2.15: Federmodell</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> Kraft $F = k \Delta l$ </div> (2.18) <p>mit Δl [mm] als Längenänderung und k [N/mm] als lineare Federsteifigkeit.</p>	 <p>Bild 2.16: Stabmodell</p> <p>Kraft $F = \sigma A_0$, $\sigma = E \varepsilon$, $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$</p> $\Rightarrow F = \underbrace{\frac{E A_0}{l_0}}_k \Delta l = k \Delta l$ <p>mit Längenänderung Δl [mm]</p> <p>E [N/mm²] Elastizitätsmodul A_0 [mm²] Referenz-Querschnittsfläche l_0 [mm] Referenz-Länge</p> <p>Folgt:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> Ersatzsteifigkeit $k = \frac{E A_0}{l_0}$ [N / mm] </div> (2.19)

Beispiel 2.6.2:

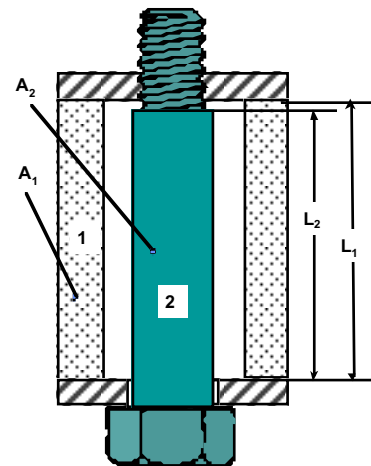
Die Schraube 2 soll das Rohr 1 bis zum Anschlag zusammen drücken. Dadurch werden in den Teilen Spannungen und Längenänderungen erzeugt. Die Deckel werden als steif angesehen.

Gesucht : Die Längskräfte und Spannungen in Rohr und Schraube sowie die neue Länge ℓ .

Gegeben sind die Referenzwerte:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= 50,05 \text{ mm}; & L_2 &= 50 \text{ mm}; \\
 A_1 &= 1100 \text{ mm}^2; & A_2 &= 110 \text{ mm}^2; \\
 E_1 &= 1.2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 & E_2 &= 2.1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2
 \end{aligned}$$

Bild 2.17



2.7 Biegung des geraden schubstarrten Balkens

2.7.1 Modellannahmen - Bernoulli-Hypothese

Für die Biegung von geraden Balken in einer Ebene werden folgende Annahmen getroffen:

(Darüber hinausgehende Modelle siehe Literatur)

1. Der Querschnitt ist symmetrisch bezüglich der z-Achse.
2. Die Belastungen greifen im Flächenschwerpunkt S der Stabachse an, in Form von Lasten in z-Richtung und Momente um die y-Achse.
3. Der Belastungszustand ist von allen anderen Belastungen entkoppelt und liefert nur die Schnittgrößen: Biegemoment $M_b = M$ und Querkraft $F_q = Q$. \Rightarrow keine Dehnung, keine Torsion.
4. Die Querschnitte des Balkens sind sehr dünn im Vergleich zu der Balkenlänge.
 \Rightarrow Die Scherung infolge der Querkraften wird vernachlässigt \Rightarrow schubstarrer Balken.
6. Die Querschnitte bleiben eben und verformen sich nicht ($A = A_0$). Sie stehen immer senkrecht zur Balkenachse. Jedes Scheibe der Länge Δx des Balkens wird nur in der x-z-Ebene verschoben und verdreht.
(Bernoulli-Hypothese um 1700).
6. Die Balkenachse erfährt infolge der Biegung keine Dehnung \Rightarrow neutrale Faser!

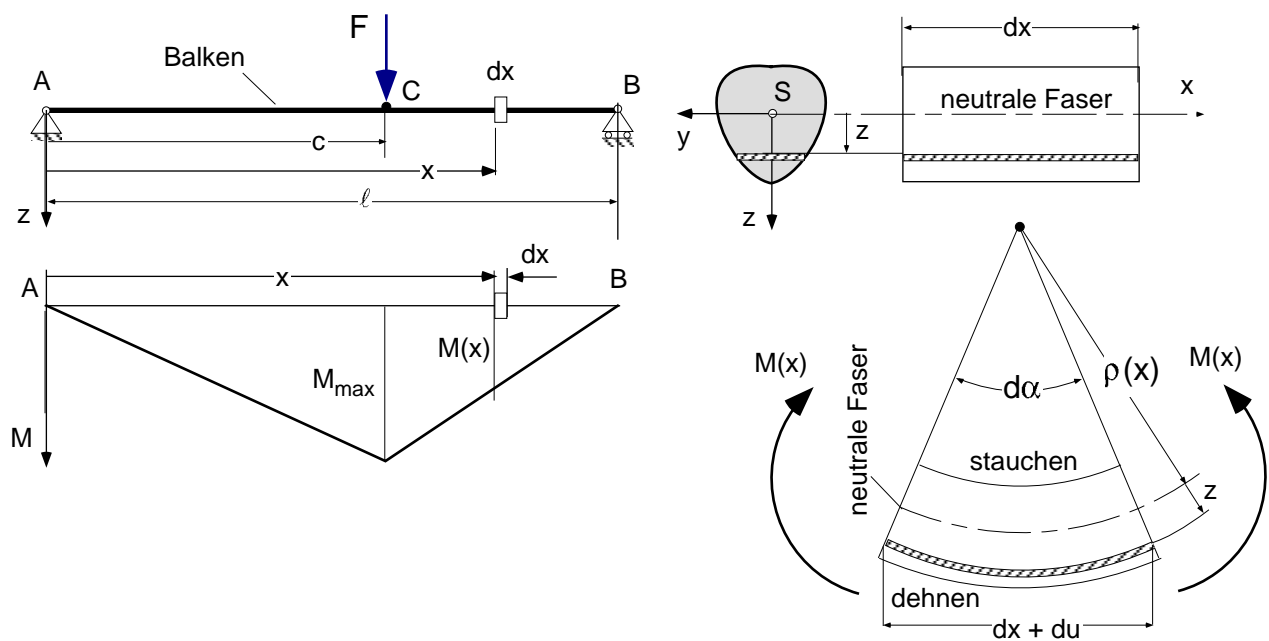


Bild 2.18: Der Biegebalken und seine Modellannahmen.

2.7.2 Dehnung und Biegespannung

Ein Element der Referenzlänge dx wird durch Biegemomente $M(x)$ nur verbogen und liefert die **Krümmung des Balkens** $\rho(x)$. Für die Faserlänge an der Stelle x gilt

$$\text{Faserlänge} \quad dx = \rho(x) d\alpha, \quad dx + du = (\rho(x) + z) d\alpha$$

Wegen Annahme 6 werden Fasern innerhalb der neutralen Faser gestaucht (-> Stauchung = - Dehnung -> Druckspannung) und Fasern außerhalb der neutralen Faser gedehnt (-> + Dehnung -> Zugspannung).

Wir nehmen eine lineare Funktion der Dehnung im Querschnitt bezüglich der Koordinate z an, vgl. (2.4), siehe Bild 2.19. Mit dem Materialgesetz der Dehnung (2.10) folgt: (E ist Elastizitätsmodul)

$$\text{Dehnung in } x \quad \varepsilon_x(x, z) = \varepsilon(x, z) = \frac{(dx + du) - dx}{dx} = \frac{(\rho(x) + z) d\alpha - \rho(x) d\alpha}{\rho(x) d\alpha} = \frac{1}{\rho(x)} z \quad (2.20)$$

$$\text{Spannung in } x \quad \sigma(x, z) = E \varepsilon(x, z) = \frac{E}{\rho(x)} z \quad (2.21)$$

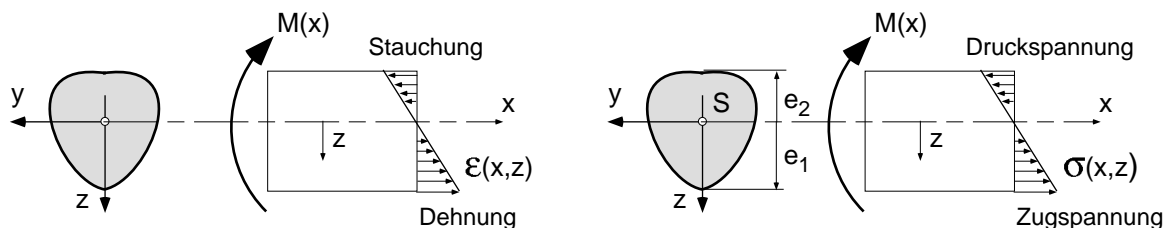


Bild 2.19: Dehnungsverlauf (links) und Spannungsverlauf (rechts) bei der Biegung.

Wegen Annahme 3 darf am Element dx an der Stelle x keine Längskraft F_n wirken. Außerdem soll das Biegemoment um die z -Achse null sein. Daraus folgt:

$$F_n = \iint_A \sigma(x, z) dy dz = \frac{E}{\rho(x)} \iint_A z dy dz \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow S_y = \iint_A z dy dz \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.22)$$

$$M_{bz} = \iint_A y \sigma(x, z) dy dz = \frac{E}{\rho(x)} \iint_A y z dy dz \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow J_{yz} = \iint_A y z dy dz \stackrel{!}{=} 0$$

S_y (m^3) ist ein Flächenmoment 1. Ordnung und J_{yz} (m^4) ist ein Flächenmoment 2. Ordnung.

Das ist gewährleistet, wenn 1. die y -Achse genau durch den Flächenschwerpunkt S geht und 2. auch die z -Achse genau durch S geht. **Somit liegt die neutrale Faser genau im Flächenschwerpunkt S und die Achsen y und z sind Hauptachsen des Flächenquerschnitts.**

Es verbleibt nur ein **Biegemoment um die y-Achse** am Ort x:

$$\text{Biegemoment } M_y(x) = M(x) = \int_A z \sigma(x, z) dA = \frac{E}{\rho(x)} \underbrace{\int_A z^2 dA}_{J_{yy}} \Rightarrow M(x) = \frac{E J_{yy}(x)}{\rho(x)} \quad (2.23)$$

Wir definieren das

$$\text{Flächenträgheitsmoment (Flächenmoment 2. Ordnung) um y-Achse } J_{yy} = \int_A z^2 dA \quad (2.24)$$

Somit folgt aus (2.23) mit (2.21) für ein gegebenes Biegemoment $M(x)$ am Ort x

$$\text{Krümmung des Balkens} \quad \frac{1}{\rho(x)} = \kappa(x) = \frac{M(x)}{E J_{yy}} \quad (2.25)$$

$$\text{Biegedehnung im Querschnitt} \quad \varepsilon(x, z) = \frac{M(x)}{E J_{yy}} z \quad (2.26a)$$

$$\text{Biegespannungen im Querschnitt} \quad \sigma(x, z) = \frac{M(x)}{J_{yy}} z \quad (2.26b)$$

mit den maximalen Spannungen am Rand an der Stelle für M_{\max} , siehe Bild 2.18 und 2.19:

$$\text{max. Zugspannung am unteren Rand } z = e_1: \quad \sigma_{Zug} = \frac{M_{\max}}{J_{yy}} e_1 \quad (2.27)$$

$$\text{max. Druckspannung am oberen Rand } z = e_2: \quad \sigma_{Druck} = \frac{M_{\max}}{J_{yy}} e_2 \quad (2.28)$$

Man definiert für ein Querschnittsprofil die **Biege-Widerstandsmomente**

$$\text{Biege-Widerstandsmomente } W_{y1} = \frac{J_{yy}}{e_1}, \quad W_{y2} = \frac{J_{yy}}{e_2}, \quad W_{y-\min} = \frac{J_{yy}}{e_{\max}} \quad (2.29)$$

und daraus die

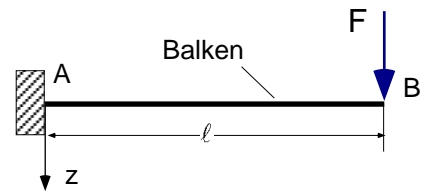
$$\text{maximale Biegespannung } |\sigma_{\max}| = \frac{|M_{\max}|}{J_{yy}} e_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_{y-\min}} \quad (2.30)$$

Mit der max. Biegespannung $\sigma_{b\max}$ aus Abschnitt 2.5.2 die umgedrehte Frage:

$$\text{erforderliches Widerstandsmoment } W_{yy \text{ erf}} = \frac{|M_{\max}|}{\sigma_{bzul}} \quad (2.31)$$

Zur Bestimmung des Flächenträgheitsmoments J_{yy} und der Widerstandsmomente W_{yy} siehe Tab. 2.4 oder Abschnitt 2.8 oder andere Tabellenwerke.

Beispiel 2.7.1: Ein Kragbalken aus Holz der Breite $b = 20 \text{ cm}$, soll bei Länge $l = 3 \text{ m}$ mit $F = 5 \text{ kN}$ belastet werden. Gesucht ist die Balkenhöhe h so, dass die zulässige Spannung $\sigma_{\text{zul}} = 800 \text{ N/cm}^2$ nicht überschritten wird. Entnehme das Flächenträgheitsmoment aus Tab. 2.4.



2.7.3 Biegelinie des geraden Balkens

Wir gehen von den Annahmen des geraden Balkens aus Abschn. 2.7.2 aus (Bernoulli-Hypothese)

Es gilt nach (2.25) für die Krümmung: $\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{E J_{yy}(x)} = \kappa(x)$

Für eine positive Auslenkung $w(x)$ der Biegelinie in z -Richtung (Bild 2.20) stellt sich eine negative Neigung und negative Krümmung ein, dargestellt durch die Ableitungen von w :

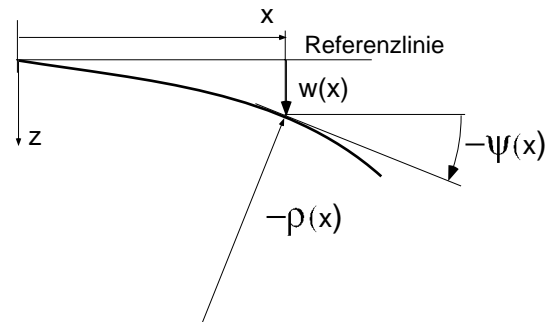


Bild 2.20: Die Krümmung des Balkens

$$\tan(-\psi) = \frac{\Delta w}{\Delta x} \Rightarrow w'(x) = \frac{\partial w}{\partial x} = -\tan \psi, \quad w''(x) = \frac{\partial w'}{\partial x}$$

wie folgt dar: (siehe Lehrbuch)

$$\text{Krümmung} \quad \kappa(x) = \frac{1}{\rho(x)} = -\frac{w''(x)}{(1 + w'^2(x))^{\frac{3}{2}}} \quad (2.32)$$

Für kleine Biegewinkel $|\psi| \ll 1$ kann man annehmen:

$$w' \approx -\psi, \quad |w'| \ll 1 \quad \text{und folglich} \quad \kappa(x) \approx -w''(x).$$

Somit folgen **die linearen Bewegungsgleichungen des geraden Balkens**

$$\text{Dgl. der Biegelinie} \quad w''(x) = -\frac{M(x)}{E J_{yy}(x)} \quad (2.33)$$

Lösung der partiellen Dgl. lautet mit den Randwerten $w'_0 = w'(x=0)$ und $w_0 = w(x=0)$

$$\text{Neigung am Ort } x: \quad w'(x) = w'_0 + \int_0^x w''(\xi) d\xi = w'_0 - \int_0^x \frac{M(\xi)}{E J_y} d\xi \quad (2.34)$$

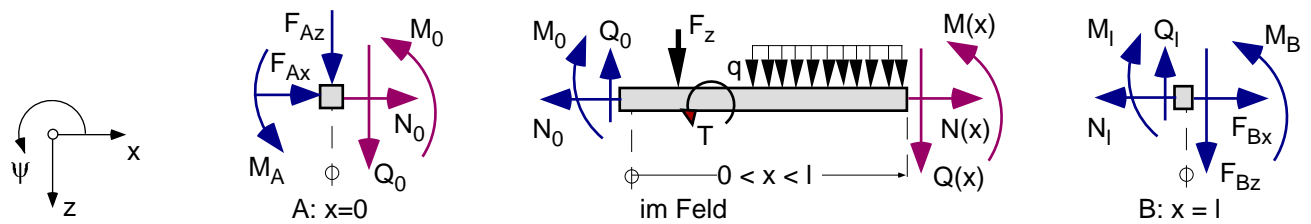
$$\text{Durchbiegung am Ort } x: \quad w(x) = w_0 + \int_0^x w'(\xi) d\xi \quad (2.35)$$

Wir fügen die Gleichungen (2.34) und (2.35) den Feldgleichungen in Abschn. 1.9.2 hinzu. Unter Verwendung der Randterme Q_0 , M_0 , w'_0 und w_0 sowie den Lasttermen im Feld $\hat{Q}(x)$, $\hat{M}(x)$, $\hat{w}'(x)$, $\hat{w}(x)$ ergeben sich die 4 Gleichungen der Biegelehre gerader Balken zusammen mit der Glg. der Normalkraft, siehe Tabelle 2.5.

Beachte: Die Neigung und die Durchbiegung gelten nur für den Fall Normalkraft $N = 0$!

Tabelle 2.5: Die Biegegleichungen des geraden Balkens

aus Falk, Technische Mechanik, Band 3, Erweiterung der Tab. 1.9.1



Benennung	Randelement bei A = x = 0	Beziehung für Stelle x	Ableitung nach x	Randelement bei B = x = l
Normalkraft	$N_0 = -F_{Ax}$	$N(x) = N_0 - \hat{N}(x)$		$N_l = F_{Bx}$
Querkraft	$Q_0 = -F_{Az}$	$Q(x) = Q_0 - \hat{Q}(x)$	$= \frac{dM(x)}{dx}$	$Q_l = F_{Bz}$
Biegemoment	$M_0 = -M_A$	$M(x) = M_0 + Q_0 x - \hat{M}(x)$	$= -EJ \frac{dw'}{dx}$	$M_l = M_B$
Neigung für N = 0	$w_0' = w_A'$ 	$w'(x) = w_0' - \frac{M_0}{EJ} x - \frac{Q_0}{2EJ} x^2 + \hat{w}'(x)$	$= \frac{\partial w}{\partial x}$	$w_l' = w_B'$
Druchbiegung in z-Richtung für N = 0	$w_0 = w_A$ 	$w(x) = w_0 + w_0' x - \frac{M_0}{2EJ} x^2 - \frac{Q_0}{6EJ} x^3 + \hat{w}(x)$		$w_l = w_B$

Terme für Lasten im Feld zwischen 0 und x

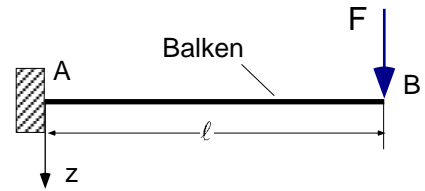
(außer Randlasten, sofern diese im Randelement x = 0 enthalten sind)

Lastterme für Längsbelastung		
Normalkraft $\hat{N}(\eta)$	F_x	$q_x \eta$

Lastterme für Biegung in z					
Result. R_q	--	$q \eta$	$q_a \frac{a}{2}$	--	$t \eta$
Angriffspkt. r_q	--	$\frac{\eta}{2}$	$\frac{2}{3} a$	--	$\frac{\eta}{2}$
$\hat{Q}(\eta)$	F_z	$q \eta$	$\frac{q_a \eta^2}{a \cdot 2}$	--	--
$\hat{M}(\eta)$	$F_z \eta$	$q \frac{\eta^2}{2}$	$\frac{q_a \eta^3}{a \cdot 6}$	T	$t \eta$
$\hat{w}'(x)$	$F_z \frac{\eta^2}{2EJ}$	$q \frac{\eta^3}{6EJ}$	$\frac{q_a \eta^4}{a \cdot 24EJ}$	$T \frac{\eta}{EJ}$	$t \frac{\eta^2}{2EJ}$
$\hat{w}(x)$	$F_z \frac{\eta^3}{6EJ}$	$q \frac{\eta^4}{24EJ}$	$\frac{q_a \eta^5}{a \cdot 120EJ}$	$T \frac{\eta^2}{2EJ}$	$t \frac{\eta^3}{6EJ}$

Werden die Gleichungen für einen Bereich k mit Koordinate x_k angewendet, so sind Q_0 , M_0 , w_0' und w_0 die Größen für $x_k = 0$, wobei die Lasten an der Stelle $x_k = 0$ in Q_0 und M_0 einzubeziehen sind.

Beispiel 2.7.2: Ein Kragbalken aus Holz der Breite $b = 20 \text{ cm}$ und der Höhe $h = 24 \text{ cm}$ soll bei Länge $l = 3 \text{ m}$ mit $F = 5 \text{ kN}$ belastet werden. Gesucht der Querkraft-, Momenten-, Neigungs- und Biegeverlauf des Balkens für $E = 12000 \text{ N / mm}^2$.
Achte auf die Einheiten!



2.7.4 Federmodell des Biegebalkens

Der Balken, der mit einer Kraft F belastet ist und sich verbiegt, verhält sich mechanisch wie eine lineare Zug-Druck-Feder, ähnlich wie ein Längsstab, vgl. Abschn. 2.6.2.

In der Literatur finden Sie eine Vielzahl gelöster Balkenmodelle mit unterschiedlichen Lagerbedingungen und Lasten. Hieraus werden drei Fälle diskutiert:

A) Der Kragbalken mit Kraft F im Punkt B:

Aus Beispiel 2.7.2 entnimmt man für die Durchbiegung im Punkt

$$B: \quad w_B = \frac{F \ell^3}{3 E J}$$

Im Vergleich mit einer Zug-Druck-Feder mit dem Gesetz

$$\text{Kraft } F = \text{Federsteifigkeit } k \cdot \text{Federverlängerung} \quad (\text{Abschn. 2.6.2, Glg. 2.18})$$

schließt man

$$\text{Ersatzfedersteifigkeit Kragbalken mit } F \quad k = \frac{3 E J}{\ell^3} \quad (\text{Kraft / Länge}) \quad (2.36)$$

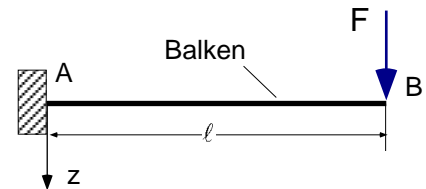


Bild 2.21: Kragbalken mit F

B) Balken auf zwei Lager mit Last F im Punkt B:

Aus z.B. Hütte entnimmt man für die Durchbiegung im Punkt

$$B: \quad w_B = \frac{F \ell^3}{48 E J}$$

Im Vergleich mit einer Zug-Druck-Feder mit dem Gesetz

(Abschn. 2.6.2, Glg. 2.18) schließt man

$$\text{Ersatzfedersteifigkeit Balken auf 2 Lager mit } F \quad k = \frac{48 E J}{\ell^3} \quad (\text{Kraft / Länge}) \quad (2.37)$$

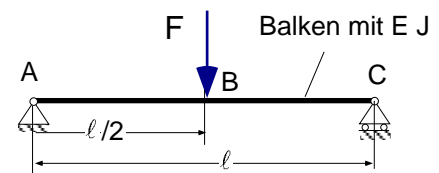


Bild 2.22: 2-Lagerbalken mit F

C) Kragbalken mit Moment M im Punkt B:

Hier interessiert insbesondere die Drehung des Balkens im Punkt B.

Aus z.B. Hütte entnimmt man für die Neigung im Punkt B:

$$w'_B = \frac{M \ell}{E J}$$

Im Vergleich mit einer Torsionsfeder mit dem Gesetz

Torsionsmoment M_t = Torsionsfedersteifigkeit k_t · Drehwinkeländerung $\Delta\alpha$ schließt man

$$\text{Ersatz-Torsionssteifigkeit Kragbalken mit Moment} \quad k_t = \frac{E J}{\ell} \quad (\text{Moment / rad}) \quad (2.38)$$

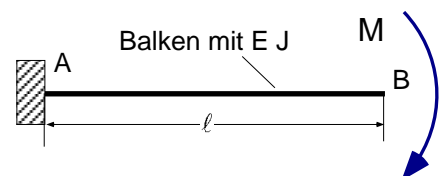
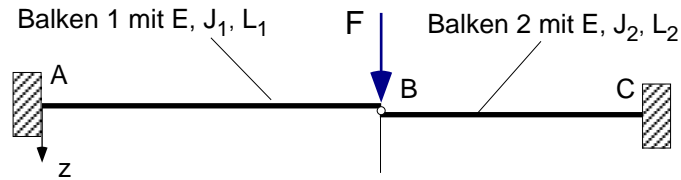


Bild 2.23: Kragbalken mit M

Beispiel 2.7.3: Last F auf zwei Kragbalken.

Wie in Bild gezeigt, wird der Balken 1 mit F an der Kontaktstelle B belastet; in B wird von Balken 1 nach 2 keine Moment übertragen - man kann sich hier ein Dreh-Schub-Gelenk vorstellen.

Balken 1 hat das Flächenmoment 2. Ordnung J_1 und die Länge L_1 , Balken 2 hat das Flächenmoment 2. Ordnung J_2 und die Länge L_2 , beide Balken weisen den E-Modul E auf.



a) Bestimme den Freiheitsgrad des 2-Körpersystems und gebe eine Aussage zur Lösbarkeit der Lagerreaktionen.

b) Stelle die Gleichungen der Lagerreaktionen auf.

c) Stelle Gleichungen zu den Verformungen der Balken 1 und 2 auf und löse das Gleichungssystem. Verwende das Ersatzfedermodell.

2.8 Flächengeometrie

2.8.1 Fläche, Flächenschwerpunkt, Flächenmomente 1. und 2. Ordnung

In der Technischen Mechanik werden vielfach Integrale über die Fläche benötigt.

Die erste Größe ist die Fläche A eines Querschnittes selbst. Weiter finden der Flächenschwerpunkt S_A und die Flächenmomente 2. Ordnung J in der Biegetheorie Anwendung.

In Bild 2.24 ist eine Querschnittsfläche mit dem Bereich B im y - z -Koordinatensystem gegeben.

Ein Flächenelement $dA = dy dz$ weist die Koordinaten y und z auf.

Der Flächenschwerpunkt sei S_A am Ort y_{SA} und z_{SA} .

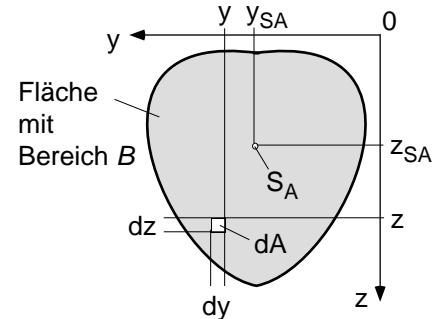


Bild 2.24: Querschnittsfläche

Wir definieren folgende Integrale

Fläche des Querschnitts	$A = \int_B dA = \iint_B dy dz$	(Länge ²)	(2.39)
--------------------------------	---------------------------------	-----------------------	--------

Flächenmomente 1. Ordnung	$S_y = \int_B y dA = \iint_B y dy dz$	(Länge ³)	(2.40)
	$S_z = \int_B z dA = \iint_B z dy dz$		

Flächenmomente 2. Ordnung	$J_{yy} = \int_B z^2 dA = \iint_B z^2 dy dz$	(Länge ⁴)	(2.41)
	$J_{zz} = \int_B y^2 dA = \iint_B y^2 dy dz$		

Neben den Flächenmomenten J_{yy} und J_{zz} kann auch ein gemischtes Flächenmoment 2. Ordnung berechnet werden. Dieses wird auch Flächen-Deviationsmoment bezeichnet.

Flächen-Deviationsmoment	$J_{yz} = \int_B y z dA = \iint_B y z dy dz$	(Länge ⁴)	(2.42)
---------------------------------	--	-----------------------	--------

In manchen Literaturstellen werden Deviationsmomente auch negativ definiert!

Liegt eine Flächensymmetrie zur z -Achse vor und liegt das Koordinatensystem im Flächenschwerpunkt, ist $J_{yz} = 0$! Gelegentlich wird J_{yz} auch negativ definiert.

Polares Flächenmoment	$J_p = \int_B (y^2 + z^2) dA = \int_B r^2 dA = J_{yy} + J_{zz} = J_{xx}$	(2.43)
------------------------------	--	--------

Aus (2.40) ermittelt man die Koordinaten des Flächenschwerpunkts

Flächenschwerpunkt S_A	$y_{SA} = \frac{S_y}{A} \quad \text{und} \quad z_{SA} = \frac{S_z}{A}$	(Länge)	(2.44)
--	--	---------	--------

Beachte: Die Werte der Flächenmomente 1. und 2. Ordg. sind vom Koordinatensystem abhängig!!!

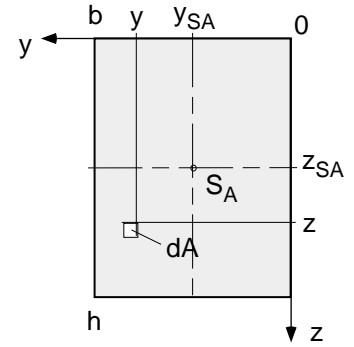
Tab. 2.4 enthält die Flächenmomente 2. Ordg. bestimmter geometrischer Querschnittsflächen.

Für weitere Berechnungen siehe z.B. (Dankert and Dankert 2004) oder Hütte oder Dubbel.

Beispiel 2.8.1: Flächenintegrale Rechteckquerschnitt

Berechne für den Rechteckquerschnitt mit der Breite b und der Höhe h alle Flächenintegrale.

Was ändert sich, wenn das Koordinatensystem in den Flächenschwerpunkt S_A verschoben wird?



2.8.2 Der Satz von Steiner

Gegeben seien die Flächenmomente 2. Ordnung J_{yy} und J_{zz} bez.

dem Koordinatenachsen y und z , vgl. Bild 2.24.

Wie kann man diese Werte auf ein Koordinatensystem mit den y^*-z^* , dessen Ursprung im Schwerpunkt S_A liegt, umrechnen?

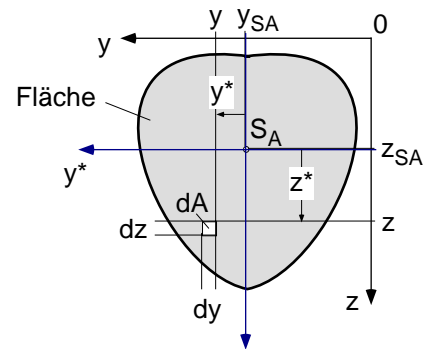


Bild 2.25: Fläche mit Schwerpkt.

Mit $y = y_{SA} + y^*$ und $z = z_{SA} + z^*$ für ein Flächenelement dA folgt

$$J_{yy} = \int_B z^2 dA = \int_B (z_{SA} + z^*)^2 dA = \underbrace{\int_B z_{SA}^2 dA}_{z_{SA}^2 A} + \underbrace{\int_B z^{*2} dA}_{J_{yy}^*} + 2 \underbrace{z_{SA} \int_B z^* dA}_0 \quad (2.45)$$

Somit gilt für **Umrechnungen zum oder vom Flächenschwerpunkt !!!**

$$J_{yy} = z_{SA}^2 A + J_{yy}^* \quad (2.46)$$

$$J_{zz} = y_{SA}^2 A + J_{zz}^* \quad (2.47)$$

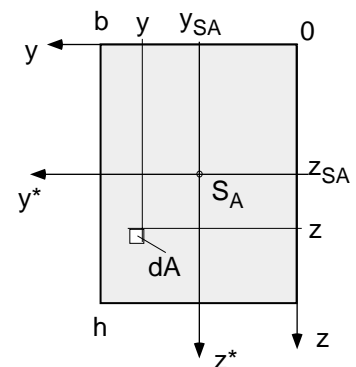
$$J_{yz} = y_{SA} z_{SA} A + J_{yz}^* \quad (2.48)$$

Hierin sind $J_{yy}^* = J_{yy}(S_A)$, $J_{zz}^* = J_{zz}(S_A)$ und $J_{yz}^* = J_{yz}(S_A)$ die Flächenmomente 2. Ordnung der Fläche A bezüglich den Achsen im Flächenschwerpunkt S_A .

Beachte: Flächenmomente J_{yy}^* und J_{zz}^* bezüglich den Achsen im Flächenschwerpunkt weisen die kleinsten Werte auf. Sie dürfen aber nie negativ werden!!!

Beispiel 2.8.2: Flächenmomente des Rechteckquerschnitts bez. S_A

Berechne für den Rechteckquerschnitt mit der Breite b und der Höhe h die Flächenmomente mit Hilfe des Satzes von Steiner auf das Koordinatensystem im Flächenschwerpunkt S_A um.



2.8.3 Zusammengesetzte Flächen

Mit Hilfe von Tab. 2.4 und dem Übergang der Integraldarstellung in Abschn. 2.81 auf eine Summendarstellung lassen sich geschickt die Flächenintegrale beliebige Querschnitte ermitteln.

Dabei werden positive Querschnitte für vorhandene Materialien und negative Querschnitte für Aussparungen angewandt. Bild 2.26 zeigt ein zusammengesetztes Profil.

Es gelten in Analogie zu (2.39) bis (2.42) folgende Gleichungen:

Für ein Flächensystem mit n Teilflächen der Fläche A_i , den Flächenmomenten J_{yyi} , J_{zzi} , J_{yzi} bezüglich Teilflächenschwerpunkt S_i und deren Koordinaten y_i und z_i der lokalen Teilflächenkoordinatensysteme $O_i = S_i$ gilt:

Fläche des Querschnitts
$$A = \sum_{i=1}^n A_i \quad (\text{Länge}^2) \quad (2.49)$$

Flächenmomente 1. Ordg.
$$S_y = \sum_{i=1}^n (y_i A_i), \quad S_z = \sum_{i=1}^n (z_i A_i) \quad (\text{Länge}^3) \quad (2.50)$$

Flächenmomente 2. Ordg.
$$J_{yy} = \sum_{i=1}^n (z_i^2 A_i + J_{yyi}), \quad J_{zz} = \sum_{i=1}^n (y_i^2 A_i + J_{zzi}) \quad (\text{Länge}^4) \quad (2.51)$$

Flächen-Deviationsmoment
$$J_{yz} = \sum_{i=1}^n (y_i z_i A_i + J_{yzi}) \quad (\text{Länge}^4) \quad (2.52)$$

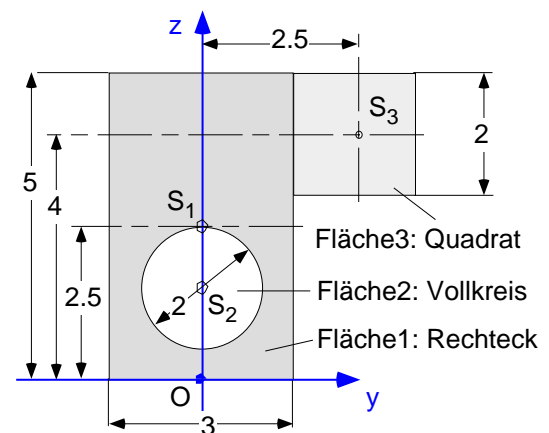
Beispiel 2.8.3 Flächenintegrale eines Flächensystems

Berechne für die in Bild 2.26 gezeigte Fläche alle Flächenintegrale. Alle Angaben in cm. Die Bohrung (Fläche 2) ist abzuziehen.

Der lokale Koord.Ursprung der Teilflächen ist jeweils der Schwerpunkt der Teilflächen.

(ggf. mit Hilfe "Satz von Steiner" umrechnen)

Verwende für die Teilflächen Tab. 2.4.



Wir erstellen eine Tabelle

Bild 2.26: Ein System aus Flächen

Teil	A_i	y_i	z_i	$y_i A_i$	$z_i A_i$	$y_i^2 A_i$	$z_i^2 A_i$	$y_i z_i A_i$	$J_{yyi}(S_i)$	$J_{zzi}(S_i)$
1	+15.00	0	2.5	0	+37.50	0	+93.75	0	+31.25	+11.25
2	-3.142	0	1.5	0	-4.712	0	-7.068	0	-0.785	-0.785
3	+4.00	2.5	4	10.0	+16.00	25.0	+64.0	40.0	+1.333	+1.333
Σ	15.858			10.0	48.788	25.0	150.681	40.0	31.798	11.798

2.9 Weitere Themen der Balkentheorie

2.9.1 Superposition von Dehnung und Biegung

Es wurden reine Dehnung und reine Biegung besprochen, vgl. Abschn. 2.6 und 2.7.

Unter den bereits vorgenommenen Annahmen können **Dehnung und Biegung des Balkens superponiert** werden. Dabei soll **Knicken ausgeschlossen** werden.

Dehnung liefert eine konstante Normalspannungen σ_{Dehn} und Biegung eine in z lineare Normalspannung σ_{Bieg} über den Querschnitt.

Wir fassen nun beide zusammen zu

$$\textbf{Gesamtspannung am Ort } x \text{ und } z \quad \sigma_{\text{ges}}(x, z) = \sigma_{\text{Dehn}}(x) + \sigma_{\text{Bieg}}(x, z) \quad (2.53)$$

Bei Vorgabe von Zugdehnung wird an der Zugseite des Biegebalkens die Spannung somit erhöht und an der Druckseite die Spannung reduziert.

Wird die Druckkraft auf den Balken zu groß, wird der Balken ausknicken. Siehe hierzu die Literatur z.B. (Brommundt and Sachs 1988) , (Gabbert and Raecke 2003), (Dankert and Dankert 2004).

2.9.2 Torsion von kreisrunden Stäben

Hier sollen nur erste Überlegungen zur Torsion folgen. Weitere Details siehe hierzu die Literatur.

Wirkt auf einen Stab an beiden Enden ein Torsionsmoment wird sich der Stab verdrehen, verdrillen, verwinden. In der Querschnittsfläche entsteht eine Schubspannung τ , für die das Hooke'sche Gesetz

(2.11) zu $\tau = G \gamma$ oder $\gamma = \frac{\tau}{G}$ mit Schubmodul $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ Anwendung findet.

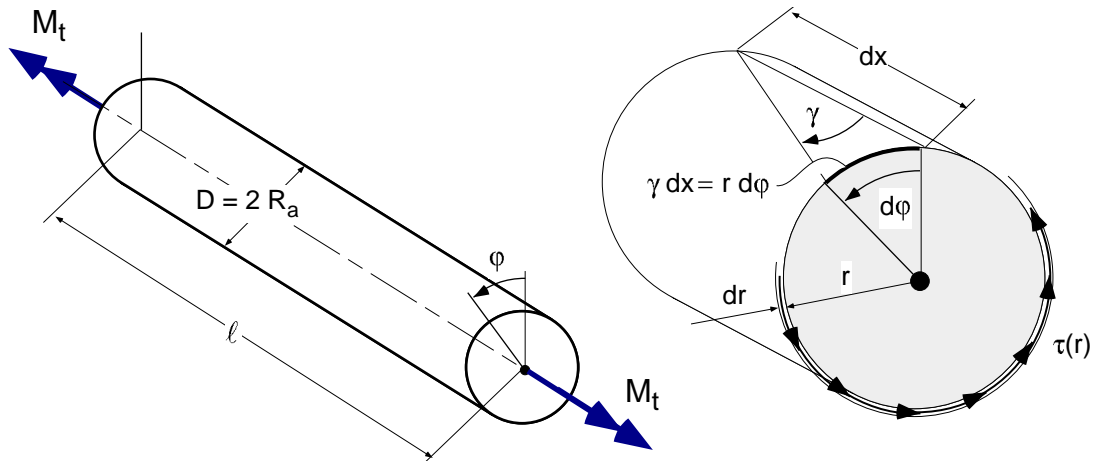


Bild 2.7: Verformung einer Welle infolge Torsionsmomenten an den Enden der Welle

Aus Bild 2.27 entnimmt man mit der **Verdrehung** (Winkel) φ und **Drillung** $\varphi' = d\varphi / dx = \vartheta$

$$\text{Scherung } \gamma = r \frac{d\varphi}{dx} = r \varphi' \quad (2.54)$$

An Rand ist die Scherung am größten, bei $r = 0$ ist $\gamma = 0$.

Für die Schubspannung gilt das Hooke'sche Gesetz und das Integral über die Querschnittsfläche muss mit dem **Torsionsmoment** M_t im Gleichgewicht sein:

$$\text{Schubspannung} \quad \tau = G \gamma = G r \vartheta \quad (2.55)$$

$$\text{Torsionsmoment} \quad M_t = \int_A r \tau dA = G \vartheta \int_A r^2 dA = G J_p \vartheta \quad (2.56)$$

J_p ist das bekannte **polare Flächenmoment**, vgl. (2.43).

Aus (2.56) folgt die Drillung und die Verdrehung einer Welle der Länge ℓ mit konstantem polarem Flächenmoment J_p und Schubmodul G :

$$\text{Drillung} \quad \vartheta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{G J_p} \quad (2.57)$$

$$\text{Verdrehung} \quad \varphi = \varphi_0 + \int_0^\ell \frac{M_t}{G J_p} dx = \varphi_0 + \frac{M_t}{G J_p} \int_0^\ell dx = \varphi_0 + \frac{M_t \ell}{G J_p} = \varphi_0 + \vartheta \ell \quad (2.58)$$

φ_0 ist der Verdrehwinkel an der Stelle $x = 0$.

Der Verlauf der Schubspannung im Querschnitt ist proportional zum Radius, vgl. (2.55). Setzt man in (2.55) die Beziehung (2.57) ein, folgt

$$\text{Schubspannungsverlauf} \quad \tau(r) = G r \frac{M_t}{G J_p} = \frac{M_t}{J_p} r \quad (2.59)$$

Bei $r = R_a$ dem Außenradius ergibt sich die

$$\text{maximale Schubspannung} \quad \tau_{\max} = \tau(r = R_a) = \frac{M_t}{J_p} R_a = \frac{M_t}{W_t} \quad \text{wo} \quad W_t = \frac{J_p}{R_a} \quad (2.60)$$

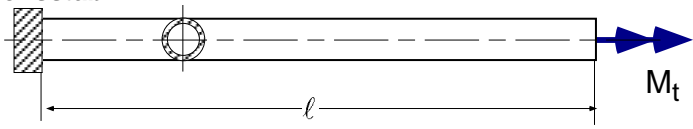
das **Torsions-Widerstandsmoment** ist.

$$\text{Wir fordern} \quad \tau_{\max} \leq \tau_{\text{zul}} \quad (2.61)$$

Hinweis: Beim Übergang auf andere Querschnitte darf das polare Flächenmoment nicht eingesetzt werden. Siehe hierzu die genannte Literatur.

Beispiel 2.9.1 Einseitig eingespannter Torsionsstab.

Der einseitig eingespannte Torsionsstab aus Aluminium mit dem Innendurchmesser 8 mm und Außendurchmesser 12 mm sowie der Länge $\ell = 600$ mm wird mit dem Moment $M_t = 12$ Nm biegefrei belastet.



Berechne:

- das Polare Flächenmoment J_p und das Torsions-Widerstandsmoment W_t
- Die Drillung und die Verdrehung am Ende der Welle bez. der Einspannung.
- Den Schubspannungsverlauf τ und das Maximum.
- Eine Ersatzfedersteifigkeit k_t für die Torsionswelle.

